

國立臺灣師範大學理學院數學系

碩士論文

Department of Mathematics

College of Science

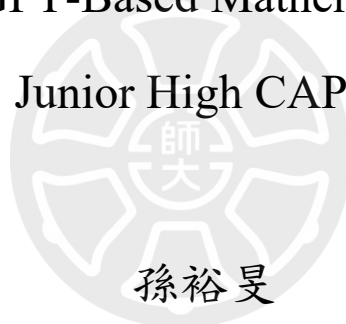
National Taiwan Normal University

Master's Thesis

初探運用ChatGPT建置國中會考數學解題家教

Exploring a ChatGPT-Based Mathematics Tutor for the

Junior High CAP



Sun, Yu-Min

指導教授：左台益 博士

Advisor: Tso, Tai-Yih, Ph.D.

中華民國 114年 7 月

July 2025

摘要

本研究以 108 課綱國中教育會考數學科試題為例，設計能引導學生解題之人工智慧。希望能幫助學生進行課後的自主學習，能在無需教師介入的情況下，完成對試題的練習，經由與人工智慧的對談，加強其對於解題所用到之數學概念的理解。

本研究以 Polya 的解題歷程四部分做為人工智慧進行解題引導的解題架構，並以蘇格拉底詰問法進行對學生的引導對談。為建置此人工智慧，本研究分兩部分，第一部分為探討人工智慧在 108 課綱國中教育會考數學科試題之解題表現與錯誤類型，第二部分為探討如何建置 108 課綱國中教育會考數學科解題家教。

主要研究結果如下：

- 一、在未經訓練之情況下，GPTs 的國中教育會考數學科成績平均分數為 56 分，其中各年的得分所對應之等級標示為 B 或 B+。
- 二、GPTs 在學生答對率較高、數與量主題類別、代數主題類別、無附圖且與圖形無關等類型之題目能有較高的答對率。
- 三、GPTs 在學生答對率較低、空間幾何主題類別、有附圖之圖形問題等類型之題目有較低的答對率。此發現與過往研究指出 AI 在視覺與空間推理上的限制相符。
- 四、經過訓練後，GPTs 能進行解題引導，但仍存在不穩定性，尤其是面對其答對率較低的題目時，較有可能出現錯誤。

關鍵字：人工智慧、蘇格拉底詰問法、Polya 解題歷程、108 課綱國中教育會考數學試題

Abstract

This study uses the mathematics questions from the Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students under the 108 Curriculum Guidelines as examples to design an AI that can guide students in problem-solving. This study uses Polya's four-step problem-solving framework and applies the Socratic method for AI-guided problem solving, and utilizes it to conduct guided dialogue with students. To develop this AI tutor, the research is divided into two parts. The first part explores the performance and error types of AI on the Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students math questions under the 108 Curriculum. The second part investigates how to build an AI-based math tutor for these questions.

1. The mean score of GPTs without prior training on the Junior High School Mathematics Comprehensive Assessment Program was 56 points, with a performance level corresponding to a B or B+ grade in the different years.
2. GPTs showed greater accuracy on questions with higher student success rates, questions related to magnitude and algebra, and questions without diagrams and unrelated to geometric figures.
3. GPTs showed lower accuracy on questions with lower student success rates, spatial geometry questions, and questions involving diagrams. This is consistent with previous research showing the limits of artificial intelligence in visual and spatial reasoning.
4. After the training, GPTs was able to guide the students to solve the problems; however, there was still some instability, especially in the face of questions with low accuracy rates, and its was still prone to errors, especially when dealing with questions on which its accuracy was low.

Keywords: artificial intelligence, Socratic method, Polya's problem-solving, 108 Curriculum, Comprehensive Assessment Program for Junior High School Students mathematics questions



目錄

摘要	i
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
第一章 緒論	1
第一節 研究背景與動機	1
第二節 研究目的與研究問題	2
第三節 名詞界定	4
第二章 文獻探討	5
第一節 蘇格拉底詰問法	5
第二節 Polya 解題歷程	8
第三節 蘇格拉底式數學家教理論架構	12
第四節 生成式 AI 在數學教育上的研究與應用	14
第三章 研究方法	16
第一節 研究設計	16
第二節 研究工具	17
第二節 資料蒐集與分析	24
第四節 研究流程	36
第四章 研究結果與討論	38
第一節 整體答題表現	38
第二節 錯誤類型	46
第三節 各類型的表現傾向與例外題	48
第四節 強化正確性	50
第五節 研究者設計的蘇格拉底式數學家教	59
第五章 結論與建議	76
第一節 結論	76

