第四章　演算法之改良與應用

在2.12節已經介紹了幾種解模糊關係方程式之方法，也經由本研究加以整理並詳細介紹其過程，相信能更容易理解；原文書或是一些大陸書籍中只介紹其中一種解法，無法比較之各種方法的差別。本研究也將根據第二章提出之各種解模糊關係方程式中，擷取精華，改良曾煥雯教授之方法，並將演算法具體的用程式實現，亦將所找到的各種例題與本研究之方法進行驗證，證明本研究之方法可行。

另外在本研究探索模糊關係方程式之相關應用時，發現期刊上之「解最佳化問題與模糊關係方程式結合」中，遺傳演算法效率不高，故本章亦將提出改良的遺傳演算法，提昇效率。

4.1　特殊之模糊關係方程式探討

於文獻中有一題較為特殊的模糊關係方程式，矩陣R與B的值分別如下所示：

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.7\\ 0.2 & 0 & 0.6 & 0.8\\ 0.1 & 0.4 & 0.6 & 0.7\\ 0 & 0.3 & 0 & 1\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.7\end{bmatrix}$$

眾多之學者所提之方法皆未提到此特殊範例，僅曾煥雯教授與大陸書籍之鏈解法有提到。若使用 2.12 節介紹之六種解模糊關係方程式之方法，個別計算後，可分別得出以下整理之表 4-1

表 4-1 各種解模糊關係方程式方法與對應矩陣值

解模糊關係方程式方法	矩陣值
徐曹羅李簡化法	$R'' = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0.6 & & 0.2 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & \\ 0.7 & & & \end{bmatrix}$
表格法	$R_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$
George J.Klir 所提之方法	$g((1,1,1,1)) = (0.7,0,0,0)$ $g((1,1,1,2)) = (0.7,0.2,0,0)$ $\vdots$ $g((4,3,3,2)) = (0,0.2,0.6,0.7)$
曾煥雯教授所提之方法	$\overline{m} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$
駱樂與王文俊教授所提之方法	$M = \begin{bmatrix} \underline{(1,0.7)} & \underline{(1,0.6)} & \underline{(1,0.4)} & \underline{(1,0.2)} \\ \underline{(0.7,0.8)} & \underline{(0.7,0.6)} & (0.7,0) & \underline{(0.7,0.2)} \\ \underline{(1,0.7)} & \underline{(1,0.6)} & \underline{(1,0.4)} & (1,0.1) \\ \underline{(0.7,1)} & (0.7,0) & (0.7,0.3) & (0.7,0) \end{bmatrix}$
鏈解法	$\text{Chain} = 0.7/u_1 * (0.4/u_1 + 0.7/u_2) * (0.7/u_2 + 0.4/u_3) * (0.2/u_1 + 0.7/u_3) * (0.2/u_2 + 0.7/u_3) * (0.6/u_1 + 0.7/u_4) * (0.4/u_1 + 0.6/u_2 + 0.7/u_4) * (0.6/u_2 + 0.4/u_3 + 0.7/u_4) * (0.2/u_1 + 0.6/u_3 + 0.7/u_4) * (0.2/u_2 + 0.6/u_3 + 0.7/u_4)$

資料來源：本研究

利用鏈解法的既約鏈定義，此方法共有十組極小解分別如下所示：

$$\breve{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\breve{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\breve{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\breve{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\breve{x}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\breve{x}_6 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$
$$\breve{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$
$$\breve{x}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$
$$\breve{x}_9 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$
$$\breve{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$$

可將十組解分別代入式（2.62）的模糊關係方程式 $X \circ R = B$ 進行驗算，發覺都吻合式（2.62），但是否所有的解都是極小解呢？其實不然，除了 $\breve{x}_1$ 這組才是真正的極小解，其餘九組解都是圖 2-17 中落於點陣格（Lattice）間之數值，都比 $\breve{x}_1$ 的值來得大。而根據徐曹羅李簡化法與表格法之定義，最後的判別矩陣可以求得 48（$4 \times 3 \times 2 \times 2$）組解，然後再進行篩選的動作。不過這些方法沒有詳細說明是如何篩選，無法得知篩選完會剩下十組解，還是僅餘一組解，且這兩種方法都需要很繁瑣的記算過程，非常沒有效率。而 George J.Klir 所提之方法，再求 $g(\beta)$ 之步驟已經非常繁瑣了，何況是將 48 組可能的極小解求出之後再篩選，故此法效率也不佳。此題若依據定義，僅曾煥雯教授所提之方法及駱樂與王文俊教授所提之方法這兩種方法可以正確的求出極小解為 $\begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

本研究推測駱樂與王文俊教授所提之方法在此範例中有可能是恰巧求出正確的解，假設今將原矩陣 R 的第一列與第三列互換，矩陣 B 維持不變，可得

$$R' = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.6 & 0.7 \\ 0.2 & 0 & 0.6 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.7 \\ 0 & 0.3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

再利用兩種方法個別計算後，所得之判別矩陣如表 4-2 中所示：

表 4-2 模糊關係方程式方法與對應矩陣值

曾煥雯教授所提之方法	$\overline{m}=\begin{bmatrix}0 & 0.2 & 0.2 & 0\\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0\\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7\end{bmatrix}$
駱樂與王文俊教授所提之方法	$M=\begin{bmatrix}\underline{(1,0.7)} & \underline{(1,0.6)} & \underline{(1,0.4)} & (1,0.1)\\ \underline{(0.7,0.8)} & \underline{(0.7,0.6)} & (0.7,0) & \underline{(0.7,0.2)}\\ \underline{(1,0.7)} & \underline{(1,0.6)} & \underline{(1,0.4)} & \underline{(1,0.2)}\\ \underline{(0.7,1)} & (0.7,0) & (0.7,0.3) & (0.7,0)\end{bmatrix}$

