

數學日記之管窺

孫旭花

香港中文大學課程與教學系博士生

一、緣起

筆者有過片斷的中學教書的經驗，曾經體會最深的是作業，發現作業較難獲得學生“學”（主要是解題情況）的資訊，學生抄作業並不少見，因為人多（一個班 50 多人），作業也只是打著“×”和“√”，對錯的原因很難弄清楚，深感交流越來越流於形式，嘗試在數學作業以外，拓寬交流的廣度，深度，信度的其他載體或者形式——書信，基於這個目的，我嘗試：只要有話和老師說，有問題問，就可以寫個“字條”給老師，我在課室掛了個信箱，定時收看。起初收到的“字條”多是提意見的，例如，“能否用粵語講課”，“能否講課大聲點”，多數問問題的。當時的總體體會最深的是，和同學的感情不斷升溫，後來也把意見收集起來，適當回饋，課堂表揚問題提得好的同學，表揚意見和建議提得好的同學，被表揚的同學，均有更好的表現，問題提得越勤，意見和建議更合理，我感到同學和我心貼得很緊，雖然最初還後悔自找麻煩，但後來使我對教學和學生的認識越來越深，也就欲罷不能，我對同學瞭解更深，教學改進也貼近“源頭”，同學也進步很快，課堂也仿佛注入了特別的活力，看對自己教學的“回饋字條”活動頗深體會。

後來也發現美國課堂也有類似數學交流的媒介（Stewart & Chance, 1995；Miller, 1992），名稱有時稱為數學日記（mathematics journal）有時稱為數學寫作（mathematics writing），曾撰文介紹（見孫旭花，1997，）。類似研究

發現數學寫作的有效性在於增加回饋管道，補救和輔助教學（劉祥通、黃國勳，2005），對學生認知和對教師教學方面均有正面效能（林姿飴、楊德清，2005）。

本文的數學日記和劉祥通、黃國勳（2005）所介紹的數學寫作活動的類型與實例（解釋寫作、偵錯寫作、編擬文字題寫作、總結式寫作）稍有不同，這裏介紹的“另一種版本”的數學寫作——探詢型數學日記和反思型數學日記，是筆者借鑒美國數學教育中的數學日記及其操作，嘗試適合中國國情的數學日記實踐探索，更為“本土化”的兩類數學寫作。根據“內容”側重點，分為探詢型數學日記和反思型數學日記兩個類型，因為試驗¹的時間短（1個學期），加上沒有經驗借鑒，我們僅僅獲得操作兩個類型數學日記的幾點膚淺體會，以下分別介紹。

二、“反思型數學日記”之管窺

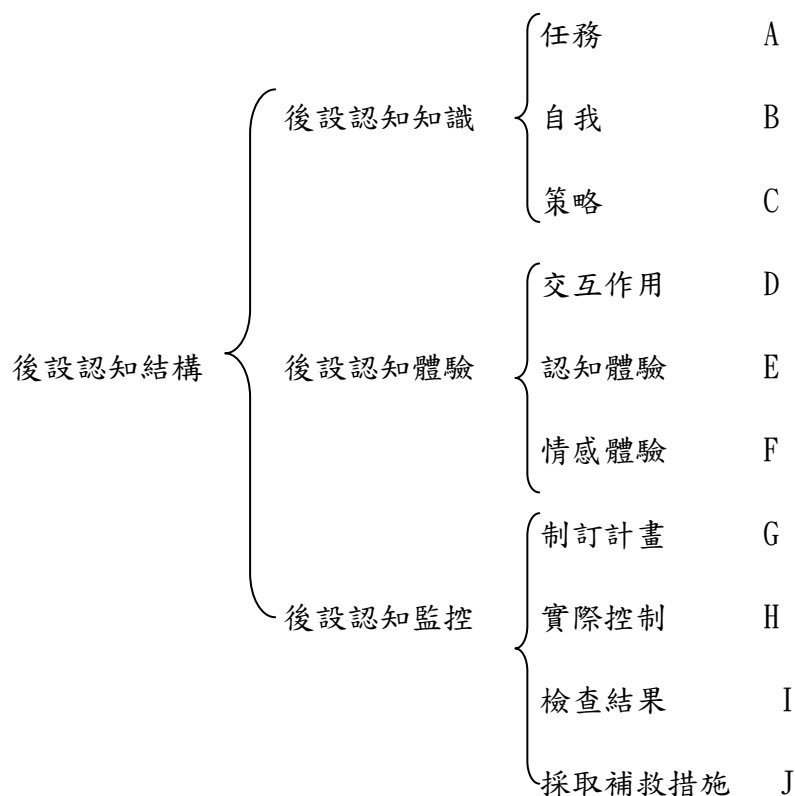
“反思型數學日記”是為提高學生對數學學習計畫、檢查、補救的自我反思目的數學日記。為達到加強學生後設認知的目的。比林姿飴、楊德清（2005）數學寫作更具體一些，更針對後設認知的目的。

