

# 數學寫作活動的類型與實例

劉祥通<sup>1</sup> 黃國勳<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 國立嘉義大學數學教育所

<sup>2</sup> 嘉義縣南新國小

數學寫作是什麼，如何使數學寫作成為有意義？有那些類型？在實踐數學寫作，各類型的功能為何？為了幫助讀者了解上述問題，以下分成數學寫作的意義、數學寫作的類型與實例，以及結語等三項說明之。

## 壹、什麼是數學寫作？

近年來，美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM)出版的「數學課程與評鑑標準」(Curriculum and Evaluation Standards for Schools Mathematics, NCTM 1989)一書主張，數學教學應強調有意義的溝通，將數學寫作活動融入數學教學中可幫助學生釐清他們的想法，與加深他們既有的觀念。多位數學教育的學者 (Powell & Lopez, 1989; Miller, 1992; Morgan, 1998; Whitin & Whitin, 1998) 即倡導以寫作帶動學習(writing to learn)的數學學習法，將學習與寫作都看成建造意義的過程，在這個過程中使學習者把已知的知識與正在學習的知識連結起來 (Fulwiler, 1982)。

關於寫作，一般教育工作者直覺的反應是語文科的活動，何以能行之於數學科的教學活動呢？Azzolino (1990)強調：人類一直用寫作的活動來學習數學，數學家以寫作讓世人了解其想法，經由論文與期刊的發表呈現與其同道共享；而為了學生的學習與教師自己的教學，數學教師當然也必須透過課堂的筆記、教案的編寫與教科書的編撰來達成。由此可知，寫作的確在數學知識的溝通與傳播上佔有相當重要的地位。若以教與學的觀點來看數學寫作，教師批改寫作單時，正是與每位學生作數學語言的溝通，且是有意義的溝通。對於學生正確的數學概念可予以確認並回饋；對於錯誤的迷思概念則不僅可以偵測與察覺，且可以作為重新佈題、補救教學的依據。

Bell 和 Bell(1985)提倡以寫作鼓勵學生藉著重新閱讀與重新檢驗已有的數學概念以重整(reprocess)已有的想法。他們又強調閱讀只是解讀語言的線索，口述只是隨興而不能回顧(reviewing)的，而寫作卻是編碼(encoding)的活動，它提供情境(contexts)使學習與思考得以發生，與閱讀和口述相較，因此，寫作是比較有回顧與反思的活動。另外，寫作也是主動的學習過程，它能促進學生程序性與觀念性的了解；學生也往往在寫作的時候才發現自己在想什麼？學到了什麼？什麼是重要的？另外寫作也有助於學生組織與整理數學概念，並且在一些觀念中尋找關連 (Miller, 1991)。

總而言之，教學者可用寫作的方式作為輔助數學教學的溝通工具，使學習者在數學記錄簿(單)上解釋、省思、回顧、組織或聯結有關數學知識與經驗，以幫助學習者創塑數學意義的活動，此種活動稱之為「數學寫作活動」。數學寫作對於數學概念的學習，可以提供學生回顧、省思和整合所學的機會，促進數學概念的理解。同時也可作為教師與學生溝通數學知識的平台，有助於教師的教學。

## 貳、數學寫作的類型與實例

數學寫作有很多種類型，作者舉出四種在課室或家庭課業中較為實際的與可行的類型：解釋性寫作、偵錯式寫作、編擬文字題寫作與總結式寫作等，以下將分別說明各寫作類型的性質與功能，並舉例說明之：

### (一)解釋性寫作 (explanatory writing)

解釋性的寫作是為了讓學生回顧數學概念，組織已學過的數學知識，發現學到什麼？什麼是重要的？請學生解釋或說明的活動(Miller, 1992)。例如為什麼除法運算的除數不能是0?為什麼分數的分母不能為0?  $A \neq 0$  時，為什麼規定  $A^0$  ( $A$  的 0 次方) 等於 1? 或者也可以請學生用文字或者圖形來說明解題策略、想法和作法。以下呈現解釋性的佈題與學生的做法。