資料來源：本研究

依照此兩種解模糊關係方程式定義求解，曾煥雯教授所提之方法將會解出正確的極小解為$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.7 & 0\end{bmatrix}$，但是駱樂與王文俊教授所提之方法將求得如下之樣式矩陣

$$M=\begin{bmatrix}\cancel{\underline{(1,0.7)}} & \cancel{\underline{(1,0.6)}} & \cancel{\underline{(1,0.4)}} & \cancel{(1,0.1)}\\ \underline{(0.7,0.8)} & \underline{(0.7,0.6)} & (0.7,0) & \underline{(0.7,0.2)}\\ \underline{(1,0.7)} & \underline{(1,0.6)} & \underline{(1,0.4)} & \underline{(1,0.2)}\\ \underline{(0.7,1)} & (0.7,0) & (0.7,0.3) & (0.7,0)\end{bmatrix}$$

本研究認為其方法將得出$\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0 & 0\end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix}0.7 & 0 & 0.2 & 0\end{bmatrix}$兩組解，雖然滿足式（2.62）的模糊關係方程式，但兩組解都不是極小解，也比曾煥雯教授所提之方法所解的值還要大。因此本研究決定採用曾煥雯教授所提之方法進行改良。

4.2　改良之解模糊關係方程式

本研究依據2.12.4節曾煥雯教授所提方法進行改良，其方法用於解模糊關係方程式有很好的效率，不似其他方法的繁瑣複雜，甚至解出其他非極小解之情

形；雖有一些小瑕疵，但經本研究所提之改良方式修正之後，就能更臻至完美。

本研究將原方法推廣至N維度皆可適用，並且將原先之定義表示為一套可以方便程式化的演算法，圖4-1即為本研究之演算法流程圖。

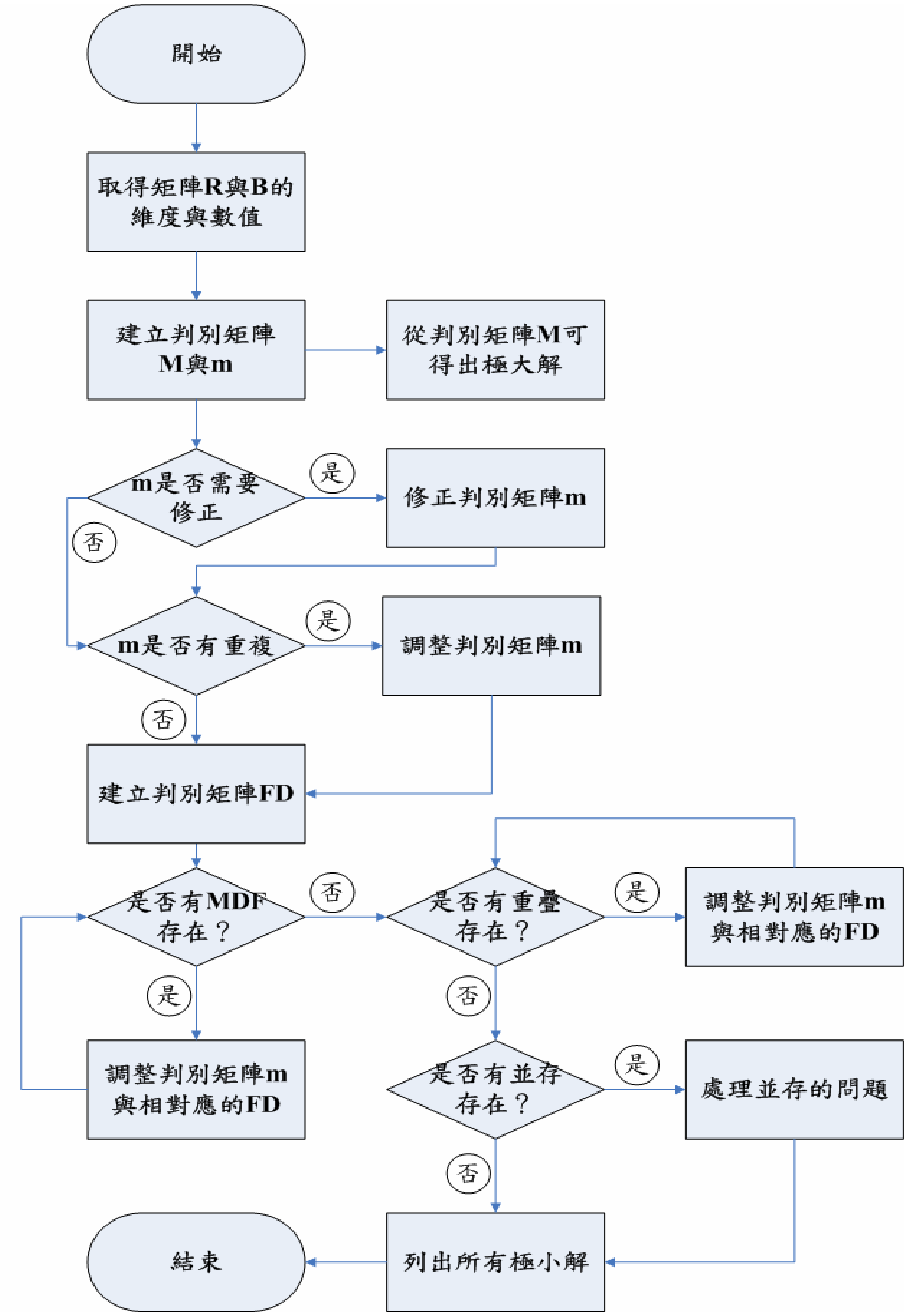

圖 4-1 本研究演算法流程圖

4.2.1 各步驟之說明

步驟一、取得矩陣的數值與維度

為了使模糊關係方程式的應用範圍更廣，不僅只是分析現有文獻上的範例，甚至可以分析手動輸入的資料，所以第一步必須取得矩陣的數值與維度。確定方程式有解。當$R \neq \phi$時，稱模糊關係方程式「有解」，反之稱為「無解」。為了方便程式的運算，需將輸入或是讀取的矩陣R及矩陣B進行轉置的動作，使得矩陣B是行向量（Column Vector）的形式，如式（4.1）所示：

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \end{bmatrix}^T \tag{4.1}$$

步驟二、建立判別矩陣

本研究的建立法則同曾煥雯教授對判別矩陣的定義。先定義變數解範圍，兩變數分別為$\mathbf{M}_{ij}$與$\mathbf{m}_{ij}$，其中$\mathbf{M}_{ij}$與$\mathbf{m}_{ij}$為極大解與極小解的可能解，數學式定義如下：