1、“反思型數學日記”實施的理論依據

“反思型數學日記”是為提高學生對數學學習計畫、檢查、補救的自我反思實施的數學日記的形式。

為達到加強學生後設認知結構的目的，“反思型數學日記”同時兼顧後設認知結構的後設認知知識、後設認知體驗、後設認知監控的各個方面（林崇德和辛濤，1996）。即：

¹被試選自於廣州三十四中初二（1）班，（5）班，共32個同學



2、 “反思型數學日記” 的內容設計

“反思型數學日記” 的內容設計與具體操作步驟如下

(1) 訓練學生對整節課的反思習慣。

課堂留下 5 分鐘，要求同學合上課本，對整節課內容進行簡要小結，小結內容包括：

1. 這節課我學到什麼，總結為一句話（包含後設認知結構 B，E，I）
2. 這節課還有什麼不懂，哪里更感興趣？（包含後設認知結構 A，G，H）
3. 不懂的地方何時，如何弄清楚（包含後設認知結構 G，H，J）
4. 你對老師的建議（師生交流內容，對老師回饋）

該設計的目標是使學生越認知層面，對本節自我數學認知的再認知。使其每節課都習慣於反思，檢查自我數學認知結構，清楚進一步學習任務，自行進行學習計畫，補救薄弱環節。並最終形成自我管理、自我教育的學習策略。即逐步形成反思--檢查--計畫--補救--再反思--的學習習慣。

(2) 培養對“錯題” “不會題”的反思與領悟

“錯題”、“不會題”，往往是認知結構的斷鏈處，影響後繼課的學習，又是提高後設認知能力的最佳契機。我們要求在“錯題”、“不會題”旁寫出自己思路被卡的情況並分析成因，及從中得到的經驗和體會，這既是對解題思路補充的反思，是後設認知的落實，又是幫助學生裝跨越學習高原的一個視窗，對自我思維進行“思維”，實施思維昇華的“機制”。具體分三步進行：

1、怎樣走進“死胡同”（包含後設認知結構 A, B, E, I）

讓學生回顧自己的思路方法，推敲每步的邏輯依據。

2、為什麼會走進“死胡同”（包含後設認知結構 C, E, F, G）

讓學生分析走進“死胡同”原因

3、領悟了什麼（包含後設認知結構 D, H, G）

思路對比，豁然貫通某個關節點，達到領悟階級，跨越學習高原。

該設計的目的是讓學生反思自我思維癥結，認知缺陷，瞭解自我認知體驗，自我認知監控，總結自我思維經驗。

(3) 培養學生對每一章的總結反思習慣

設計如下：

1. 列出本章的知識網路圖（包含後設認知結構 A）

2. 把本章做錯的作業，練習，測試題小結（包含後設認知結構 B、G、I、H）
3. 針對本章自己的錯題，出一份試題解答（包含後設認知結構 C、H、J）
4. 制定進一步復習的計畫（包含後設認知結構 G）

本設計讓學生在學全一章後，在自我數學認知建構中瞭解自我數學認知結構，瞭解自我數學認知結構的薄弱點（即斷鏈處），自我計畫再建構，在出題，解題，思維互逆過程的思維思路連通中，“把握”自我數學認知結構的建構，在思維元形成“群”狀結構的思維中，對自我思維進行再思維。