第二節 建議	78
參考文獻	81
附錄 84	
一、GPTs 知識庫文件－會考題題目	84
二、GPTs 知識庫文件－Polya 解題歷程	87
三、GPTs 知識庫文件－細部指引說明	88
四、GPTs 知識庫文件－單元名稱	96
五、GPTs 知識庫文件－蘇格拉底詰問法	111
六、GPTs 對話紀錄－未訓練答題表現	113
七、GPTs 對話紀錄－第一層次強化答題表現	131
八、GPTs 對話紀錄－第二層次強化答題表現	133
九、GPTs 對話紀錄－第三層次強化答題表現	135



表目錄

表 2-1-1 蘇格拉底詰問法	6
表 2-2-1 Polya 解題歷程四部分舉例	9
表 2-2-2 Polya 解題歷程.....	10
表 2-3-1 蘇格拉底式數學家教理論架構	13
表 4-1-1 整體答題表現總表.....	38
表 4-1-2 GPTs 國中教育會考得分	39
表 4-1-3 各等級標示對應分數區間與人數百分比.....	40
表 4-3-1 未訓練與強化後之錯誤類型分類比較	52



圖目錄

圖 2-4-1 生成式 AI 之特點在本研究的應用	15
圖 3-2-1 探索 GPT 介面	17
圖 3-2-2 GPTs 建立介面	17
圖 3-2-3 GPTs 建立介面基礎功能	18
圖 3-2-4 GPTs 對話建立介面	19
圖 3-2-5 GPTs 對話建立之結果	19
圖 3-2-6 GPTs 名稱與說明示意圖	21
圖 3-2-7 GPTs 指令與對話啟動器示意圖	21
圖 3-2-8 GPTs 知識庫示意圖	22
圖 3-2-9 GPTs 功能與動作示意圖	22
圖 3-3-1 附圖類型舉例-附有數線圖之題目	25
圖 3-3-2 附圖類型舉例-附有幾何圖之題目	26
圖 3-3-3 附圖類型舉例-附有統計圖之題目	26
圖 3-3-4 附圖類型舉例-附圖為對話截圖之題目	27
圖 3-3-5 附圖類型舉例-附圖為情境示意圖之題目	27
圖 3-3-6 附圖類型舉例-題目內容包含方程式圖形之題目	28
圖 3-3-7 附圖類型舉例-無附圖且與圖形無關之題目	28
圖 3-3-8 附圖類型舉例-無附圖但含表格之題目	28
圖 3-3-9 第二層次強化輸入格式示意圖 (111 年度第 11 題)	30
圖 3-3-10 等級 1 之關鍵提示 (112 年度第 14 題)	31
圖 3-3-11 等級 2 之大致解題步驟與思維範例 (111 年度第 5 題)	31
圖 3-3-12 等級 3 之完整步驟與結論範例 (111 年度第 15 題)	32
圖 3-4-1 GPTs 指令	33
圖 3-5-1 研究流程圖	37

圖 4-1-1 難易度分類下之 GPTs 答對率	41
圖 4-1-2 主題類別分類下之 GPTs 答對率	43
圖 4-1-3 附圖類型分類下之 GPTs 答對率	45
圖 4-2-1 錯誤類型圓餅圖	47
圖 4-3-1 第一層次強化錯誤類型圓餅圖	51
圖 4-3-2 使用超範圍解法舉例-題目內容 (112 年度第 12 題)	53
圖 4-3-3 使用超範圍解法舉例-GPTs 解題過程節錄 (112 年度第 12 題)	54
圖 4-3-4 使用困難解法舉例-題目內容 (111 年度第 5 題)	54
圖 4-3-5 使用困難解法舉例- GPTs 解題過程節錄 (111 年度第 5 題)	55
圖 4-3-6 等級 1 舉例-題目內容.....	56
圖 4-3-7 等級 1 舉例-提示內容.....	56
圖 4-3-8 等級 2 舉例-題目與提示內容.....	57
圖 4-3-9 等級 3 舉例-題目內容.....	57
圖 4-3-10 等級 3 舉例-提示內容.....	58
圖 4-3-11 各提示等級占比圓餅圖	58
圖 4-4-1 對話範例 1	59
圖 4-4-2 對話範例 2	60
圖 4-4-3 對話範例 3	60
圖 4-4-4 對話範例 4	61
圖 4-4-5 對話範例 5	61
圖 4-4-6 對話範例 6	62
圖 4-4-7 對話範例 7	63
圖 4-4-8 對話範例 8	63
圖 4-4-9 對話範例 9	64