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{ij} = b_i, \mathbf{m}_{ij} = b_i, \text{ if } r_{ij} > b_i \\ \mathbf{M}_{ij} = 1, \ \mathbf{m}_{ij} = b_i, \text{ if } r_{ij} = b_i \\ \mathbf{M}_{ij} = 1, \ \mathbf{m}_{ij} = 0, \text{ if } r_{ij} < b_i \end{cases} \tag{4.2}$$

定義矩陣 $\mathbf{M}$ 為極大解的判別矩陣，$\mathbf{m}$ 為極小解的判別矩陣，而 $\mathbf{M}$ 與 $\mathbf{m}$ 分別為$\mathbf{M}_{ij}$與$\mathbf{m}_{ij}$的所有變數集合。

步驟三、得出極大解

極大解的通解是判別矩陣 $\mathbf{M}$ 中每一行的最小值。定義如下：

$$\mathrm{MaxV}_j = \min(\mathbf{M}_j), \ j = 1, 2, \cdots, m \tag{4.3}$$

而最後可得極大解的表示如下：

$$\mathrm{MaxV} = \begin{bmatrix} \mathrm{MaxV}_1 & \mathrm{MaxV}_2 & \cdots & \mathrm{MaxV}_m \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

步驟四、判別矩陣**m**是否需要修正

修正判別矩陣 **m**。檢查 **m** 中各元素值，如該行中的 $\mathbf{m}_{ij}$ 大於 MaxV_j 值時，此為矛盾現象，則該元素喪失決定極小解的自由度（The Degree of Freedom）。若需要修正，則於步驟五進行修正；若不需修正，則至步驟六。

步驟五、修正判別矩陣 **m**

當 $\mathbf{m}_{ij}$ 大於 MaxV_j 值時，必須將該值設為零。定義如下：

$$\begin{cases} \mathbf{m}_{ij} = 0 \quad , \text{ if } \ \mathbf{m}_{ij} > \mathrm{MaxV}_j \\ \mathbf{m}_{ij} = \mathbf{m}_{ij}, \text{ elsewise} \end{cases} \tag{4.5}$$

步驟六、判別矩陣**m**是否有重複

檢查判別矩陣 **m** 中各列元素值，若有兩列或兩列以上的元素值，數值、位置完全一樣時，認定此兩列是重複的。若有重複至步驟七進行調整，若沒有重複，則至步驟八。

步驟七、調整判別矩陣 **m**

當判別矩陣中有兩列或兩列以上發生重複時，則將較早出現的列留下來，而後面重複列的元素則全部歸為零。

步驟八、建立判別矩陣 **FD**

此時在判別矩陣**m**中，若有不為零的元素之處，則建立另一判別矩陣**FD**記錄該位置，定義表示式如下：

$$\begin{cases} \mathbf{FD}_{ij} = 1, \text{ if } \ \mathbf{m}_{ij} \neq 0 \\ \mathbf{FD}_{ij} = 0, \text{ elsewise} \end{cases} \tag{4.6}$$

步驟九、檢查是否有 MDF 存在

此處所稱MDF，更詳細的說法是「獨佔自由度」（Monopolize the Degree of Freedom，簡稱MDF）。當判別矩陣**m**中，於某一列中只有一個非零的元素存在時，此元素擁有此列的自由度，稱為獨佔自由度。判斷方式利用步驟八定義的判別矩陣**FD**，當矩陣中某一列的總數值不為零時，此列中的不為零元素就是佔有這列的自由度。可用數學式表示如下：

$$\begin{cases} \mathrm{MDF}_i = 1, \text{ if } \sum_{j=1}^{n} \mathbf{FD}_i = 1 \\ \mathrm{MDF}_i = 0, \text{ elsewise} \end{cases} \tag{4.7}$$

步驟十、調整判別矩陣 **m** 與相對應的 **FD**

逐行檢查判別矩陣**m**並進行調整，且必須從最大的元素值且又是MDF之處開始進行調整，理由是在求極小解的通解範圍時，必須取權重值最大的元素，見圖2-18所示，而被調整的列之MDF值調整完必須歸零。若於某一列中只有一個非零的元素存在時，此元素擁有此列的自由度，為此MDF的元素佔有；至於同行中其他不為零的元素值都不再具有決定通解的機會，將它們的值都設為零，這一行即是調整的行（Modified Column），前提是這些元素值必須小於先前所選的MDF之處的元素值，若是大於所選定的MDF之處的數值，則將所選的MDF之處的元素值取代。而這些因同行喪失自由度元素的同列中不為零的所有元素，也隨著喪失自由度，調整它們的值為零，這些列即是調整的列（Modified Row）。為了更瞭解此步驟意義，利用表4-3進行說明。表4-4則是此方法的範例說明。

表 4-3 調整判別矩陣之方式

<table>
<tr><td rowspan="2">調整判別矩陣 m 之方法</td><td>The value of its corresponding element</td><td>The positions of the intersectional elements</td></tr>
<tr><td>Answer</td><td>The position of the answer</td></tr>
</table>

資料來源：本研究

表 4-4 調整判別矩陣之說明

範例 1	$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0 & 0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0.7 & 0.7 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad\begin{array}{c\|ll}0.8 & \mathbf{m}_{12} & \\ 0.7 & \mathbf{m}_{22} & \mathbf{m}_{23}\\ \hline 0.8 & \mathbf{m}_{12} & \end{array}$
說明	本範例之 MDF 位於$\mathbf{m}_{12}$，大小為 0.8，於第二行中，有不為零的元素，大小為 0.7，小於$\mathbf{m}_{12}$之數值，所以$\mathbf{m}_{22}$與$\mathbf{m}_{23}$的數值會被歸零。
範例 1 修正後	$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0 & 0.8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$
範例 2	$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.3 & 0.3\\ 0 & 0.1 & 0\end{bmatrix}$ $\quad\begin{array}{c\|ll}0.3 & \mathbf{m}_{32} & \mathbf{m}_{33}\\ 0.1 & \mathbf{m}_{42} & \\ \hline 0.3 & \mathbf{m}_{42} & \end{array}$
說明	本範例之 MDF 有兩個，分別位於$\mathbf{m}_{21}$與$\mathbf{m}_{42}$，大小為 0.5 與 0.1。第一次先從 0.5 之處開始判斷，於第其他一行中，沒有其他不為零的元素。接著再從 0.1 之處判斷，於第二行中有其他不為零的元素值存在，大小為 0.3，大於$\mathbf{m}_{42}$的 0.1，用此數值取代原有的 0.1，再將$\mathbf{m}_{32}$與$\mathbf{m}_{33}$的數值歸零。
範例 2 修正後	$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.3 & 0\end{bmatrix}$