(4) 自我學習策略的培養

設計如下（每週一次）：

1. 你認為目前學習方法是否有效？為什麼？（包含後設認知結構 B, C, E, I）
2. 計畫是否清楚？（包含後設認知結構 D, E, H）
3. 如何改變？（包含後設認知結構 C, H, J）
4. 如何檢查計畫，何時檢查？（包含後設認知結構 C, H, I, J）

該設計是促進學生對自我學習方法的反思，學習過程學習結果再認識，總結穩定自我學習風格，清楚進一步學習任務與策略，即瞭解自我學習策略的局限性和有效性，即對自我學習的再認知。

3、初步發現

我們發現反思型數學日記的小實驗效果非常明顯（見孫旭花，2002）。實施反思型數學日記實驗組與對照組的差異十分顯著，實驗組幾何比代數差異更為顯

著，（因初二代數學學習需要更多的基礎知識支援），而幾何幾乎是立竿見影。實驗組自我監視水準比對照組有所提高，更有“自知之明”，對自我學習更有自我意識。（實驗仍存在一定的局限性。例被試偏少，被試一般為實習生的輔導生，實驗時間短短6周）。

我的學生（師範生）“反思型數學日記”的訓練推廣到家教輔導，事實證明更有效，例某個案例，廣州南武中學初三學生，經過一年的“反思型數學日記”的訓練，使其奇跡般突破平時成績極限（80分左右），以中考數學128分，考入省實驗中學。（其他各科均有不同程度的進步）。當然“反思型數學日記”需要大量、更細緻的研究。

探詢型數學日記也有特別之處，下麵介紹操作探詢型數學日記的幾點體會。

三、「探詢型數學日記」之管窺

這裏“數學日記”（mathematics journal）是指讓學生以日記的形式，記下他們自己對每次數學教學內容理解，評價及意見包括自己在數學活動中的真實心態和想法。探詢型數學日記則是針對“探詢”（Inquiry），是通過讓學生提出數學問題，或對數學教學內容、教學方式的探詢，培養數學問題意識，整合數學教與學矛盾的數學日記。

1、探詢型數學日記內容類別及基本目的

內容類別	設計的基本目的
提出數學問題	提供學“問”的機制
教學方式的探詢	整合數學教與學矛盾的窗口
教學內容的探詢	提供認知、創新的突破口

探詢型數學日記具體操作如下：每次課後作業的附錄，分三個欄目寫感受。包括根據學習內容，提出有價值的問題，對數學教學內容、教學方式的探詢和建議，我們主要以自願的形式參加（主要為了避免學生應付了事）。

探詢型數學日記		
根據這節課所學，你能否提出有價值的問題？	你對這節課所學數學內容的疑問？為什麼？	你是否喜歡這節課，為什麼？你對教學方法的疑問和建議？

以下是我們獲得的初步體會。

2、初步體會：

(1) “探詢型數學日記”中的“深層資訊”

教師通過“探詢型數學日記”，更容易發現學生數學認知結構“斷鏈處”，從而通過解疑使之彌補。例某內向的後進生在探詢型數學日記中提出“ $a^2+2ab+b^2$ 有個公因數 2，原式可分解為 $2(a+ab+b)$ ”，“ (-2) 加 (-4) 負負得正應等於正 6 而不是負 6”等“怪”問題，從而暴露他認知結構中“指數、係數不分”“乘法法則用到加法中”這一平時作業難以發現的問題（的確這些錯誤，遠出乎我的意料，使我看見在課堂和作業所“看不見的東西”！）。

的確，數學解題是盲目、無目標，可以超越理解與意義建構，湊出看似合理答案的過程，“結構的”“系統的”“整體的”基於本土文化的數學態度、價值觀、

思維範式、問題解決策略、自我調適手段的數學意義的觀念系統，而教學卻常常忽視“源頭”。

儘管作業也可同樣獲得這些學生“學”（主要是解題情況）的資訊，但因為作業極少包含學生的解釋，教師容易發現答案的對錯，但是對錯背後複雜的原因很難弄清楚，而這又恰恰是教師專業素養最重要的一環，無疑“對症下藥”，對學生理解的洞察，是教學設計的基礎，教學經驗和教學知識積累的重要環節，然而反思教師的日常教學，除了作業和考試外，教師又有多少機會，深入瞭解學生“原汁原味”的數學思考，探詢型數學日記無疑提供這一教師專業發展的契機。