圖 4-4-10 對話範例 10	64
圖 4-4-11 對話範例 11	65
圖 4-4-12 對話範例 12	66
圖 4-4-13 對話範例 13	66
圖 4-4-14 對話範例 14	67
圖 4-4-15 對話範例 15	67
圖 4-4-16 對話範例 16	68
圖 4-4-17 對話範例 17	69
圖 4-4-18 對話範例 18	69
圖 4-4-19 對話範例 19	70
圖 4-4-20 對話範例 20	71
圖 4-4-21 對話範例 21	71
圖 4-4-22 對話範例 22	72
圖 4-4-23 對話範例 23	73
圖 4-4-24 對話範例 24	73
圖 4-4-25 對話範例 25	74
圖 4-4-26 對話範例 26	74

第一章 緒論

本研究旨在探討如何運用 ChatGPT 協助學生自主學習，思考 108 課綱國中教育會考數學科解題。本章共分三節，第一節為研究背景與動機，第二節為研究目的與問題，第三節為名詞界定。

第一節 研究背景與動機

人工智慧 (Artificial Intelligence, AI) 在近年來取得了顯著的進展，不僅推動了技術創新，也改變了各個行業的運作模式和日常生活。教育領域也開始積極探索 AI 作為新興教學與學習工具的應用，逐漸受到廣泛關注與重視。教育部所提出的教育部中小學數位教學指引 3.0 版也提出，AI 素養的培養是教育發展的重要方向，並在數位學習趨勢中，納入了應用人工智慧輔助教學與融入學科學習(教育部，2025)。儘管目前 AI 在數學教育中的應用，尚存在問題與限制，例如其可能會產生偏誤的內容 (教育部，2025)，在具挑戰性或是複雜的數學問題上也有障礙，特別是在空間幾何與微分等領域 (Almarashdi et al., 2024)，但其進步速度飛快，並展現出在數學教育應用上的巨大潛力。

108 課綱中，數學領域課程綱要也有提到數學教學應培養學生正確使用工具的素養，包含傳統的數學教具，以及電腦，網路等數位工具 (教育部，2018)。而 AI 做為近年興起的數位工具，我們也應積極發展 AI 在數學教育上的應用。

PISA 的報告中指出，臺灣學生雖然頂尖學生的比率很高，但相對落後學生的比率也相當多，在數學領域上有 14% 的學生屬於落後群 (PISA，2018)。數學領域課程綱要中也有提到，數學應提供每位學生有感的學習機會，對於學習落後的學生，應考量其學習準備度和學習風格等，規劃補救教學，及時補救 (教育部，2018)。因此我們在教學中，應該更加著重對於學習落後學生的補救教學，然而在實際教育現場中，因為教師的時間精力有限，有時無法那麼完善的規劃補救教學及時補救，因此班上時常會有學習落後學生，在準備考試、或是完成學校作業

時，時常會面臨不知從何讀起、練習題不會寫、交白卷等狀況。教師在課堂上也常常礙於進度壓力等原因，無法給予學習落後的同學他所需要的完整詳細的檢討。

108 課綱國中教育會考的數學科非選擇題中，每題 3 級分的情況下，全體學生在 111 年度到 113 年度共六題的平均分也僅有 1.06 分，等級標示為 C（待加強）的學生更是只有 0.28 的平均分數，可以看見學生在表達策略、解題過程推導、解釋能力等方面皆需要再加強。