資料來源：本研究

當判別矩陣**m**進行調整過後，其相對的判別矩陣**FD**亦必須進行調整。此步驟做完一次迴圈的調整後之後，回到步驟七再次進行判斷，若還有MDF存在，則必須重複步驟九與步驟十，直到沒有MDF存在為止。

步驟十一、是否有重疊存在

判別矩陣**m**中，於同行之中有兩個以上非零的元素存在時，此稱為有重疊（Overlap）的現象。若有重疊現象，則至步驟十二進行調整；若無重疊現象，至步驟十三。可利用判別矩陣**FD**個別的行向量總和判斷是否重疊現象。

步驟十二、調整判別矩陣 **m** 與相對應的 **FD**

調整判別矩陣**m**時，必須從最多不為零元素的行與最多不為零的元素在同一列交集之處開始進行調整，且所選的行元素必須是該行中最大的數值，理由亦是在求極小解的通解範圍時，必須取權重值最大的元素。調整法則是將重疊的行向量中，其他小於所選之元素數值歸零，並將其相對的列向量中的元素也歸零，亦將對應的判別矩陣**FD**進行調整。執行完後回到上一步驟再次判斷重疊現象是否存在。調整方式和步驟十的表4-3雷同，見表4-5說明。

表 4-5 調整判別矩陣之說明範例

<table>
<tr><td>範例 1</td><td>$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0 & 0\\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0\\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7\end{bmatrix}\begin{array}{c|llll}0.2 & \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{12} & & \\ 0.4 & \mathbf{m}_{21} & & \mathbf{m}_{23} & \\ 0.6 & \mathbf{m}_{31} & \mathbf{m}_{32} & \mathbf{m}_{33} & \\ 0.7 & \mathbf{m}_{41} & \mathbf{m}_{42} & \mathbf{m}_{43} & \mathbf{m}_{44}\\ \hline 0.7 & \mathbf{m}_{41} & & & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>說明</td><td>最多元素不為零的是第一行，而當中最大的數值是 0.7，除了$\mathbf{m}_{41}$之外的元素，皆喪失決定極小解的自由度，所以都歸零。</td></tr>
<tr><td>範例 1 修正後</td><td>$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.7 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>範例 2</td><td>$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0 & 0\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0\\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0\\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}\begin{array}{c|llll}0.2 & \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{12} & & \\ 0.7 & \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} & \mathbf{m}_{23} & \\ 0.6 & \mathbf{m}_{31} & \mathbf{m}_{32} & \mathbf{m}_{33} & \\ 0.4 & \mathbf{m}_{41} & \mathbf{m}_{42} & \mathbf{m}_{43} & \mathbf{m}_{44}\\ \hline 0.7 & \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} & & \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>說明</td><td>最多元素不為零的是第一行與第二行，而當中最大的數值是 0.7，所以除了$\mathbf{m}_{21}$與$\mathbf{m}_{22}$的元素外，其餘都會被歸零，失去決定極小解的機會。</td></tr>
<tr><td>範例 2 修正後</td><td>$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0.7 & 0.7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$</td></tr>
</table>

資料來源：本研究

步驟十三、是否有並存存在

於此時判別矩陣**m**中，每一行最多僅有一個非零的元素存在，所以只要考慮在同一列中，是否有兩個或兩個以上有著相同數值的非零元素存在，而這些有著相同數值的元素將會共享同一個自由度，此種現象稱為並存（Coexistence）。若有並存現象則至下一步驟處理；沒有則至步驟十五求極小解。

步驟十四、處理並存的問題

此時判別矩陣**m**中，於同列之中有兩個或兩個以上不為零，且數值相同的元素存在，所以要處理這些並存的問題。可能有一列以上都有並存現象存在，於其他方法之中僅提到要篩選這些可能的極小解，但是沒有說明如何快速正確的篩選方法。本研究發現，只要用排列組合（Permutation）的方式，即可以將所有正確的眾多極小解都求出來。此方法不僅有效率，亦方便程式化，又可得到正確的解，為本研究與其他方法不同之處。

步驟十五、列出所有極小解

最後將所求得之極小解全部列出。極小解數學式定義如下：

$$\mathrm{MinV}_k,\ kth \text{ minimum solutions} \tag{4.8}$$

整個演算法流程到此結束。

4.2.2 範例說明

經由4.2.1節所描述的解模糊關係方程式的步驟後，可能還不是很理解文字的意義，本節利用一些文獻上的範例進行說明，相信能夠更加瞭解。說明僅是要讓各步驟的意義更容易瞭解，而不會詳細描述程式化的撰寫方法。前兩題範例會比較詳細的說明各步驟,往後範例只會再比較特別之處進行說明。

例4-1

本範例是文獻中最常使用的例子，模糊關係方程式矩陣R與B值如下所示：

$$R=\begin{bmatrix}0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.9 & 0.7 & 0.2 & 0\\ 0.8 & 1.0 & 0.5 & 0\\ 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}0.8 & 0.7 & 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

解：

步驟一、將矩陣R與B進行轉置動作，可得

$$R=\begin{bmatrix}0.1 & 0.9 & 0.8 & 0.1\\ 0.4 & 0.7 & 1.0 & 0.3\\ 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.6\\ 0.1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}0.8\\ 0.7\\ 0.5\\ 0\end{bmatrix}$$

步驟二、根據定義，建立判別矩陣**M**與**m**如下

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & 0.8 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1.0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0.5\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}，\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0 & 0.8 & 0.8 & 0\\ 0 & 0.7 & 0.7 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