例 1：請小朋友估測學校操場的面積是多少公畝？

**麻辣問題二：**小朋友請你估估看我們學校操場大約是多少公畝嗎？

我的想法和作法：

操場中間的長方形裡都有綠色間隔，一個間隔大約1公尺，有52個，大約52公尺，寬是用腳步量，一個腳步大約24cm，走了150步，大約是36m，長52m，裡面的長方形面積大約是 $52 \times 36 = 1872m^2$ 。圓形的面積是半徑 $\times$ 半徑 $\times 3.14$ ，而36是直徑，所以18m是半徑， $18 \times 18 \times 3.14 = 1017.36$ ，大約是1017，再把長方形面積和圓面積加起來就是操場的面積了。

操場

$$52 \times 36 = 1872$$

$$36 \div 2 = 18$$

$$18 \times 18 \times 3.14 = 1017.36 \approx 1017$$

$$1872 + 1017 = 2889$$

$$2889m^2 \approx 29a$$

A = 29 a

學生寫作內容分析：他先將操場分為長方形和圓形二部分，長方形長度的計算是借用學校排隊時使用的綠色點記號，每個間隔是1公尺，共有52公尺。寬是以一個腳步的長度（24公分）來測量，共計150步，大約是36公尺。再以長乘以寬得到長方形面積。接著，再以寬的一半作為圓形的半徑（18公尺），算出圓形的面積。將二個部分的面積相加，並將單位換算就得到答案了。

例 2. 有一個蛋糕它有多大？怎樣描述才合理？（引自鄔瑞香<sup>1</sup>的教學案例—汪生，83.5.24）。

我的想法：

$$4 \times 4 = 16$$

$$16 \times 15 = 240 \rightarrow 1 \text{層} \times 15 \text{層} = \text{全部}$$

$$4 \times 4 \times 15 = 16 \times 15 = 240 \rightarrow \text{邊長} \times \text{邊長} \times \text{高} = 1 \text{層} \times 15 \text{層} = \text{全部}$$

答：240 立方公分

說明：  
 ① 先算出一層的答案，用邊長 $\times$ 邊長。  
 ② 知道到一層的答案後，因為有15層所以乘15

發現：  
 體是由長寬高組成的。

一、收集日期：88年5月1日

二、資料來源：

汪生的作法是：先量一量基本資料長、寬、高的長度，例如長（4公分）寬（4公分）高（15公分）。 $4 \times 4 = 16$ ； $16 \times 15 = 240$ （立方公分）。說明：先算出一層的答案，用邊長 $\times$ 邊長；知道一層的答案後，因為有15層，所以乘以15。最

<sup>1</sup> 鄔瑞香係已故的台北市東園國小教師，她是數學討論與數學日誌實踐者，作者曾分析她的學生的數學日誌（日誌是81年9月至83年6月實施），在她養病期間，作者到屏東訪談她當年佈題的情境與目的，訪談時間是在88年07年02日。

後發現：體積是由長、寬與高組成的。

基本上，體積不應只是長×寬×高的刻板印象，體積是物體佔有空間的量，體積的測量是堆疊活動數值化的結果。體積概念的啟蒙可用多種表徵方式加以描述，以獲得物體佔有空間大小的經驗，最後，才是用數值化的方式表示。鄔老師佈這一個题目的用意是：「探討學生對一個物體大小的初始想法？也看看有多少學童會利用課堂已學過的體積來描述。」由這位學生的寫作內容來看，確實可以幫助老師了解學生如何描述一個物體的大小，以及是否會利用已學過的數值化的「體積」來描述。

這樣的活動不同於紙筆評量活動，具有開放式評量的特質，它是沒有標準答案的，不同程度的學生會有不同層次的回答，教師可以根據評量的結果了解學童的認知層次，也可以判斷學生對課堂的了解與應用能力。另一方面，藉由數學寫作單的習作，學生也可以將心中解題的想法和作法，透過文字和圖形描述出來，如此不僅讓老師瞭解學生的算式過程，也能更進一步掌握學生解題的邏輯和所應用的數學知識是否正確。

## (二)偵錯式寫作 (probing writing)

這一類寫作活動的目的在增進學生判斷答案合理性的能力，並從解題結果檢視解題正確或錯誤的過程。學生由錯誤的解題結果，討論寫出正誤的理由，並校正錯誤或提出另外的解法。偵錯式寫作的形式通常是給一個有錯誤解答的题目，請學生察覺题目的錯誤，加以偵錯並將理由寫出。

