

## 第五章 實驗結果與分析

本章節實驗結果與分析將分成：一般之解模糊關係方程式、結合模糊關係方程式限制用以解非線性最佳化之遺傳演算法的測試函數。

### 5.1 一般之解模糊關係方程式

本節將一些解模糊關係方程式之比較特殊，或是其他文獻上解答錯誤的例子，在此列舉一些範例。

#### 例5-1

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0.8 \\ 1 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, B = [0.7 \quad 0.5 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0]$$

解：極大值與極小值分別為

$$\text{Max}V = [0.5 \quad 1 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0 \quad 0.7 \quad 1]$$

$$\text{Min}V = [0.5 \quad 0 \quad 0.4 \quad 0 \quad 0 \quad 0.7 \quad 0]$$

### 例5-2

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.2 \\ 1 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}, B = [0.9 \quad 0.7 \quad 0.5 \quad 0.3]$$

解：極大值與極小值分別為

$$\text{MaxV} = [0.7 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.9]$$

$$\text{MinV}_1 = [0.3 \quad 0.9 \quad 0.5 \quad 0]$$

$$\text{MinV}_2 = [0 \quad 0.9 \quad 0.5 \quad 0.3]$$

### 例5-3

$$R = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 1 & 0.6 & 0.7 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, B = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]$$

解：極大值與極小值分別為

$$\text{MaxV} = [0.5 \quad 0.5 \quad 1]$$

$$\text{MinV} = [0 \quad 0.5 \quad 0]$$

### 例5-4

$$R = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.9 & 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.9 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}, B = [0.4 \quad 0.9 \quad 0.3 \quad 0.5]$$

解：極大值與極小值分別為

$$\text{MaxV} = [1 \quad 0.3 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$\text{MinV} = [0.9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

例5-5

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.5 & 0.9 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.9 & 1 & 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 0.95 & 0.7 & 0.3 & 0.6 \\ 0.45 & 0.6 & 1 & 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}, B = [0.5 \quad 0.9 \quad 1 \quad 0.8 \quad 0.7]$$

解：極大值與極小值分別為

$$\text{Max}V = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0.9 \quad 1]$$

$$\text{Min}V_1 = [0.7 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\text{Min}V_2 = [0 \quad 1 \quad 0.7 \quad 0 \quad 0]$$

$$\text{Min}V_3 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0.7]$$

## 5.2 解非線性最佳化之遺傳演算法的測試函數

此節的測試函數是依據[4]這篇文獻，以下是文獻與本研究執行結果之比較與說明。

### 例5-6

測試函數1之相關數值如表5-1所示

表 5-1 Test Problem 1 之數據

測試函數	$f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$
矩陣 $R$	$R = \begin{bmatrix} 0.5176 & 0.1370 & 0.4093 \\ 0.2278 & 0.4585 & 0.7399 \\ 0.8993 & 0.6334 & 0.0313 \\ 0.9858 & 0.2790 & 0.3039 \end{bmatrix}$
矩陣 $B$	$B = [0.7208 \quad 0.6334 \quad 0.4725]$

資料來源：本研究整理

解：使用本研究所改良之解模糊關係方程式方法之後，可以得出此模糊關係方程式的極大解與極小解分別為

$$\text{Max}V = [0.4725 \quad 0.4725 \quad 0.7208 \quad 0.7208]$$

$$\text{Min}V_1 = [0.4725 \quad 0 \quad 0.7208 \quad 0]$$

$$\text{Min}V_2 = [0 \quad 0.4725 \quad 0.7208 \quad 0]$$

得出上下界之後，再利用本研究中的遺傳演算法進行運算後，可以得出以下之結果，本研究結果是於每一個世代中，抓最好的個體建立下表，如表5-2所示，表5-3是文獻上所提供之結果：