在此情況下，AI 或許可以在不需教師介入的情況下，運用其可以提供學生個性化學習（伍柏翰、張雅綺，2024）、給予客製化、互動式的說明（Dinesh, K., 2023）、讓學生即時取得數學內容或特定問題解答（Pepin et al., 2025b）等特性，讓學生在課後的練習時，能隨時得到即時的反饋與教導，也能在教師時間精力有限的情況下，使學生獲得足夠的補救教學，並讓學生藉由與 AI 進行解題的對答，進一步加強學生在表達策略、解題過程推導、解釋等方面的能力，加強學生在非選擇題的答題表現。同時，在學生與 AI 的對答中，也能讓學生熟悉對 AI 的使用、批判 AI 所提供的回答，在過程中逐漸培養 AI 素養。但為了能達到此目的，AI 在數學解題的正確性、引導教學的方法等方面還存在問題，譬如在詢問 AI 數學問題時，AI 通常會直接回答問題，較難做到引導學生逐步解題，為此了解決這些問題，還須加以研究、思考如何強化 AI 的能力，讓 AI 能發揮它的潛力，達到良好的教學效果。

綜上所述，本研究希望能探討如何運用 AI 建置數學解題家教，以 ChatGPT 為 AI 工具，並以 108 課綱國中教育會考數學科試題為例，初探 ChatGPT 在數學解題的正確性、擅長或不擅長的題目等，並針對其不擅長的題目強化其正確性，最後提供 ChatGPT 引導教學的方法與理論，以達到數學解題家教的目的，並將探索到的內容與結果提供後續研究者參考。

第二節 研究目的與研究問題

根據上述的背景與動機，本研究的目的為探討 ChatGPT 在 108 課綱國中教

育會考數學科試題的解題表現，並訓練 GPTs，使其能引導學生進行 108 課綱國中教育會考數學科試題解題。

基於上述研究目的，本研究提出的研究問題如下：

1. 探索 ChatGPT 在解 108 課綱國中教育會考數學科試題的解題表現為何？
 - (1) 分析 ChatGPT 在解 108 課綱國中教育會考數學試題的整體答題表現為何？
 - (2) 分類且分析 ChatGPT 在解 108 課綱國中教育會考數學科試題時出現的錯誤類型為何？
2. 如何強化 ChatGPT 在解 108 課綱國中教育會考數學試題之解題的正確性？
3. 如何應用 ChatGPT 設計蘇格拉底式數學家教？
 - (1) 如何設計指令與知識庫，使 ChatGPT 能應用蘇格拉底詰問法，使其能夠逐步引導學生思考如何解出 108 課綱國中教育會考數學試題？
 - (2) 如何設計 ChatGPT 的對話提示機制，使其能在引導學生後給予題目詳解？

第三節 名詞界定

一、108 課綱國中教育會考數學科試題

國中教育會考自民國 103 年開始實行，由國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心負責命題、組卷、閱卷與計分。本研究中所指的 108 課綱國中教育會考數學科試題，是指 111 年度～113 年度之會考數學科試題。

二、GPTs

GPTs 指的是 OpenAI 所推出的用戶自訂版本的 ChatGPT，此工具基於 GPT-4o 模型運作，不過可以依照使用者的需求客製化自己需要的聊天機器人。使用者可以在探索 GPT 的介面中，點選建立來進入 GPTs 的創造介面。詳細建立方式會在第三章的第二節介紹。



第二章 文獻探討

本研究目的在建置蘇格拉底式數學家教，使其能以 Polya 的解題歷程為解題的架構，並以蘇格拉底詰問法的方式引導學生思考如何解題。為達此目的，在本章中，將探討何為蘇格拉底詰問法，以及 Polya 的解題歷程。因此本章共分兩節，第一節探討蘇格拉底詰問法，第二節探討 Polya 解題歷程，第三節探討生成式 AI 在數學教育上的研究與應用。

第一節 蘇格拉底詰問法

蘇格拉底是古希臘時期著名的哲學家之一，蘇格拉底的詰問法對西方思想、哲學、教育都有深遠的影響。蘇格拉底詰問法不會直接給予學生正確答案，而是藉由提問挑戰學生的觀點，引導學生主動解釋、檢視自己的推理與思考，進而發現自己思考中的矛盾，產生困惑與好奇心，使學生從「以為懂」轉變為「清楚自己不懂什麼」。最終經過不斷的提問與思辯，建構對知識的理解。

張玉成（1993）認為，蘇格拉底不但運用發問刺激學生回憶，而且進而引起學生運用思考。其用以激發學生思考之程序有以下四步驟：第一、利用發問促使學生形成初步假定；第二、引導學生對自己的假定產生懷疑；第三、促使學生承認自己並不瞭解自己的假定是對還是錯；第四、導引學生建立一個正確的假定。