概括而言，“探詢型數學日記”以下四方面的收穫。1、更深層地理解學生意義觀念體系背景和第一手經驗。2、捕捉自己尚未意識到的資料。3、捕捉學生尚未意識到的資訊。4、瞭解學生數學建構的主觀過程，再現學生看待數學，數學思維的全部視角和方式。任何數學行為表面上是單獨的、分離的，但事實上，任何數學行動都是一個行動系統中元素，任何行動發生在一定處境之下，受觀念系統的支配，隨自己數學需要傾向（need-disposition）而發生結構變化，是各種數學行為的“整合性組織”。從這個角度，無疑“探詢型數學日記”提供較比作業“深層”的資訊空間。

(2) 學生對“探詢型數學日記的點評”的洞察：先“自我評價”，後“任務評價”。

學生通過“探詢型數學日記的點評”，對自我重新評價，進一步激發對數學的興趣，自信心的提升。

例如，某學生在學完二等分線段，即作垂直平分線，及四等分線段後在探詢型數學日記中，提出能否將任何線段三等分線段，筆者告訴他該問題在數學史上的價值，並指出這是個了不起的問題，該生興奮得落下眼淚。後來該生懷著巨大的興趣，探索三等分線段，並閱讀大量數學史資料，激發對數學史的興趣，我們發現這個學生特別感興趣幾何作圖問題。

我們發現學生面對數學問題，往往不是任務評價，而是自我評價。（學生面對“這是個了不起的問題”的評價語，對於數學而言，這似乎是多餘的廢話，但對於學生而言，這似乎是多麼正面的自我肯定！），數學學習過程不僅僅單純的認識過程，而是數學的意義與價值形成與凝聚的過程，是數學的情感體驗、發展過程，數學理解實現過程，學習自信心的不斷提升過程。或許這些是數學“雙基”以外對學生生命發展、人格形成更為重要的基礎，也是基礎教育應關注的基礎的“基礎”。

(3) 探詢型數學日記的後勁：學生的“問”，帶動教師“想”的“教學相長”空間

探詢型數學日記，很多時候，會收到學習困擾與迷思概念等資訊，教師對情緒方面的回饋意見需要更多的認同和鼓勵，迷思概念方面需要跟進瞭解學生的深入想法，從而澄清概念，同時這種深入訪談，也確實為教學相長提供發展空間。例如

某生在探詢型數學日記中提出， x^6-1 的因式分解結果和我的為什麼不同？

老師的解法：

$$\begin{aligned}x^6-1 &= (x^2)^3-1 \\ &= (x^2-1)(x^4+x^2+1) \\ &= (x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)\end{aligned}$$

學生的解法：

$$\begin{aligned}x^6-1 &= (x^3)^2-1 \\ &= (x^3+1)(x^3-1) \\ &= (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

經過師生共同研討，發現 x^4+x^2+1 通過添項 x^2 、再減去 x^2 可獲得與 $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ 一致的答案。師生共同發現了一個新的因式分解的方法，除了學生感到數學解題方法多樣與統一外，教師也拓寬了視野，達到教學相長的境界。

根據探詢型數學日記所發現的迷思概念，和錯誤思路，很自然為課堂改錯，糾錯提供最好的素材，“有的放矢”地彌補教學漏洞，有效提升教學效果提供可能。某種意義上，我們常常重視學生的發展，而忽視教師的發展，往往不能更遠的，以學生的發展帶動教師發展，進一步以教師的發展帶動學生發展互動迴圈空間，某種意義上，這只是個教育理想，但探詢型數學日記也讓我們看到這個理想的現實性和可能性。

(4) 探詢型數學日記的情感效應：先“親其師”，後“信其道”。

某生在探詢型數學日記中寫道：數學課太枯燥無味，能否增加數學題比賽，課堂多些氣氛。我們根據這個建議，在練習時開展男女對比，小組競賽，筆者切身體會到這個建議調控課堂氣氛和課堂管理技巧有所參考價值。

很多時候，我們認為數學是理科，講道理，講邏輯，講演繹，講證明，忽視情感部分，而事實上，學生是人，不少學生先喜歡數學老師，才喜歡數學，先“親其師”，後“信其道”。而不是先喜歡數學，才喜歡數學老師，即所謂的 先“信其道”，後“親其師”。教學上，很多教師對學生無精打采，漠不關心，卻希望學生喜歡數學課的例子也不少見。