步驟三、由判別矩陣**M**，可得極大解

$$\mathrm{MaxV}_1=\min\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=0，\mathrm{MaxV}_2=\min\begin{bmatrix}0.8\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=0.8$$

$$\mathrm{MaxV}_3=\min\begin{bmatrix}1\\ 0.7\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=0.7，\mathrm{MaxV}_4=\min\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0.5\\ 1\end{bmatrix}=0.5$$

$$\begin{aligned}\mathrm{MaxV}&=\begin{bmatrix}\mathrm{MaxV}_1 & \mathrm{MaxV}_2 & \mathrm{MaxV}_3 & \mathrm{MaxV}_4\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0 & 0.8 & 0.7 & 0.5\end{bmatrix}\end{aligned}$$

步驟四、判別矩陣**m**需進行修正。

步驟五、經式（4.5）修正過後，得判別矩陣**m**如下，框住部分即為修正處

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix} 0 & 0.8 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

步驟六、判別矩陣**m**沒有重複，不需進行調整。

步驟八、建立判別矩陣**FD**

$$\mathbf{FD}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

步驟九、於第一列中，有MDF存在，其值為0.8。

步驟十、調整判別矩陣**m**與相對應的**FD**，詳見下列說明可知

$$\text{修正前}\ \mathbf{m}=\begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MDF 元素

調整的列

調整的行

$$\begin{array}{c|ll} 0.8 & \mathbf{m}_{12} & \\ 0.7 & \mathbf{m}_{22} & \mathbf{m}_{23} \\ \hline 0.8 & \mathbf{m}_{12} & \end{array}$$

$$\text{修正後}\ \mathbf{m}=\begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}，\mathbf{FD}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

步驟十一、本範例判別矩陣**m**中沒有重疊現象存在，跳至步驟十三。

步驟十三、判別矩陣**m**中有並存現象存在，所以至步驟十四進行處理。

步驟十四、於第三列中有兩個不為零的元素共同享有自由度，所以可知極小解的情況有兩種組合。

步驟十五、列出所有極小解，為

$$\mathrm{MinV}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{MinV}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

例4-2

模糊關係方程式矩陣R與B值如下所示：

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}，B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

解：

步驟一、將矩陣R與B進行轉置動作，可得

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}，B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

步驟二、建立判別矩陣**M**與**m**如下

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 0.3 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}，\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

步驟三、得極大解

$$\mathrm{MaxV} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

步驟四、判別矩陣**m**不需進行修正。

步驟六、判別矩陣**m**沒有重複，不需進行調整。

步驟八、建立判別矩陣**FD**

$$\mathbf{FD}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

步驟九、於第二列與第四列中，各有MDF存在，其值分別為0.5與0.1。

步驟十、調整判別矩陣**m**與相對應的**FD**，詳見下列說明可知

$$\text{修正前}\,\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0.2 & 0 & 0.2\\ 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.3 & 0.3\\ 0 & 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

調整的列

MDF 元素

調整的行

$$\text{第一次修正}\begin{array}{r|ll}0.2 & \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{13}\\ 0.5 & \mathbf{m}_{21} & \\ \hline 0.5 & \mathbf{m}_{21} & \end{array}\text{，修正後}\,\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.3 & 0.3\\ 0 & 0.1 & 0\end{bmatrix}\text{，}\mathbf{FD}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

回到步驟九重新判斷，此時判別矩陣**m**仍須進行調整，故重新做此步驟。

$$\text{第二次修正}\begin{array}{r|ll}0.3 & \mathbf{m}_{32} & \mathbf{m}_{33}\\ 0.1 & \mathbf{m}_{42} & \\ \hline 0.3 & \mathbf{m}_{42} & \end{array}\text{，修正後}\,\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.3 & 0\end{bmatrix}\text{，}\mathbf{FD}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

步驟十一、本範例判別矩陣**m**中沒有重疊現象存在，跳至步驟十三。

步驟十三、判別矩陣**m**中沒有並存現象存在。

步驟十五、列出所有極小解，為

$$\mathrm{MinV}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0\end{bmatrix}$$

例4-3

模糊關係方程式矩陣R與B值如下所示：

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 0.7 & 0.1 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1\end{bmatrix}$$

解：

步驟一、將矩陣R與B進行轉置動作，可得

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 0 & 0.2\\ 0.7 & 0.4 & 0.3\\ 0.1 & 0.5 & 0.4\\ 0 & 0.1 & 0\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.3\\ 0.4\\ 0.1\end{bmatrix}$$

步驟二、建立判別矩陣**M**與**m**如下

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0.3 & 0.3 & 1\\ 1 & 0.4 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}，\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0.2 & 0 & 0.2\\ 0.3 & 0.3 & 0.3\\ 0 & 0.4 & 0.4\\ 0 & 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

步驟三、得極大解

$$\mathrm{MaxV}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.3 & 1\end{bmatrix}$$

步驟四、判別矩陣**m**需進行修正。

步驟五、修正判別矩陣

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0.2 & 0 & 0.2\\ 0.3 & 0.3 & 0.3\\ 0 & \boxed{0} & 0.4\\ 0 & 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

步驟六、判別矩陣**m**沒有重複，不需進行調整。

步驟八、建立判別矩陣**FD**

$$\mathbf{FD}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

步驟九、於第三列與第四列中，各有MDF存在，其值分別為0.4與0.1。

步驟十、調整判別矩陣**m**與相對應的**FD**，詳見下列說明可知

$$\text{修正前}\,\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0.2&0&0.2\\0.3&0.3&0.3\\0&0&0.4\\0&0.1&0\end{bmatrix}$$

調整的列

MDF 元素

調整的行

$$\text{第一次修正}\begin{array}{c|ccc}0.2&\mathbf{m}_{11}&&\mathbf{m}_{13}\\0.3&\mathbf{m}_{21}&\mathbf{m}_{22}&\mathbf{m}_{23}\\0.4&&&\mathbf{m}_{33}\\\hline 0.4&&&\mathbf{m}_{33}\end{array},$$

$$\text{修正後}\,\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0.4\\0&0.1&0\end{bmatrix}，\mathbf{FD}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