Paul(1995)將蘇格拉底詰問法對話時的問題分為以下六類，分別為澄清性問題、探究假定的問題、探究理由與根據的問題、釐清觀點的問題、探究應用與結果的問題、有關問題的問題。其中澄清性問題是為了進一步瞭解、確認、澄清學生的觀點、想法等學生所陳述的內容，如：你說的…是指什麼？你的主要意見是甚麼？你是說…或…嗎？探究假定的問題則是為了瞭解學生的假定，以及為何如此假定，如：你的假設是什麼？你似乎認為…，你能否加以說明？探究理由與根據的問題則是為了尋求想法背後的依據、證據，如：你為何認為這是真的？你能說明你的理由嗎？你有任何的證據嗎？釐清觀點的問題則是詢問關於學生採用

的觀點相關的問題，如：你似乎從...的立場看，你為何採用此觀點？你如何回應...或...的觀點或意見？有沒有其他的看法或替代方案？探究應用與結果的問題是關於這項觀點能有什麼應用，或是會有甚麼影響，如：你如何應用它？它可能會造成什麼後果？如果這是事實，還有什麼也一定是真？有關問題的問題則是對問題本身的探討與深入瞭解，如：你能改用不同方式呈現此問題嗎？為何認為這是一個重要的問題？要回答這問題之前，需要先回答甚麼問題？

在本研究中，為使 GPTs 能夠瞭解蘇格拉底詰問法，研究者將蘇格拉底詰問法之理念、目的、步驟整理後，將其內容整理成一份數學教學取向的蘇格拉底詰問法 Word 檔案，上傳至 GPTs 知識庫中，並在知識庫中不存在其他文件，指令僅給予「你是一位數學教育專家」的情況下，與這個 GPTs 機器人討論其中的內容，並逐步修訂出最終版本，其內容如表 2-1-1 所示，詳細可參考附錄：

表 2-1-1 蘇格拉底詰問法

<p>基本理念</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教學的核心目標在於喚醒學生對自身數學理解的覺察，從「以為懂」轉變為「清楚自己不懂什麼」。 2. 學習不是單向知識接收，而是透過提問與思辨，建構對數學概念的理解。 3. 每個數學思考背後都存在邏輯結構，教師的提問應幫助學生揭露這些結構。 4. 提問的目的不在於給出標準答案，而在於引導學生主動解釋、檢視自身的推理過程，培養思辨能力。 5. 在教學中，學生可能抱持直覺或習慣性思考，教師應設計問題挑戰其觀點，引導學生反思。 6. 教師應認真傾聽學生的想法，辨識其中的概念核心與邏輯盲點，引導其釐清與深化。 7. 蘇格拉底式提問具有邏輯遞進性，教師應根據學生回答進行
-------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

	<p>追問，逐步揭露思考的矛盾、含糊或假設，促使學生重建更合理的數學論證。</p>
目的	<ol style="list-style-type: none"> 1. 透過引導式問題激發學生對數學問題的好奇與動機。 2. 透過提問引導學生自行發現數學概念間的關聯，並察覺自身理解的盲點。 3. 引導學生不依賴記憶公式，而是能從基本原理自行推導與說明。 4. 養成學生主動提問與驗證的習慣，發展數學思維與邏輯表達力。 5. 建立以對話為基礎的學習氛圍，讓錯誤與懷疑成為學習的重要資源。
進行步驟 (舉例)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 引出初步假設 <p>目標：讓學生說出他對某個數學問題的第一想法或直覺</p> <p>「你覺得 15 是質數嗎？為什麼？」</p> 2. 挑戰並質疑假設 <p>目標：讓學生開始懷疑自己的觀點，發現可能的錯誤或模糊處</p> <p>「如果 15 是質數，那它只能有哪兩個因數？15 符合嗎？」</p> 3. 協助學生發現矛盾或模糊處 <p>目標：幫助學生自覺理解不夠精確，產生認知衝突</p> <p>「你剛才說 15 是質數，但又說它有三個因數，這會不會有矛盾？」</p> 4. 引導構築更合理的觀點 <p>目標：透過對話引導學生主動修正或重構他們對概念的理</p>