表 5-2 本研究 Test Problem 1 之結果

世代	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	適應度
	1	2	3	4	1
1	0.4725	0.0185	0.7208	0.6997	4.562618438658203
2	0.4725	0.0166	0.7208	0.682	4.55794298113379
3	0.4725	0.0139	0.7208	0.706	4.559508075098507
4	0.4725	0.0139	0.7208	0.7152	4.563518674320983
5	0.4725	0.0346	0.7208	0.699	4.617850679932812
6	0.4725	0.0125	0.7208	0.6757	4.555315275126024
7	0.4725	0.0199	0.7208	0.6954	4.564128424839994
8	0.4725	0.0055	0.7208	0.6158	4.590953219989078
9	0.4725	0.0051	0.7208	0.682	4.559034286993681
10	0.4725	0.0088	0.7208	0.6849	4.555433026996261
11	0.4725	0.036	0.7208	0.6884	4.623613420311112
12	0.4725	0.0083	0.7208	0.6334	4.573795101344548
13	0.4725	0.0018	0.7208	0.6912	4.565176487384048
14	0.4725	0	0.7208	0.6778	4.569223343258305
15	0.4725	0.0148	0.7208	0.6968	4.557516848947549
16	0.4725	0.0111	0.7208	0.7067	4.559022257539608
17	0.4725	0.0296	0.7208	0.713	4.599226504173298
18	0.4725	0.0097	0.7208	0.6729	4.555817158029567
19	0.4725	0.0268	0.7208	0.7074	4.586289186358552
20	0.4725	0.03	0.7208	0.6482	4.603231482353809
21	0.4725	0.0176	0.7208	0.682	4.559148708065032
22	0.4725	0.006	0.7208	0.7011	4.560296417908602

資料來源：本研究整理

表 5-3 文獻 Test Problem 1 之結果

GAOFRC's performance on Test Problem 1

Generation	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$f$
1	0.0737	0.4725	0.7208	0.7208	25.66289115677
2	0.1254	0.4725	0.7208	0.4254	24.92549240573
10	0.0544	0.4725	0.7208	0.3510	24.48538689294
13	0.0477	0.4725	0.7208	0.5504	24.44449063700
26	0.0590	0.4725	0.7208	0.5030	24.39455537353
27	0.0032	0.4725	0.7208	0.3599	24.05118705966
120	0.0070	0.4725	0.7208	0.4668	24.04365588515
383	0.0095	0.4725	0.7208	0.4151	24.03526445700
679	0.0018	0.4725	0.7208	0.4484	23.99371873073
788	0.0013	0.4725	0.6334	0.4426	23.98606775704
1079	0.0017	0.4725	0.7208	0.4134	23.98359498123

從本研究與文獻之結果可以印證，「若選擇錯誤的並存狀態，將會得到不好的結果」，本研究於此範例中明顯優於文獻上的結果。表5-3中第788世代中的 $x_3$ 數值0.6334，本研究認為並不對，因為 $x_3$ 的上下界是固定為0.7208，不可以變動，所以認定文獻之方法與數據可能有些許的問題和疑問。再者，本研究的適應度無法像文獻呈現的會越來越小的收斂下去，且文獻左邊的世代並非連續狀態，此點也令人質疑。本研究認為此為多變數的交配，變動的變數越多，結果越難去預估，適應度應該是會呈現震盪的情形，而非遞減。

### 例5-7

測試函數2之相關數值如表5-4所示

表 5-4 Test Problem 2 之數據

測試函數	$f(x) = 3000x_1 + 1000x_1^3 + 2000x_2 + 666.667x_2^3$
矩陣 $R$	$R = \begin{bmatrix} 0.3381 & 0.7189 & 0.7101 \\ 0.1895 & 0.6089 & 0.8791 \\ 0.7431 & 0.0729 & 0.3594 \end{bmatrix}$
矩陣 $B$	$B = [0.4523 \quad 0.6089 \quad 0.7452]$