回到步驟九重新判斷，此時判別矩陣**m**不須進行調整，只要將判別矩陣**FD**進行調整就好。

$$\text{修正後}\,\mathbf{FD}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

說明，若選錯第一次修正的MDF值，不但會計算麻煩，且會得到錯誤的結果。所以必須從最大的MDF之處開始，並非由左而右的選擇MDF。

步驟十一、本範例判別矩陣**m**中沒有重疊現象存在，跳至步驟十三。

步驟十三、判別矩陣**m**中沒有並存現象存在。

步驟十五、列出所有極小解，為

$$\mathrm{MinV_1}=\begin{bmatrix}0 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$$

例4-4

本題範例為特例，模糊關係方程式矩陣R與B值如下所示：

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.7\\ 0.2 & 0 & 0.6 & 0.8\\ 0.1 & 0.4 & 0.6 & 0.7\\ 0 & 0.3 & 0 & 1\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.7\end{bmatrix}$$

解：

步驟一、將矩陣R與B進行轉置動作，可得

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0.3\\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0\\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 1\end{bmatrix}，B=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.4\\ 0.6\\ 0.7\end{bmatrix}$$

步驟二、建立判別矩陣**M**與**m**如下

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0.7 & 1 & 0.7\end{bmatrix}，\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0 & 0\\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0\\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7\end{bmatrix}$$

步驟三、得極大解

$$\mathrm{MaxV}=\begin{bmatrix}1 & 0.7 & 1 & 0.7\end{bmatrix}$$

步驟四、判別矩陣**m**不需進行修正。

步驟六、判別矩陣**m**沒有重複，不需進行調整。

步驟八、建立判別矩陣**FD**

$$\mathbf{FD}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

步驟九、本範例中，沒有MDF存在。

步驟十一、本範例判別矩陣**m**中有重疊現象存在，至步驟十二進行調整。

步驟十二、最多元素不為零的是第一行，而當中最大的數值是0.7，除了$\mathbf{m}_{41}$之外的元素，皆喪失決定極小解的自由度，所以都歸零。

$$\text{修正前}\,\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0.2&0.2&0&0\\0.4&0&0.4&0\\0.6&0.6&0.6&0\\0.7&0.7&0.7&0.7\end{bmatrix}，\begin{array}{c|cccc}0.2&\mathbf{m}_{11}&\mathbf{m}_{12}&&\\0.4&\mathbf{m}_{21}&&\mathbf{m}_{23}&\\0.6&\mathbf{m}_{31}&\mathbf{m}_{32}&\mathbf{m}_{33}&\\0.7&\mathbf{m}_{41}&\mathbf{m}_{42}&\mathbf{m}_{43}&\mathbf{m}_{44}\\\hline 0.7&\mathbf{m}_{41}&&&\end{array}$$

$$\text{修正後}\,\mathbf{m}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0.7&0&0&0\end{bmatrix}$$

步驟十三、判別矩陣**m**中沒有並存現象存在。

步驟十五、列出所有極小解，為

$$\mathrm{MinV}_1=\begin{bmatrix}0.7&0&0&0\end{bmatrix}$$

例4-5

本範例為本研究證明可以解決並存問題，所以假設最後求出的判別矩陣**m**如下所示：

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

解：此範例中可以發現於第一、三、四、六列中都有並存的現象存在，本題應該有24（$2\times3\times2\times2$）組解，且每一組解都是極小解。若採用其他方法，可能就不止求出24組解，且還需經過篩選的步驟，但是本研究之方法不需再經過篩選步驟，只需將所有的解集合展開列出即可。所以能夠輕鬆且有規律的求出正確的極小解歸因於前置的處理步驟，使得本研究之方法應用於解模糊關係方程式中有很好的求解效率。以下為此範例之極小解

$$\mathrm{MinV}_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_4 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_5 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_6 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_7 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_8 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_9 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{10} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{11} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{12} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{15} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{16} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{17} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{18} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{19} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{MinV}_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

4.3 結合改良模糊關係方程式之遺傳演算法

於本研究探索文獻過程中，發現結合模糊關係方程式的遺傳演算法應用於解最佳化問題時，因為一些文獻沒探討到有並存狀況的情形，導致在求解的過程中只會得到一部份的解。模糊關係方程式的解不正確或效率不佳，都會導致後面遺傳演算法的結果不佳。因此本研究先於前置步驟將解模糊關係方程式的法則改良之後，接著在進行結合遺傳演算法之應用。圖4-2為模糊關係方程式與遺傳演算法結合之流程圖。