例 1：

老師上課教的是：


△爸爸有500元，這些錢買了2個蛋糕，還剩20元，問一個蛋糕賣幾元？

用  $500 \div 2 = 250$  哪兒錯？為什麼？

我學會的是： $250 - 20 = 230$

全錯。要用  $(500 - 20) \div 2 = 480 \div 2 = 240$

我懂的是：要先把全部花的錢算出來，再除以2，就是一個蛋糕的錢了。



這個題目學生可能常犯的錯誤是往往按照题目中數字出現的順序，500、2

與 20 加以運算： $500 \div 2 = 250$ ， $250 - 20 = 230$ 。要能成功解題，學生必須從題目中察覺出問題的關鍵，從中找出各數字的關聯性，之後才可以正確的將算式列出。從此學生的寫作內容可以看出他先從 500 中扣掉剩餘的錢，以求出花掉的錢，再除以 2 來求出「單價」。也就是說，他已能注意到題目中錯誤的癥結，因此他能夠重新省視題目，先算出剩下的錢再求出單價而成功解題。

例 2：請見下述的麻辣問題

**麻辣問題：**

小朋友你已經學完了小數減法這個單元，你知道下面的算式哪裡錯了嗎？

$$\begin{array}{r} 0.456 \\ - 0.23 \\ \hline 0.433 \end{array}$$

**我的想法：《請不要說是小數點沒有對齊喔！》**

$0.456 = 456$  個  $0.001$

$0.23 = 230$

$0.230 = 230$  個  $0.001$

所以應該是

$$\begin{array}{r} 0.456 \\ - 0.230 \\ \hline 0.226 \end{array}$$

$\begin{array}{r} 0.456 \\ - 0.23 \\ \hline 0.433 \end{array}$  的  $0.23$  應該是寫  $0.023$  才是真正正確的直式。

如果  $0.456$

$$\begin{array}{r} 0.456 \\ - 0.23 \\ \hline 0.433 \end{array}$$

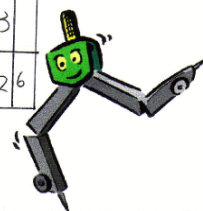
的言舌， $0.456$  是 456 個  $0.001$  原本  $0.23 = 0.230$ ， $0.230 = 230$  個  $0.001$ ， $0.23$  就變成 23 個  $0.001$ ， $230$  個  $0.001$  和 23 個  $0.001$  可是有很大的不同。

我們也可用定位板證明  $\begin{array}{r} 0.456 \\ - 0.23 \\ \hline 0.433 \end{array}$  的錯，

一個的  $0.23$  是 還要小 另一個  $0.23$  卻是比  $0.23$  還大 而且比  $0.23$  還小的話 應該是  $0.023$  對 小數點 是在個位後面的！

個	位	十	分	位
0	4	5	6	
-	0	2	3	
0	4	3	3	

個	位	十	分	位
0	4	5	6	
0	2	3		
0	2	2	6	



提供這個题目的用意是：部分學生在做小數加減計算時，出現了「小數整數化」的問題。整數的位值是由個位開始逐漸向左進位，所以整數加減法的計算必須從最右邊的數字對齊，如此個位才會對個位，十位對十位。但是小數的加減法計算必須是將小數點對齊，它的位值才正確。為了要讓學生釐清這個概念，避免再犯相同的錯誤，因此透過這個寫作單，提供機會給學生找出這個算式錯誤的地方。以上學生寫作的原案顯示出這個學生小數位值的概念相當清楚，他甚至能夠以二種理由來指出這個直式算式錯誤的地方：首先，他寫出 0.456 是代表有 456 個 0.001，0.23 是代表有 230 個 0.001，所以應該是要將小數點對齊，正確的答案

應該是 0.226 才是。最後，他再以定位板與來證明原來題目錯誤的地方 (0.23 比 0.1 還小了)，認為小數點是應該點在個位後面的。

由以上的實例可以看出，偵錯式寫作能提供學生判斷答案是否合理的機會，學生從檢視解題正確或錯誤的過程中，能釐清他的數學概念，也由寫出正誤的理由和校正錯誤或提出另外的解法中，進一步擴展了他的數學知識與能力。

### (三) 編擬文字題寫作 (generating story problems)

當老師認為課本中的數學式子抽象而不具體，教學目標卻要求學生精熟，唯恐學生只知其然卻不知所以然，這時老師可以要求學生編擬文字題，然後根據學生自行擬定的數學題目，進行解題討論、練習與校正。此種活動可以增進學生主動構思數學問題的能力，和理解數學符號所代表的意義。