解：經由解模糊關係方程式法則運算後，得出此模糊關係方程式的極大解與極小解分別為

$$\text{MaxV} = [0.6089 \quad 0.7452 \quad 0.4523]$$

$$\text{MinV} = [0 \quad 0.7452 \quad 0.4523]$$

表5-5與5-6分別為本研究之結果與文獻之結果

表 5-5 本研究 Test Problem 2 之結果

世代	$x_1$	$x_2$	$x_3$	適應度
	1	2	3	1
1	0	0.7452	0.4523	1766.284624214243
2	0	0.7452	0.4523	1766.284624214243
3	0.0024	0.7452	0.4523	1773.42715970394...
4	0.0018	0.7452	0.4523	1771.64152140328...
5	0	0.7452	0.4523	1766.284624214243
6	0	0.7452	0.4523	1766.284624214243
7	0.0018	0.7452	0.4523	1771.64152140328...
8	0.0012	0.7452	0.4523	1769.85588689825...
9	0.0006	0.7452	0.4523	1768.07025492364...
10	0.0006	0.7452	0.4523	1768.07025492364...
11	0	0.7452	0.4523	1766.284624214243
12	0.0042	0.7452	0.4523	1778.78411003176
13	0	0.7452	0.4523	1766.284624214243
14	0.0024	0.7452	0.4523	1773.42715970394...
15	0.0024	0.7452	0.4523	1773.42715970394...
16	0	0.7452	0.4523	1766.284624214243
17	0	0.7452	0.4523	1766.284624214243
18	0.0065	0.7452	0.4523	1785.926840363643
19	0.0387	0.7452	0.4523	1882.40851628904...
20	0.0018	0.7452	0.4523	1771.64152140328...
21	0.0161	0.7452	0.4523	1814.50079819276...
22	0	0.7452	0.4523	1766.284624214243

資料來源：本研究整理

表 5-6 文獻 Test Problem 2 之結果

GAOFRC's performance on Test Problem 2

Generation	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
1	0.6089	0.7452	0.4523	3818.73990718324
2	0.1714	0.7452	0.4523	2285.62281975911
3	0.0851	0.7452	0.4523	2022.13144524949
4	0.0058	0.7452	0.4523	1783.78537479541
5	0.0034	0.7452	0.4523	1776.35420959160
21	0.0009	0.7452	0.4523	1768.89398408703
24	0.0003	0.7452	0.4523	1767.16960581446
57	0.00004	0.7452	0.4523	1766.40735424656
725	0.0105	0.7452	0.4523	1766.31617689585
750	0.0083	0.7452	0.4523	1766.30946847475
1560	0.0030	0.7452	0.4523	1766.29360722155

此範例因為只有一個變動的參數，所以不難發現 $[0 \ 0.7452 \ 0.4523]$ 即為此測試函數的極小解。

### 例5-8

測試函數3之相關數值如表5-7所示

表 5-7 Test Problem 3 之數據

測試函數	$f(x) = -0.5(x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_6 - x_5x_6 + x_5x_4 - x_6x_7)$
矩陣 $R$	$R = \begin{bmatrix} 0.0964 & 0.8965 & 0.1217 & 0.7902 & 0.4289 & 0.3001 \\ 0.6747 & 0.8784 & 0.0768 & 0.6988 & 0.5735 & 0.9328 \\ 0.5626 & 0.4865 & 0.1433 & 0.6812 & 0.4986 & 0.1462 \\ 0.8130 & 0.1131 & 0.4776 & 0.7406 & 0.4839 & 0.5296 \\ 0.6713 & 0.3775 & 0.7086 & 0.3624 & 0.4507 & 0.0803 \\ 0.7694 & 0.3826 & 0.2380 & 0.7592 & 0.4907 & 0.9725 \\ 0.6352 & 0.6876 & 0.3910 & 0.6943 & 0.7408 & 0.4082 \end{bmatrix}$
矩陣 $B$	$B = [0.6913 \ 0.8836 \ 0.6419 \ 0.7902 \ 0.4909 \ 0.5296]$