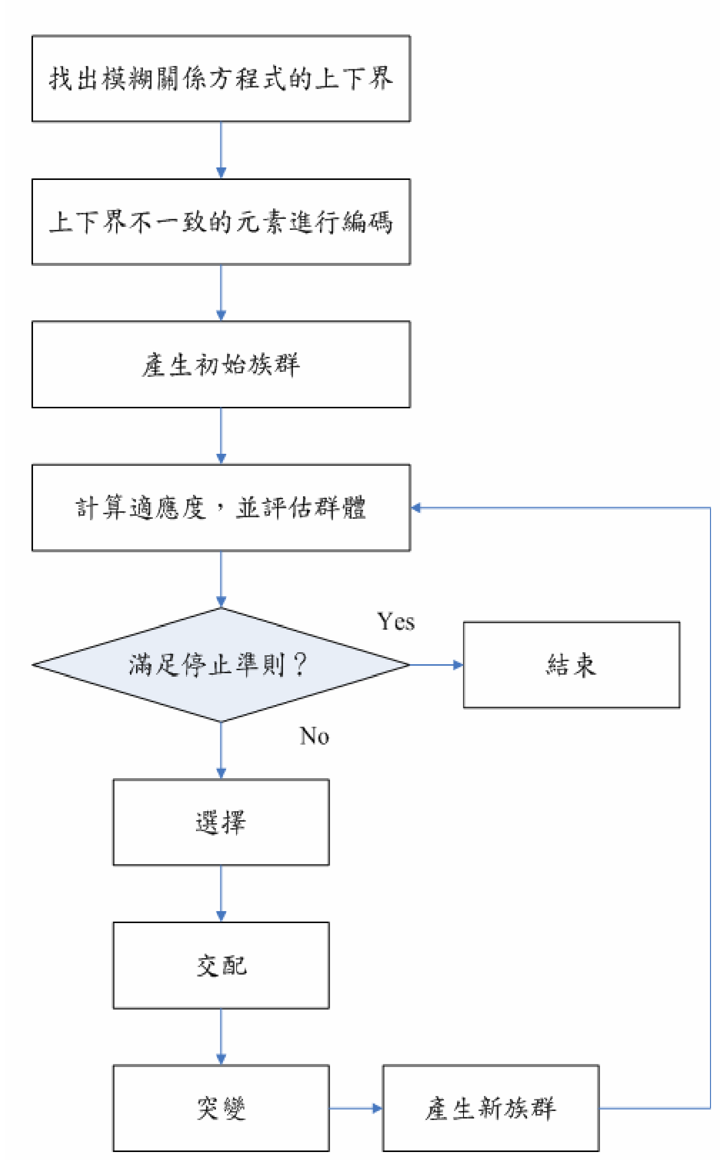

圖 4-2 遺傳演算法結合模糊關係方程式之流程圖

本節是依據[5]這篇文獻去進行研究，會以此文獻之內容當作參考根據。方便講解與撰寫，採用文獻中的Test Problem 1當作範例，數據如下表4-6。

表 4-6 Test Problem 之數據

測試函數	$f(x)=(x_1+10x_2)^2+5(x_3-x_4)^2+(x_2-2x_3)^4+10(x_1-x_4)^4$
矩陣 R	$R=\begin{bmatrix}0.5176 & 0.1370 & 0.4093\\ 0.2278 & 0.4585 & 0.7399\\ 0.8993 & 0.6334 & 0.0313\\ 0.9858 & 0.2790 & 0.3039\end{bmatrix}$
矩陣 B	$B=\begin{bmatrix}0.7208 & 0.6334 & 0.4725\end{bmatrix}$

步驟一、找出模糊關係方程式的上下界。利用4.2節本研究所提出的改良之解模糊關係方程式的流程與演算法則，得出此模糊關係方程式的極大解與極小解分別為

$$\begin{aligned}&\mathrm{MaxV}=\begin{bmatrix}0.4725 & 0.4725 & 0.7208 & 0.7208\end{bmatrix}\\ &\mathrm{MinV}_1=\begin{bmatrix}0.4725 & 0 & 0.7208 & 0\end{bmatrix}\\ &\mathrm{MinV}_2=\begin{bmatrix}0 & 0.4725 & 0.7208 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

此模糊關係方程式的極小解有並存的情況產生。

步驟二、上下界不一致的元素進行編碼。於本範例中，上下界不一致的元素有兩種情況，若選擇 MaxV-MinV_1 這組，則不一致的元素在第二與第四；若選擇 MaxV-MinV_2 這組，則不一致的元素在第一與第四。編碼位元為10個位元，本研究採用二進位編碼方式，而解碼步驟則利用式（4.8）

$$X=U_1+\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\cdot 2^{i-1}\right)\cdot\frac{U_2-U_1}{2^k-1} \qquad (4.8)$$

其中 U_2 表示上界，U_1 表示下界，再套入步驟一中所得之上下界之後，可得兩種情形 $[0,0.4725]$ 與 $[0,0.7208]$。k 即為位元10。例如今天產生一組編碼為

01 1011 0110，轉為十進位數為438，所選的上下界為$\left[0,0.7208\right]$，代入式（4.8）進行解碼後，可得出0.3086。

步驟三、產生初始族群。本研究中產生的初始族群方法是先產生編碼，在此例中編碼位元長度是10，先產生1024組編碼，然後再從中進行亂數選取當作初始族群。挑選的個數不宜過多或過少，過多會造成計算量龐大；過少則又缺乏比較客觀的評估，也容易造成陷入局部最佳化的情況。上下界不一致的元素才需進行步驟二，而上下界一致的元素則直接用最大解的數值代入，因此可以產生類似下面的初始個體，而整體合起來稱為族群，注意此兩組個體是由兩組並存所產生

$$\text{Individual}_1 = \begin{bmatrix}0.4725 & 0.3769 & 0.7208 & 0.5108\end{bmatrix}$$
$$\text{Individual}_2 = \begin{bmatrix}0.3726 & 0.4725 & 0.7208 & 0.2643\end{bmatrix}$$

步驟四、計算適應度，並評估群體。沿用步驟三舉例的兩組個體，將這些元素數值代入表4-6給予的函數中，可分別得到下列之適應函數

$$\text{fitness}_1 = 19.4959$$
$$\text{fitness}_2 = 27.9109$$

而適應函數就是本研究之遺傳演算法之參考依據，本研究認為文獻上之適應度有負數的情形不合理，應該加上絕對值，只能取正數；否則當要計算整體適應度是否往設定的方向移動時，如往最大值、最小值，當有正數、有負數的適應函數加總之後，會造成不正確的判斷。若要求最大值，則fitness_2被選中的機會就比較大，反之亦然。

步驟五、是否滿足停止條件。停止條件也稱為終止條件（Terminal Conditions），一般而言設定的終止條件通常是變化率或是到達迭代最終世代。例如整體適應度與上一世代幾乎沒有變化，或者是已經到達迭代的設定值，這時就可以停止程

式，因為再執行下去也不會有大幅度的改變。停止條件可以自行定義，但必須合理與不違反遺傳演算法之相關定義。

步驟六、結束。當滿足步驟五設定的停止條件時，就會到此步驟終止程式執行。

步驟七、選擇。當不滿足停止條件，則進入此步驟。本研究最初採用「隨機競爭模式+最優保留法」(Stochastic Tournament and Elitism)，但是效果並不理想，最後決定採用排名法（Ranking）。因為隨機競爭模式也侷限於亂數所決定，每次挑選出來之個體好壞變化太大。排名法就是依據整體族群中所有個體依適應性度的大小排序，再依其排名選取特定數目的個體存活至下一代，假設欲選取排名為前M個左右的物種至下一代，若某一個體其適應性值在整個族群中排名第r，則該個體被選種存留的個數為

$$k = \frac{M - r + 1}{\frac{(M+1)\times M}{2}} \times N \tag{4.9}$$

其中，N 為族群個體的總數，k 為該物體被選種保留之個數。此一方式的好處，是可以控制每一代基因更換的速度，使基因不至於太快流失。

步驟八、交配。經排名法所挑選出來的個體會成為父代（Parents）。先設定交配率（Crossover Rate），於第三章有講解過不宜過大與太小，本研究定義交配率為0.8。從父代群體中隨機挑選出兩組基因，並要確定兩組基因為同一並存狀況才可進行交配，例如下面四組個體

$$\begin{aligned}
Individual_1 &= [0.4725 \quad 0.3769 \quad 0.7208 \quad 0.5108] & fitness_1 &= 19.4959\\
Individual_2 &= [0.3726 \quad 0.4725 \quad 0.7208 \quad 0.2643] & fitness_2 &= 27.9109\\
Individual_3 &= [0.0926 \quad 0.4725 \quad 0.7208 \quad 0.5978]\text{,} & fitness_3 &= 24.8183\\
Individual_4 &= [0.4725 \quad 0.2268 \quad 0.7208 \quad 0.1832] & fitness_4 &= 11.0144
\end{aligned}$$