	<p>解，使其更具一致性與邏輯性</p> <p>「那我們來重新定義質數：你認為正確的定義應該怎麼說？」</p> <p>5. 持續對話，深化推理品質與概念理解</p> <p>目標：引導學生用新的觀點解釋其他例題，確認理解的遷移與穩固</p> <p>「你現在怎麼快速判斷一個數是不是質數？」</p>
附註	<p>這些提問步驟不應被視為固定流程，而是一種循環反覆的對話策略。教師的提問需根據學生的反應靈活調整，持續挖掘其思維脈絡，讓學習成為不斷澄清與深化的過程。</p>

教育部中小學數位教學指引 3.0 版中有提到，AI 擁有提供個人回饋和數據分析，引導學生練習反思學習策略與學習歷程，覺察自己需要改進的優點和缺點的潛力（教育部，2025）。這與上面所整理的蘇格拉底詰問法理念中，希望喚醒學生對自身數學理解的覺察的理念十分相近，因此在本研究中，研究者希望能運用 AI 的特性，達到蘇格拉底詰問法希望「引導學生自行發現數學概念間的關聯，並察覺自身理解的盲點」的目的，並在與 GPTs 的對話中達到「養成學生主動提問與驗證的習慣，發展數學思維與邏輯表達力」的目的。最終加強學生對於數學觀念的理解，使學生在數學表現上能夠更上一層樓，也能較好的表達國中教育會考數學科非選擇題的答題過程。

第二節 Polya 解題歷程

在 Polya 的解題歷程中，Polya(1945)將解題分為四個部分：瞭解問題（Understanding the problem）、擬定計畫（Devising a plan）、執行計畫（Carrying out the plan）以及回顧（Looking back）。

在 Polya(1945)的解題歷程中，第一部分：瞭解問題的目的在於先明確，清晰瞭解整體問題，明確題目的目的。第二部分：擬定計畫的目的則是為了尋找有用

的好想法。藉由從不同角度審視問題、從舊經驗中尋找線索等方式來找到解題的關鍵想法，指引解題方向。第三部分：執行計畫，則是要一步步的執行先前認為可行的想法，確保每一步正確無誤的解題。最後第四部份：回顧，是為了讓從中獲得的知識更有條理、更能運用到其他問題上，而去反思、精簡解題方法，提煉通用策略。

Polya 在解題歷程的四個部分中，各自有提出一些問題來舉例說明各部分應思考及處理的問題，內容如表 2-2-1 所示：

表 2-2-1 Polya 解題歷程四部分舉例

<p>瞭解問題</p>	<p>未知數是甚麼？已知數是什麼？條件是甚麼？</p> <p>已知的條件是否足夠決定未知數？太少還是太多？</p> <p>已知的條件是否存在彼此矛盾？</p> <p>能否畫圖，採用合適的記號或符號？</p> <p>能否把條件的各部分分開並寫下？</p>
<p>擬定計畫</p>	<p>是否看過這個題目？或是看過相同、但以不同方式表達的題目？</p> <p>是否知道什麼有關的問題？是否知道甚麼有關的定理能派上用場？</p> <p>試著想想有沒有什麼類似的問題，有相同或相似的未知數？</p> <p>若有一個你曾經解過的相關問題，你能運用他嗎？能否運用它的結果？或是方法？又或是需要引入什麼輔助元素才能去運用這項經驗？</p> <p>若無想法，能否重新敘述這個問題？用自己的話重新敘述一次？能否重新回到定義看看？藉此尋求靈感。</p> <p>若是無法解決眼前的問題，能否先從一些相關的問題著手？考慮相關但比較容易的問題？一個一般化的問題？比較特殊的問</p>

	<p>題？相似或類比的問題？能否指解決問題理的某個部分？只考慮條件中的某部分，而忽略其他？再看看還能怎麼改變來更接近真正的未知數。</p> <p>能從已知數中找到甚麼線索？未知數跟已知數可以怎麼改變來更接近彼此一些？</p> <p>是否已經利用所有的已知數？是否已經用了所有的條件？是否已考慮所有與問題相關的觀念？</p>
執行計畫	<p>仔細的檢查每個步驟，能否清楚的確定每個步驟都是正確的？</p> <p>能否證明每個步驟都是正確的？</p>
回顧	<p>可以驗算所得的答案嗎？能否檢驗自己的論證過程？</p> <p>能否用其他方法得出相同答案？能否一眼看出答案？能否把這個結果或方法應用到別的問題上？</p>