解：此模糊關係方程式的極大解與極小解分別為

$$\text{Max}V = [0.8836 \ 0.4909 \ 0.4909 \ 0.6913 \ 0.6419 \ 0.5296 \ 0.4909]$$

$$\text{Min}V_1 = [0.8836 \ 0.4909 \ 0 \ 0.6913 \ 0.6419 \ 0 \ 0]$$

$$\text{Min}V_2 = [0.8836 \ 0 \ 0.4909 \ 0.6913 \ 0.6419 \ 0 \ 0]$$

$$\text{Min}V_3 = [0.8836 \ 0 \ 0 \ 0.6913 \ 0.6419 \ 0 \ 0.4909]$$

此模糊關係方程式有並存現象，選擇不同組的極小解，則會分別有其各自的固定參數與可變動參數範圍，表5-8與5-9分別為本研究之結果與文獻之結果

表 5-8 本研究 Test Problem 3 之結果

世代	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	適應度
1	0.8836	0.0072	0.1496	0.6913	0.6419	0.0016	0.4909	-0.525987686244069
2	0.8836	0.0017	0.4909	0.6913	0.6419	0	0.2084	-0.526877037953102
3	0.8836	0.077	0	0.6913	0.6419	0.0047	0.4909	-0.524651372059111
4	0.8836	0.0177	0.4909	0.6913	0.6419	0.0158	0.2302	-0.519925048001015
5	0.8836	0.4909	0.0022	0.6913	0.6419	0.0062	0.1811	-0.524211019098981
6	0.8836	0.0031	0.2072	0.6913	0.6419	0.0018	0.4909	-0.526127943706702
7	0.8836	0.0096	0.4909	0.6913	0.6419	0.0233	0.1928	-0.520931794133914
8	0.8836	0.0058	0.1496	0.6913	0.6419	0	0.4909	-0.526858433167748
9	0.8836	0.011	0.4909	0.6913	0.6419	0.0054	0.4724	-0.522887805799917
10	0.8836	0.0103	0.4909	0.6913	0.6419	0.0085	0.0986	-0.523692632461104
11	0.8836	0.0062	0.0269	0.6913	0.6419	0.0016	0.4909	-0.526346951824187
12	0.8836	0.4909	0.0014	0.6913	0.6419	0	0.2113	-0.526935900388373
13	0.8836	0.0055	0.1367	0.6913	0.6419	0.0034	0.4909	-0.525236959133658
14	0.8836	0.0089	0.4909	0.6913	0.6419	0.0233	0.1729	-0.521340118732641
15	0.8836	0.4909	0.0022	0.6913	0.6419	0.007	0.3374	-0.52334636410412
16	0.8836	0.0046	0.4909	0.6913	0.6419	0.0065	0.4523	-0.524219648643781
17	0.8836	0.0072	0.1496	0.6913	0.6419	0.0016	0.4909	-0.525987686244069
18	0.8836	0.0022	0.4909	0.6913	0.6419	0.0091	0.1273	-0.525499094059308
19	0.8836	0.3995	0.0369	0.6913	0.6419	0.0036	0.4909	-0.517926795628728
20	0.8836	0.1264	0.0254	0.6913	0.6419	0.0085	0.4909	-0.5209554648712
21	0.8836	0.0002	0.4909	0.6913	0.6419	0.0003	0.0909	-0.527198921711008
22	0.8836	0.0084	0.4909	0.6913	0.6419	0.0041	0.47	-0.523943493594389

資料來源：本研究整理

表 5-9 文獻 Test Problem 3 之結果

GAOFRC's performance on Test Problem 3

Generation	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$f$
1	0.8836	0.5296	0.4909	0.6913	0.6419	0.5296	0.4909	-0.2273
2	0.8836	0.5296	0.4909	0.6913	0.6419	0.1821	0.4909	-0.3389
3	0.8836	0.5234	0.1255	0.6913	0.6419	0.0168	0.4909	-0.4860
36	0.8836	0.3146	0.2311	0.6913	0.6419	0.0076	0.4909	-0.4876
72	0.8836	0.0341	0.1755	0.6913	0.6419	0.0638	0.4909	-0.4938
84	0.8836	0.5296	0.0810	0.6913	0.6419	0.0052	0.4909	-0.5031
101	0.8836	0.4677	0.0627	0.6913	0.6419	0.0171	0.4909	-0.5035
182	0.8836	0.2484	0.1487	0.6913	0.6419	0.0059	0.4909	-0.5059
187	0.8836	0.4909	0.0404	0.6913	0.6419	0.0020	0.4869	-0.5163
365	0.8836	0.4906	0.0090	0.6913	0.6419	0.0134	0.4909	-0.5176
464	0.8836	0.0418	0.0850	0.6913	0.6419	0.0026	0.4909	-0.5246

文獻上固定的參數是  $x_1$ 、 $x_4$ 、 $x_5$  及  $x_7$ ，但這只是本研究中的  $\text{MinV}_3$  這組情況，本研究仍可找到其他兩種情況。文獻上  $x_2$  與  $x_6$  的範圍本研究認為有問題，根據本研究解出後上界應該是 0.4909，不可能出現超過上界的 0.5296。本研究也認為文獻於此範例所採用的適應度不恰當，不應該使用適應度是負數的定義，此處也值得將來去做深入的討論與研究。