若隨機挑選中的個體是$Individual_1$與$Individual_2$，但是這兩組並非同一並存狀態，

所以無法進行交配，必須挑選中的是Individual_1與Individual_4，或者Individual_2與Individual_3，其他配對就無法進行交配，本研究也定義不可自己與自己交配，限制條件比較嚴苛。亂數產生一數值，若此數值大於0.2（1-Crossover Rate），則可進行交配動作，否則直接將此兩樣本保留至下一代，不必進行交配。本研究採用較容易運算的單點交配（Single-point Crossover），交配點位置利用隨機方式產生，使交配的個體具多樣性。舉Individual_1與Individual_4兩組個體來說明，當中只有第二與第四組元素有被進行編碼，其他兩個元素不必進行交配。四個元素與編碼對照如下所示，最左端是最大位元（MSB），最右端是最小位元（LSB）：

MSB LSB MSB LSB

$0.3769=\boxed{1}1\ 0011\ 000\boxed{0}$ $\quad 0.5108=\boxed{1}0\ 1101\ 010\boxed{1}$

$0.2268=\boxed{0}1\ 1110\ 101\boxed{1}$ $\quad 0.1832=\boxed{0}1\ 0000\ 010\boxed{0}$

任意產生之兩個交配點假設是位置3與5，交配示意圖如圖4-3(a)、(b)所示：

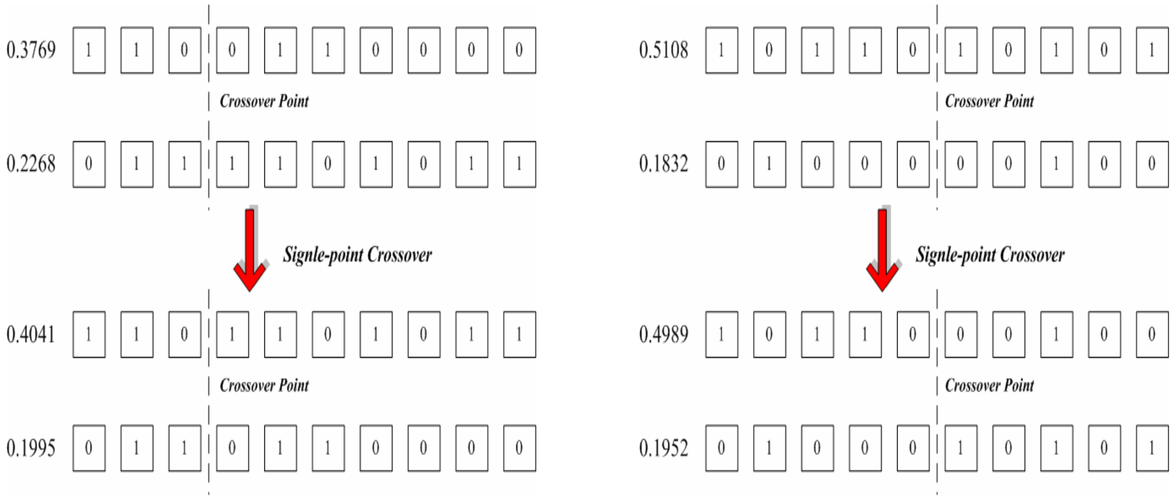

圖4-3 (a)第二個位置元素交配情形 圖 4-3 (b)第四個位置元素交配情形

步驟九、突變。本研究設定初期突變率（Mutation Rate）為0.01，突變位置前期會集中在MSB，隨著世代增加之後逐漸向後移動，並將突變率提升至0.05。理由是避免過早陷入局部最佳，所以再比較靠近MSB的位元突變能夠脫離局部最佳。到世代晚期就將產生突變的位元移至LSB附近，因為這時候整體群組已經接近收斂，不必再有大的改變。在遺傳演算法中選擇、交配、突變等步驟是很自制的定義，只要合乎常理具有解釋性即可。突變已於3.3.8節詳細介紹，在此不再敘述。

步驟十、產生新族群。經過選擇、交配及突變厚，所得之兩組新的個體分別為

$$\begin{aligned}&Individual_1=\begin{bmatrix}0.4725 & 0.4041 & 0.7208 & 0.4989\end{bmatrix} \quad fitness_1=21.7765\\&Individual_2=\begin{bmatrix}0.4725 & 0.1995 & 0.7208 & 0.1952\end{bmatrix}, \quad fitness_2=9.9092\end{aligned}$$

所以在新的族群中，$Individual_2$ 就會比 $Individual_1$ 更有機會被保留至下一個世代，當然這是針對取Minimum的情況，而如果要取Maximum的情況，則 $Individual_1$ 就比較有優勢。計算適應度應該是將所有個體代回步驟四在進行運算，在此是方便說明先提出來。步驟十完成後則回到步驟四計算適應度，然後再照著流程執行。

4.4 第四章總結

本研究於文獻以及程式過程中發現，許多文獻於解模糊關係方程式中，定義當式(4.10)中

$$X \circ R = B \tag{4.10}$$

如果左式≠右式，就認定方程式無解。如此一來將會有很多模糊關係方程式的結果都是無解，這將會造成模糊關係方程式應用上很大的限制。因為有時候可能只是其中的某一項不吻合，或是原始矩陣中某些數值可能有錯誤等原因，而造成最後左右兩式不相等。大多數的文獻都只求到無解就不在往下去做探討，以致於要如何解決這些矩陣無可得知。