編擬文字題寫作的應用：

例 1：

老師上課教的是：  
1. 用  $\square - 6 = 6$   
2. 用  $\square \times 5 + 10 = 50$  各編一個數學題目。

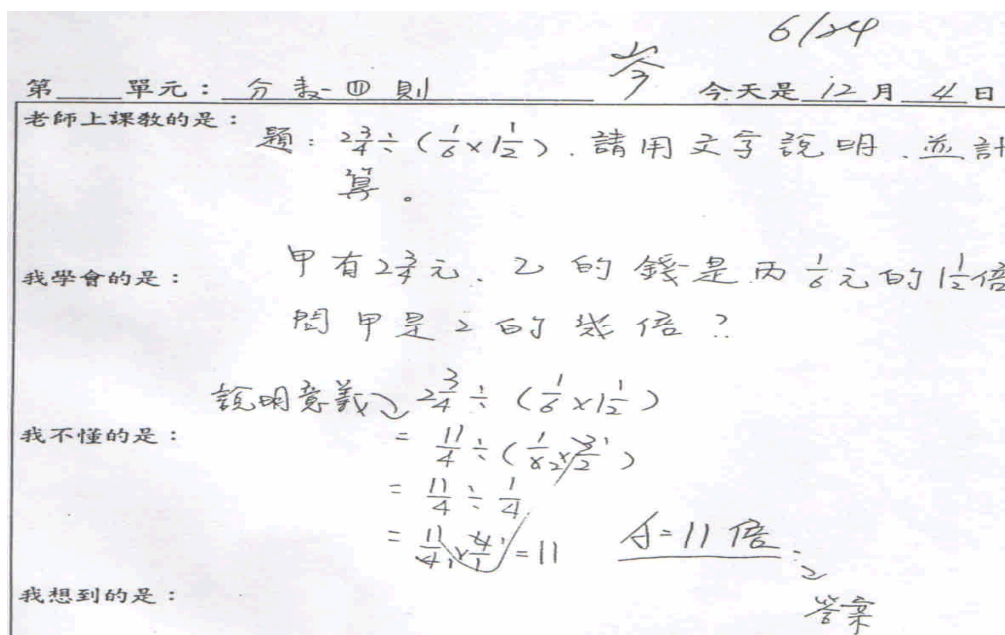
我學會的是：  
1. 弟弟有  $\square$  元，買糖果用去 6 元，還剩 6 元，問弟弟原本有多少元？

2. 哥哥有 50 元，比弟弟錢的 5 倍多 10 元，弟弟有多少錢？

我不懂的是：

這一個寫作活動是希望學生能瞭解「 $\square$ 」代表的是未知數，及其在與其他數學符號結合時，也能合理與正確的求出未知數。在此透過擬文字題的方式來檢驗學生是否理解「 $\square - 6 = 6$ 」和「 $\square \times 5 + 10 = 50$ 」這二個算式中  $\square$  所代表的意義。由上述學生的解題，吾人可以知道，學生能理解  $\square$  就是代表未知數 (弟弟的錢)，且能合理的賦予這二個算式意義。

例 2：請學生以  $2\frac{3}{4} \div (\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{2})$  這個計算式子寫出一個文字題。



期待學生正確的將  $2\frac{3}{4} \div (\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{2})$  這個分數算式編擬文字題，是相當具有挑戰性的。除了因為分數所代表的意思較為抽象難以理解之外，還必須能將這個算式分成二個部分： $\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{2}$ ，和  $2\frac{3}{4}$  除以  $(\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{2})$ ，而且能將這二個部分合理的連結。由學生的寫作內容來看，他確實掌握到這個算式的意義：先看算式的整體  $2\frac{3}{4}$  是  $(\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{2})$  的幾倍？(即甲是乙的幾倍？)再解決  $(\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{2})$  的問題(即乙是丙的  $1\frac{1}{2}$  倍)。他認為整個式子就是甲是乙的幾倍問題，甲有  $2\frac{3}{4}$  元，丙有  $\frac{1}{6}$  元，而乙就是  $\frac{1}{6}$  元  $\times 1\frac{1}{2}$ 。雖然  $\frac{1}{6}$  元在現實世界中不存在，但此生已將計算式子對應到數學問題上了，對於算式所代表的意義已能完全掌握，相信他編擬的文字題，是其他學生認識  $2\frac{3}{4} \div (\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{2})$  這個算式很好的素材。