### 例5-9

測試函數4之相關數值如表5-10所示

表 5-10 Test Problem 4 之數據

測試函數	$f(x) = x_1x_2x_3x_4x_5$
矩陣 $R$	$R = \begin{bmatrix} 0.3391 & 0.3682 & 0.6702 & 0.8195 \\ 0.4757 & 0.3823 & 0.9954 & 0.6934 \\ 0.4403 & 0.6001 & 0.6981 & 0.3742 \\ 0.5857 & 0.4295 & 0.4027 & 0.0096 \\ 0.4329 & 0.1488 & 0.8493 & 0.7798 \end{bmatrix}$
矩陣 $B$	$B = [0.5456 \quad 0.5244 \quad 0.8987 \quad 0.7544]$

解：此模糊關係方程式的極大解與極小解分別為

$$\text{MaxV} = [0.7544 \quad 0.8987 \quad 0.5244 \quad 0.5456 \quad 0.7544]$$

$$\text{MinV}_1 = [0.7544 \quad 0.8987 \quad 0.5244 \quad 0.5456 \quad 0]$$

$$\text{MinV}_2 = [0 \quad 0.8987 \quad 0.5244 \quad 0.5456 \quad 0.7544]$$

此模糊關係方程式有並存現象，表5-11與5-12分別為本研究之結果與文獻之結果

表 5-11 本研究 Test Problem 4 之結果

世代	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	適應度
	1	2	3	4	5	1
1	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0	0
2	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0	0
3	0.0007	0.8987	0.5244	0.5456	0.7544	0.000143047249651
4	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0	0
5	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0	0
6	0	0.8987	0.5244	0.5456	0.7544	0
7	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0007	0.000143047249651
8	0.0007	0.8987	0.5244	0.5456	0.7544	0.000143047249651
9	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0	0
10	0	0.8987	0.5244	0.5456	0.7544	0
11	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0	0
12	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0	0
13	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0	0
14	0	0.8987	0.5244	0.5456	0.7544	0
15	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0	0
16	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0007	0.000143047249651
17	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0059	0.001144377997207
18	0.0007	0.8987	0.5244	0.5456	0.7544	0.000143047249651
19	0	0.8987	0.5244	0.5456	0.7544	0
20	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0029	0.000572188998604
21	0	0.8987	0.5244	0.5456	0.7544	0
22	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0	0

資料來源：本研究整理

表 5-12 文獻 Test Problem 4 之結果

GAOFRC's performance on Test Problem 4

Generation	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$f$
1	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.7544	0.14633733639
2	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.2815	0.05460278243
3	0.0758	0.8987	0.5244	0.5456	0.7544	0.01470872879
4	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0181	0.00352061133
5	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0100	0.00194444393
10	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0018	0.00036197877
86	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0011	0.00021495688
170	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0005	0.00009863677
176	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0001	0.00002778486
225	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0001	0.00001957099
729	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0000	0.00000788981
1994	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0000	0.00000507836
2004	0.7544	0.8987	0.5244	0.5456	0.0000	0.00000112251

此範例中，本研究發現不管是極小解裡的哪一組並存狀態被選取，均能得出相同的適應度，優於文獻上都只有找出一種情況的解。亦證明本研究之遺傳演算法並不會只針對單一組並存狀況去求解。

### 例5-10

測試函數5之相關數值如表5-13所示

表 5-13 Test Problem 5 之數據

測試函數	$f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_{10} - 1)^2 + 10 \sum_{i=1}^9 (10 - i)(x_i^2 - x_{i+1})^2$
矩陣 $R$	$R = \begin{bmatrix} 0.2430 & 0.7797 & 0.4048 & 0.2647 & 0.2136 & 0.2825 & 0.1141 \\ 0.1234 & 0.7192 & 0.5865 & 0.1700 & 0.4339 & 0.3806 & 0.7811 \\ 0.4549 & 0.6664 & 0.5794 & 0.5335 & 0.0331 & 0.2081 & 0.6982 \\ 0.6481 & 0.4810 & 0.3418 & 0.0732 & 0.7929 & 0.5885 & 0.0183 \\ 0.2012 & 0.3512 & 0.4372 & 0.9987 & 0.8099 & 0.6641 & 0.7480 \\ 0.8487 & 0.1572 & 0.5956 & 0.7502 & 0.2663 & 0.6166 & 0.1145 \\ 0.0226 & 0.2921 & 0.4343 & 0.1222 & 0.4820 & 0.5759 & 0.8950 \\ 0.1056 & 0.1691 & 0.7920 & 0.1646 & 0.7928 & 0.3563 & 0.6546 \\ 0.1880 & 0.2237 & 0.6156 & 0.4251 & 0.2575 & 0.9078 & 0.3459 \\ 0.3610 & 0.6714 & 0.2822 & 0.7732 & 0.2139 & 0.1979 & 0.3824 \end{bmatrix}$
矩陣 $B$	$B = [0.4549 \quad 0.5666 \quad 0.6156 \quad 0.9498 \quad 0.8099 \quad 0.6818 \quad 0.7819]$