當然，對教師而言，探詢型數學日記無疑給自己添了很多批改閱讀的負擔，而且時時挑戰自己的教學和數學解題能力，某種意義上，實在是自找麻煩，筆者的經驗證實“探詢型數學日記”，不僅為學生也為教師自己，提供了探詢的視窗，不失為良策之一。

四、再反思

班級授課本是機械化社會的產物，教師工作被某種程度上的社會化和機械化也合乎其理，但是看到學生盲從，隨波逐流，不懂裝懂，有問題不問，有“書雲亦雲”“師雲亦雲”“人云亦云”的傾向，學生對數學知識很少“自己的理解”、“自己的思考”“自己的體驗”，才萌發“探詢型數學日記”的想法。後來慢慢發現原來我們還是可以不必坐等待斃！“數學日記”也還可以在機械化的流水線找到“人性化的切入點”，進一步發展出一種心靈期盼的默契，“數學日記”仍有其現實意義，慢慢發展出“親其師，信其道”的和諧，原來教與學都其內在的平衡。

一般說來，因材施教是教育成功的必有之路，而班級授課的最大弊端是難以因材施教，這裏我們看到，數學日記對班級授課與因材施教矛盾整合、教與學矛盾整合、認知與情感矛盾整合的提供一個可行的切入點，數學日記作為數學交流的工具、評價的工具、教學的工具、研究的工具，都有特別的視角，也必將成為數學教育文化的一股特別力量。

後記

本文特別寫給對數學教學失望的教師。我自己捫心自問，為什麼好希望寫出這篇文稿。其實這裏埋藏我一段重要的心路歷程，一段令我心好痛的一段經歷，

後來發現，這是所有的新入職，從事數學教學的教師，都可能會遇到的困惑：我滿腔熱情懷著一個夢，來到三尺講臺，面對改不完的作業，改不完的考卷，喧鬧的教室，快速行進的課程，我有說不出來的難過。和我理想中的教學，相差好遠，現實數學教學是的是的確確的流水線：初始我感到手足無措：快速行進備課，快速行進評改，我潛意識感到我失去了什麼？失去了什麼？我來不及想清楚，我只是機械地教，機械地改作業，心裏覺得有莫名的失落！教書曾是我一度的夢想，但我教了幾個月時，確實有夢“破碎”的感覺，覺得自己不是“靈魂的工程師”，不僅教不透“公式”，也更教不會解題，“學生不會就是不會”，我是起不了多少作用的“教書匠”，心裏感到很失敗，但數學日記使我又重燃教學“激情”，重新找回滿足感的地方，重新找回教與學都其內在的平衡的時刻，數學日記使我感到“學生是有靈有肉”的“小可愛”，有思想有熱情的“小精靈”。在教學上，不必害怕，不必驚慌，不要放棄，願與大家共勉。

參考文獻

- Stewart, C. & Chance, L (1995) Journal Writing and Professional Thinking Standards, *Mathematics Teacher*, 1995, Feb. p. 182—189。
- Miller L. D., (1992) Teacher Benefits from Using Impromptu Writing Prompts in Algebra Classes *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 23, No. 4 (Jul., 1992), pp. 329-340
- 孫旭花 (1997)。美國數學教育中的數學日記操作兩例。《數學教師》，1期，39—42頁。
- 孫旭花 (2000)。質疑，認知、創新的突破口。《數學教學》，2期，27頁—29頁。

台灣數學教師電子期刊 2006, 第六期

孫旭花、袁和妹、蒲建然和周振蜀（2002）。利用反思數學日記加強數學元認知結構實驗研究 刊於《評核與數學教育——數學課程全面檢討之後又如何？研討會跟進論文集》（黃毅英編）。

劉祥通、黃國勳（2005） 數學寫作活動的類型與實例- 台灣數學教師（電子）期刊創刊號

林姿飴、楊德清（2005）淺談數學寫作 台灣數學教師（電子）期刊創刊號

林崇德 辛濤（1996）智力的培養 杭州：浙江人民出版社 129 頁—134 頁

Email: sunxuhua@cuhk.edu.hk