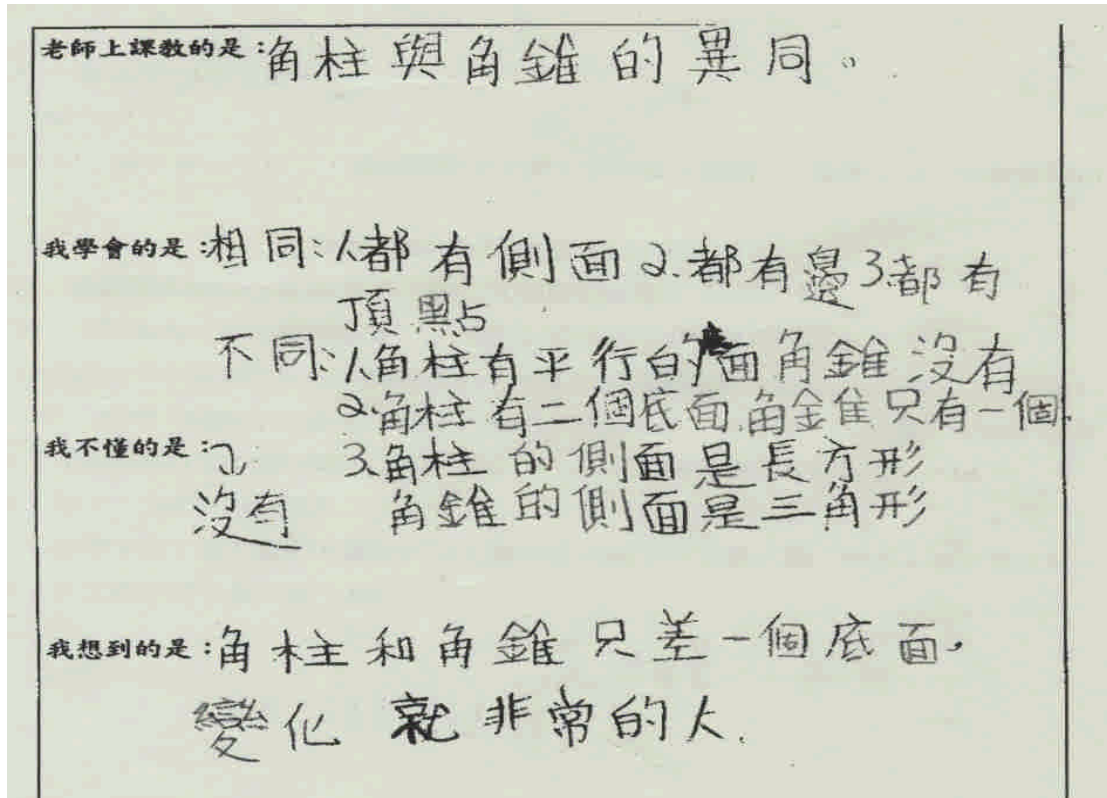
一般教學的型態通常都是老師先命題，再要求學生理解題意，然後算出答案，而編擬文字題的寫作形式恰與此型態相反。教師可以在教學告一段落後，讓學生進行編擬文字題的寫作活動，此種活動可以檢驗學生對於數學符號意義理解的情形，在編擬文字題的過程中，也可以提升構思數學問題的能力，和將生活經驗融入數學概念與解題的過程中。

#### (四) 總結式的寫作 (summarizing writing)

為了幫助學生能回顧教學活動所獲得的意義，促使學生產生陳述、分析與組


織，進而反思並抽象出數學概念。教學者在完成單元教學或數學活動，例如調查 (investigations)、實測 (measurements)、或造形 (make shapes) 等活動後，請學生寫下他們的發現、省思、或結語，將有助於數學概念的產生或後設認知能力的發展 (劉祥通和周立勳，1997)。

例 1：老師在「角柱與角錐」單元結束後，請學生寫下此單元的學習心得。



學生在寫作簿上寫下關於此單元的學習心得，藉由寫下角柱與角錐的相同與不同點，呈現出他在此單元所學的成果，從他的心得上可以看出，他已經能夠將此單元角柱與角錐的特性加以統整，因此，才能以「角柱與角錐的異同」作為學習心得的題目。

例 2：根據指定的圓，如何複製同樣大小的圓？(引自鄔瑞香的教學案例—牟生，81.11.25)