解：此模糊關係方程式的極大解與極小解分別為

$$\text{MaxV} = [0.5666 \quad 0.5666 \quad 0.5666 \quad 0.4549 \quad 0.9498 \\ 0.4549 \quad 0.7819 \quad 0.6156 \quad 0.6818 \quad 0.5666]$$

$$\text{MinV} = [0 \quad 0 \quad 0.5666 \quad 0 \quad 0.9498 \quad 0 \quad 0.7819 \quad 0 \quad 0.6818 \quad 0]$$

本範例共有六個變數需要進行編碼，所以是非常複雜的計算，表5-14與5-15分別為本研究之結果與文獻之結果

表 5-14 本研究 Test Problem 5 之結果

世代	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	適應度
1	0.3196	0.3373	0.5666	0.4256	0.9498	0.4247	0.7819	0.4796	0.6818	0.1124	90.570001400046...
2	0.4996	0.5184	0.5666	0.4545	0.9498	0.4411	0.7819	0.5988	0.6818	0.5417	75.033088132559...
3	0.5079	0.4564	0.5666	0.4531	0.9498	0.3695	0.7819	0.3948	0.6818	0.1191	88.287737553027...
4	0.5361	0.4015	0.5666	0.4207	0.9498	0.4095	0.7819	0.5458	0.6818	0.1074	83.434987400641...
5	0.5616	0.5156	0.5666	0.3606	0.9498	0.4505	0.7819	0.6132	0.6818	0.545	77.214481394516...
6	0.0349	0.422	0.5666	0.426	0.9498	0.4411	0.7819	0.5945	0.6818	0.427	92.064949476436...
7	0.4963	0.4104	0.5666	0.446	0.9498	0.3393	0.7819	0.4345	0.6818	0.2365	90.811579875514...
8	0.5217	0.4952	0.5666	0.4251	0.9498	0.4304	0.7819	0.1571	0.6818	0.5007	89.667323377272...
9	0.3362	0.3373	0.5666	0.4215	0.9498	0.4469	0.7819	0.491	0.6818	0.5406	86.352792633383...
10	0.0753	0.2664	0.5666	0.4042	0.9498	0.4478	0.7819	0.4429	0.6818	0.5555	93.906143491320...
11	0.113	0.021	0.5666	0.3971	0.9498	0.4184	0.7819	0.5446	0.6818	0.3223	94.6777653913197
12	0.5223	0.4021	0.5666	0.3508	0.9498	0.4229	0.7819	0.4453	0.6818	0.1379	89.264508518407...
13	0.5345	0.3157	0.5666	0.4095	0.9498	0.4527	0.7819	0.4405	0.6818	0.2415	85.111833328355...
14	0.4043	0.3683	0.5666	0.4202	0.9498	0.3971	0.7819	0.5434	0.6818	0.339	87.6095406766861
15	0.5572	0.5356	0.5666	0.3642	0.9498	0.3998	0.7819	0.5512	0.6818	0.2775	83.151509489907...
16	0.5029	0.545	0.5666	0.4487	0.9498	0.3717	0.7819	0.4465	0.6818	0.4193	84.961050848869...
17	0.35	0.2614	0.5666	0.438	0.9498	0.4291	0.7819	0.4543	0.6818	0.4841	88.456388891644...
18	0.4564	0.5084	0.5666	0.3397	0.9498	0.4264	0.7819	0.5368	0.6818	0.3772	87.240887303627...
19	0.4564	0.5273	0.5666	0.4393	0.9498	0.3998	0.7819	0.4898	0.6818	0.4065	84.2911241250211
20	0.3583	0.3766	0.5666	0.454	0.9498	0.3202	0.7819	0.6048	0.6818	0.2803	93.065274815878...
21	0.3284	0.4592	0.5666	0.4251	0.9498	0.4531	0.7819	0.5001	0.6818	0.509	85.6686428458648
22	0.5611	0.452	0.5666	0.3219	0.9498	0.4371	0.7819	0.2606	0.6818	0.2038	92.667361690117...