本研究中，研究者希望將 Polya 的解題歷程作為 GPTs 在引導學生解題時所使用的架構，讓 GPTs 引導學生逐漸完成瞭解問題、擬定計畫、執行計畫、回顧等四個部分，希望在這樣的情況下，能逐漸培養學生對於 Polya 解題歷程的使用，讓學生在未來遇上數學問題時，也能運用 Polya 的解題歷程，逐步完成解題，讓學生從實踐中逐漸掌握高層次的解題框架、提升學生的解題能力。也期盼 GPTs 能使用此解題歷程理論，達到思維鏈的效果，強化 GPTs 在數學解題方面的表現。

在本研究中，為使 GPTs 能夠瞭解 Polya 解題歷程，達成前段所述的目的，研究者將其內容整理成一份 Word 檔案，上傳至 GPTs 知識庫中，並已與蘇格拉底詰問法時相同的辦法，在知識庫沒有其他檔案，指令僅為「你是一位數學教育專家」的情況下與這個 GPTs 機器人討論出最終版本，其內容如表 2-2-2 所示，詳細可參考附錄：

表 2-2-2 Polya 解題歷程

第一部分：瞭解問題	本階段的目的是深入掌握問題的內容與結構，為後續
-----------	-------------------------

	<p>的解題歷程奠定基礎。</p> <p>目標：清楚了解題意，能以自己的方式重新詮釋問題內容。</p> <p>(1) 題目在問什麼？未知數是什麼？</p> <p>(2) 已知條件有哪些？彼此之間有何邏輯關係？</p> <p>(3) 能否用圖像、列表、數學語言或變數表示問題？</p> <p>(4) 是否能用自己的語言重新敘述題目，確認理解？</p>
<p>第二部分：擬定計畫</p>	<p>在理解問題後，接下來需思考可能的解題策略，並保持策略選擇的彈性與開放性。</p> <p>目標：思考多種可能策略並選擇一條可行的解題途徑。</p> <p>(1) 回憶是否遇過類似問題？可以套用哪些方法？</p> <p>(2) 常見策略包含：</p> <p>畫圖表示</p> <p>設未知數</p> <p>逆推法</p> <p>嘗試特例或代入簡單數字</p> <p>找規律或模式</p> <p>分類討論</p> <p>使用方程式或代數技巧</p> <p>將問題轉化或簡化</p> <p>(3) 若有多種策略，需初步比較其可行性與效率，靈活調整。</p>
<p>第三部分：執行計畫</p>	<p>依據選定策略進行具體操作與推理，保持邏輯嚴謹與過程清楚。</p>

	<p>目標：完整求得解答，過程條理分明，思路清晰。</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) 按照計畫逐步執行解題步驟。 (2) 每一動作都需確認合理與正確，避免錯誤累積。 (3) 若遇瓶頸，可回頭修正或改變策略。 (4) 對於複雜問題，可劃分為子問題或小步驟逐一完成。
<p>第四部分：回顧</p>	<p>在完成解題後，應重新檢視整體歷程，提煉出解題策略與學習經驗。</p> <p>目標：反思解題歷程，提煉通用策略，強化遷移能力。</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) 解答正確嗎？是否滿足原題要求？ (2) 是否有更有效或簡潔的方法？ (3) 此策略能否應用於其他問題？具備多大的一般性？ (4) 在解題過程中，哪些決策是關鍵？ (5) 是否學到新的解題技巧或概念？有無可遷移的經驗？ (6) 能否將整個思考歷程內化，應用於未來的問題解決？

最後，為提供 GPTs 引導學生解題時的策略架構，研究這以此四部分為基礎，將各部分再細分出數個階段（這些階段將在第三章第四節詳細敘述），作為本研究的解題架構。

第三節 蘇格拉底式數學家教理論架構

本研究中，為建置蘇格拉底式數學家教，研究者將本章第一、二節所提的 Polya 解題歷程與蘇格拉底詰問法結合，建立理論架構以達此目的。研究者以

Polya 解題歷程中的四部分為主要架構，將其四部分再細分出數個階段，其各階段如表 2-3-1。

表 2-3-1 蘇格拉底式數學家教理論架構

第一部分：了解問題	第一階段：瞭解題目所求。 第二階段：瞭解題目中所含有的條件。
第二部分：擬定計畫	第一階段：判斷解題相關單元。 第二階段：尋找可衍生的隱藏條件。 第三階段：判斷解題重要概念。 第四階段：決定解題方案。
第三部分：執行計畫	第一階段：依照列出步驟解題。
第四部份：回顧	第一階段：反思與遷移。 第二階段：詳解。