解題：我把圓摺成  然後打開找出圓心，再找出半徑，量看看幾公分。再拿出圓規，如果是 4 公分的話，一樣就在圓規上量出 4 公分，在紙上畫出來就好了(牟生，81.11.25)。

牟生的作法是依照銅板外圍所畫出來圖形的圓心，再將圓紙對摺兩次，兩個線條的交點就是圓心，從牟生上述寫作活動他先找出圓心，再找出半徑，然後

拿出圓規以此長度（4 公分）畫出相同大小的圓，顯示他已發現了「圓心」與「半徑」的關係，也知道如何複製相同的圓。

如果教師教「圓的單元」時只是藉著黑板上所畫的圖形來介紹圓心、圓周、直徑與半徑，這樣的教學當然是不夠具體的。鄔老師佈這一個題目的是在「圓」單元的教學告一段落後，希望學生懂得應用圓的概念，使教學活動更具體一些。也藉此提供學生統整圓的基本概念和總結學習成果的機會，進而作為診斷與評量之用。

### 參、結語

由前述所提供的實例來看，四種寫作活動類型各有不同的功能：「**解釋性寫作**」活動可以提供老師掌握學生數學概念的理解與否，甚至會發現意想不到的迷思概念。其次，這些迷思概念又可以作為設計「**偵錯式寫作**」的素材，老師將學生常見的錯誤解法列出，要求學生找「哪兒錯？」，並回答「為什麼？」，以避免學生又犯相同的錯誤，也給學生「除錯」的機會。再者，對學生來說，有些計算式子太繁雜可能不易聯想到用在什麼「問題情境」，此時「**編擬文字題寫作**」可以幫助學生將「計算式子」與「問題情境」做連結。此外，在教學活動或單元活動結束後，為了促進學生作反省性的思考以獲得數學概念，老師可以要求學生作「**總結式寫作**」活動，以驗收活動後的成果。

以數學寫作作為學習數學的機制，在「數學當作溝通（NCTM, 1989; 2000）」的呼籲聲中益顯重要。數學寫作活動的目的是要讓學生學得更紮實與獲得更豐富的知識，也是要让老師更能掌握學生的數學學習。因此教師在數學的教學實踐也應隨之調整—強調「數學的寫作」，以超越過去僅限於靜態單板的數學解題方式。

過去數學教育界一向強調「多做」數學題目，若數學寫作活動獲得重視與推廣，學生的數學學習會轉而「多省思」數學題目，如此更能透過數學的教學來提升學生的思考層次，與溝通表達的能力。

### 參考文獻

劉祥通和周立勳（1997）。數學寫作活動—國小數學教學的溝通工具。國立嘉義師範學院國民教育學報，3，頁 239-260。

劉祥通、鄔瑞香和黃瓊儀（2000）。從學生數與量部分的數學寫作分析一位國小

老師的數學佈題。教育研究資訊，8(4),頁 141-166。

- Azzolino, A. (1990). *Write as a tool for teaching mathematics: the sikenca revolution*. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching matematics in the 1990s* (pp.92-100). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
- Bell, E. S., & Bell, R. N. (1985). Writing and mathematics problem solving: arguments in favor of synthesis. *School science and mathematics*,85,210-221.
- Fulwiler, T. (1982). *Writing an act of cognition*. In C. W. Griffin (Ed.), *New direction for teaching and learning teaching writing in all disciplines* (pp.15-36). San Francisco: Jossey-Bass.
- Miller, L. D. (1992). Teacher benefits from using impromptu writing prompts in algebra classes. *Journal for research in mathematics education*, 23(4), 329-340.
- Miller, L.D. (1991). Writing to learn mathematics. *Mathematics Teacher*, 84(7), 516-521.
- Morgan, C. (1998). *Writing mathematically: The discourse of investigation*. London: Falmer Press.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards of school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Powell, A. B., & Lopez, J. A. (1989). *Writing as a vehicle to learn mathematics: A case study*. In P. Connolly, & T. Vilaridi (Eds.), *Writing to learn mathematics and science* (pp. 157-177) . New York: Teachers College Press.
- Whitin, D. J., & Whitin, P. E. (1998). *The “write” way to mathematical understanding*. In L. J. Morrow, & M. J. Kenny (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*. Reston, Virgin: National Council of Teachers of Mathematics.

通訊作者

劉祥通，國立嘉義大學數學教育研究所，liust@mail.ncyu.edu.tw