資料來源：本研究整理

表 5-15 文獻 Test Problem 5 之結果

GAOFR's performance on Test Problem 5

Generation	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$f$
1	0.5666	0.5666	0.5666	0.4549	0.9498	0.4549	0.7819	0.6156	0.6818	0.5666	70.154354
2	0.5666	0.5666	0.496589	0.4549	0.9498	0.4549	0.7819	0.6156	0.6818	0.5666	69.578548
1507	0.564570	0.462194	0.438268	0.454031	0.9498	0.4549	0.7819	0.606251	0.6818	0.5666	69.554767
1965	0.5666	0.5666	0.500213	0.4549	0.9498	0.4549	0.7819	0.6156	0.6818	0.513498	69.545947
2208	0.5666	0.502709	0.4549	0.4549	0.9498	0.4549	0.7819	0.6156	0.6818	0.5660	69.192730
2855	0.5666	0.4975123	0.0447041	0.4549	0.9498	0.4549	0.7819	0.6156	0.6818	0.5660	69.189349
3177	0.5666	0.502065	0.4549	0.4549	0.9498	0.4549	0.7819	0.6156	0.6818	0.513496	69.162412
3896	0.5666	0.497526	0.447064	0.4549	0.9498	0.4549	0.7819	0.6156	0.6818	0.513511	69.159033
3971	0.5666	0.497526	0.447064	0.4549	0.9498	0.4549	0.7819	0.6156	0.6818	0.513510	69.159032

本研究認為只有  $x_3$ 、 $x_5$ 、 $x_7$  及  $x_9$  四個參數是固定不會變動，但是從文獻上的結果

顯示其認定  $x_1$ 、 $x_4$ 、 $x_5$ 、 $x_6$ 、 $x_7$ 、 $x_8$  及  $x_9$  七個參數是固定不會變動，且當中這些應該是固定不動的地方仍有一些數值有所更動，見表5-15中紅色圈。其他三個應該要編碼有所變動的變數也有點不合理，見表5-15中紫色框。所以本研究認為文獻於此範例的模糊關係方程式之極小解是有問題的，因為本研究解出之極小解  $[0 \ 0 \ 0.5666 \ 0 \ 0.9498 \ 0 \ 0.7819 \ 0 \ 0.6818 \ 0]$  已經可以符合模糊關係方程式  $X \circ R = B$ ，那麼文獻之極小解又比本研究之極小解大，足以證明文獻上的極小解不是真的極小解。即使文獻上的適應度皆比本研究的結果小，但是在錯誤的範圍找到錯誤的答案，在意義上是不佳的。

### 例5-11

測試函數6之相關數值如表5-16所示

表 5-16 Test Problem 6 之數據

測試函數	$f(x) = \sum_{k=1}^5 [100(x_{k+1} - x_k^2)^2 + (1 - x_k)^2]$
矩陣 $R$	$R = \begin{bmatrix} 0.3765 & 0.6539 & 0.6423 & 0.5858 \\ 0.8595 & 0.6044 & 0.5603 & 0.5426 \\ 0.7939 & 0.2591 & 0.3769 & 0.4836 \\ 0.6095 & 0.0260 & 0.1207 & 0.8866 \\ 0.3318 & 0.9870 & 0.4491 & 0.0816 \\ 0.6240 & 0.2077 & 0.1377 & 0.3626 \end{bmatrix}$
矩陣 $B$	$B = [0.6254 \ 0.6198 \ 0.6010 \ 0.8521]$

解：此模糊關係方程式的極大解與極小解分別為

$$\text{Max}V = [0.6010 \ 0.6254 \ 0.6254 \ 0.8521 \ 0.6198 \ 1]$$

$$\text{Min}V_1 = [0.6010 \ 0.6254 \ 0 \ 0.8521 \ 0.6198 \ 0]$$

$$\text{Min}V_2 = [0.6010 \ 0 \ 0.6254 \ 0.8521 \ 0.6198 \ 0]$$

此模糊關係方程式有並存現象，表5-17與5-18分別為本研究之結果與文獻之結果

表 5-17 本研究 Test Problem 6 之結果

世代	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	適應度
	1	2	3	4	5	6	1
1	0.601	0.6126	0.6254	0.8521	0.6198	0.3548	35.65782258952073
2	0.601	0.6254	0.6254	0.8521	0.6198	0.3851	35.45416227979506
3	0.601	0.5936	0.6254	0.8521	0.6198	0.3636	35.90817091274201
4	0.601	0.6223	0.6254	0.8521	0.6198	0.3959	35.48972942351071
5	0.601	0.6034	0.6254	0.8521	0.6198	0.348	35.82754706951965
6	0.601	0.6254	0.6254	0.8521	0.6198	0.4242	35.61478822006045
7	0.601	0.6144	0.6254	0.8521	0.6198	0.3666	35.58184840380582
8	0.601	0.5844	0.6254	0.8521	0.6198	0.3412	36.24223514289839
9	0.601	0.6126	0.6254	0.8521	0.6198	0.3548	35.65782258952073
10	0.601	0.6217	0.6254	0.8521	0.6198	0.4018	35.51178725066368
11	0.601	0.5655	0.6254	0.8521	0.6198	0.3754	36.555534289101004
12	0.601	0.6254	0.6211	0.8521	0.6198	0.3627	35.79944958641901
13	0.601	0.6254	0.6254	0.8521	0.6198	0.3646	35.49223829590545
14	0.601	0.6101	0.6254	0.8521	0.6198	0.3754	35.609667922233356
15	0.601	0.6064	0.6254	0.8521	0.6198	0.3734	35.6630280260594
16	0.601	0.623	0.6254	0.8521	0.6198	0.3803	35.47277228813216
17	0.601	0.6254	0.6168	0.8521	0.6198	0.3939	36.06795809004105
18	0.601	0.6034	0.6254	0.8521	0.6198	0.3519	35.80080148527306
19	0.601	0.6101	0.6254	0.8521	0.6198	0.35	35.71891973654906
20	0.601	0.6254	0.6254	0.8521	0.6198	0.4673	36.144644225105694
21	0.601	0.6107	0.6254	0.8521	0.6198	0.3304	35.883131486644096
22	0.601	0.6254	0.6254	0.8521	0.6198	0.4301	35.66525500664352

資料來源：本研究整理

表 5-18 文獻 Test Problem 6 之結果

GAOFRC's performance on Test Problem 6

Generation	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$f$
1	0.6010	0.6198	0.6254	0.8521	0.6198	0.3835	35.4972
286	0.6010	0.6216	0.6254	0.8521	0.6198	0.3840	35.4819
1886	0.6010	0.6244	0.6254	0.8521	0.6198	0.3904	35.4647

本研究於此範例中也是找出兩組並存情況皆可能出現於遺傳過程中，較文獻上只能得到一種情況來的優秀。

最後比較文獻上提到另一種篇文獻的方法「Procedure B」，將本研究所得之結果與這兩種方法整理成表5-19

表 5-19 本研究結果與 GAOFRC 和 Procedure B 比較

方法 \ 樣本	P1	P2	P3	P4	P5	P6
本研究	4.5553	1766.2846	-0.5276	0.0000	75.0331	35.4542
GAOFRC	23.9835	1766.2936	-0.5246	0.0000	69.1590	35.4647
Procedure B	23.9712	1766.2846	-0.5240	0.0000	69.1510	35.4587

資料來源：本研究整理

表5-19裡面的數字代表著代價函數，因為文獻[4]上是要求最小值解，因此f的數值越小越好。GAOFRC是文獻[4]稱自己的方法，而Procedure B是文獻[4]中提到所比較的方法，於此處本研究將兩種方法最好的代價函數一併提出來整理成表5-19。

表5-20為本研究與文獻上的遺傳演算法使用的參數與定義。

表 5-20 本研究與 GAOFRC 的遺傳參數定義

參數 方法 定義	本研究	GAOFRC
編碼方式	二進位編碼	浮點編碼
編碼長度	10位元	小數點四位
編碼位置	上下界不一致	上下界不一致
族群大小	256*並存數	未知
交配率	0.8	幾何排名法
交配點	隨機變動	未使用交配點方式
選種	排名法	排名法
代價函數	文獻給定	文獻給定
突變率	初始0.01，最後0.05	未使用突變機率
突變點	由MSB移往LSB	未使用突變點方式
停止條件	滿足設定世代	未知
註解	先交配，再突變	先突變，再交配

資料來源：本研究整理