在此架構下，為以蘇格拉底詰問法的方式完成各部分與各階段之目標，存在兩個執行時的要點。第一點是要以提問的方式完成每個階段的目標，運用提問讓學生思考該階段相關的問題，以達到該階段最終的目標。研究者希望藉由此部分的提問，來達到蘇格拉底詰問法中，喚醒學生對自身數學理解的覺察的理念，讓學生清楚在解題過程中，有哪些是他不理解的。第二點是若過程中學生有發生回答錯誤、無法回答、觀念不清等問題，要以蘇格拉底詰問法的方式引導其思考，讓學生反思並覺察自己錯誤與矛盾之處，再進一步形成新的觀念。研究者希望藉由此部分的提問，達到蘇格拉底詰問法中所提到「透過提問引導學生自行發現數學概念間的關聯，並察覺自身理解的盲點」這項目的。過往研究中也有提醒，ChatGPT 所生成的教材與解答品質參差不齊，仍需要人工審核(Pepin et al., 2025a)，因此研究種也希望藉由鼓勵學生對於 AI 的提問與答案保持批判與懷疑的精神，來達到蘇格拉底詰問法中「養成學生主動提問與驗證的習慣，發展數學思維與邏輯表達力，讓錯誤與懷疑成為學習的重要資源」

的目的。

第四節 生成式 AI 在數學教育上的研究與應用

高文忠 (2023) 曾提及 AI 系統持續蓬勃發展，可預見它將深深影響未來學習的模式，也將改變師生間的教學互動方式，師生都應積極善用它來達成教育的目標。並指出 AI 科技的發展是勢不可擋的時代洪流，教育工作者不能再堅持傳統的教學模式，要充分運用 ChatGPT 協助教學。教育部所提出的中小學數位教學指引中，也提到數位素養和 AI 素養的培養也成為教育發展的重要方向，並將應用人工智慧輔助教學與融入學科學習、實現個人化與適性化學習等放入數位學習趨勢中。因此，我們應積極地探討 AI 在數學教育上能有怎樣的應用。

伍柏翰、張雅綺 (2024) 曾提及 AI 可以提供學生個性化學習，Pepin (2025) 也指出學生能受益於 ChatGPT 所提供的個別化學習路徑與互動式學習環境，教育部 (2025) 更是在中小學數位教學指引中，指出能運用 AI 技術提供個人化回饋和數據分析，引導學生練習反思學習策略與學習歷程，覺察自己需要改進的優點和缺點，從而提升學生自我認知。因此，本研究嘗試運用 AI 技術上述的優點，製作數學解題家教，提供學生個別化的引導，並期望藉由引入蘇格拉底詰問法強化其引導學生練習反思，覺察自己需要改進的優點和缺點的能力。

雖然 AI 具備上述的優點，且目前正蓬勃發展持續進步中，但也仍存在許多應注意的事項與限制。Pepin (2025) 就有提出 ChatGPT 在高深的數學問題與複查的推理任務上存在限制，生成的教材與解答品質也參差不齊，仍需要人工審核。Wardat (2023) 也提出 ChatGPT 在幾何領域缺乏深層理解能力，Dao, & Le, (2023) 也有提及 ChatGPT 在圖形資料的詮釋以及視覺推理上仍有能力上的限制。教育部 (2025) 也有提出人工智慧工具可能會有產生偏誤內容等問題存在，這些都是本研究在進行的過程中，所需要考慮、注意、解決的問題。Wei et al. (2022) 在研究中指出使用思維鏈 (Chain-of-Thought) 將問題拆解成多個步驟，並逐步完成求解，就能夠提升大型語言模型在包含算數、常識推理與符號推理等推理任務上的

表現。因此，我們也許也能運用思維鏈的方式，加強 GPTs 在數學推理任務上的能力，檢驗能否以此方式處理這些 AI 在數學教育應用上所會遇到的限制。

綜上所述，本研究希望運用 AI 在數學教育上的特點來達成第三節所述的「以提問方式完成每階段目標」、以及「以蘇格拉底詰問法在學生錯誤或不時引導其思考」的目標，並留意 AI 現存的限制可能會對此目標造成的阻礙。如圖 2-4-1。

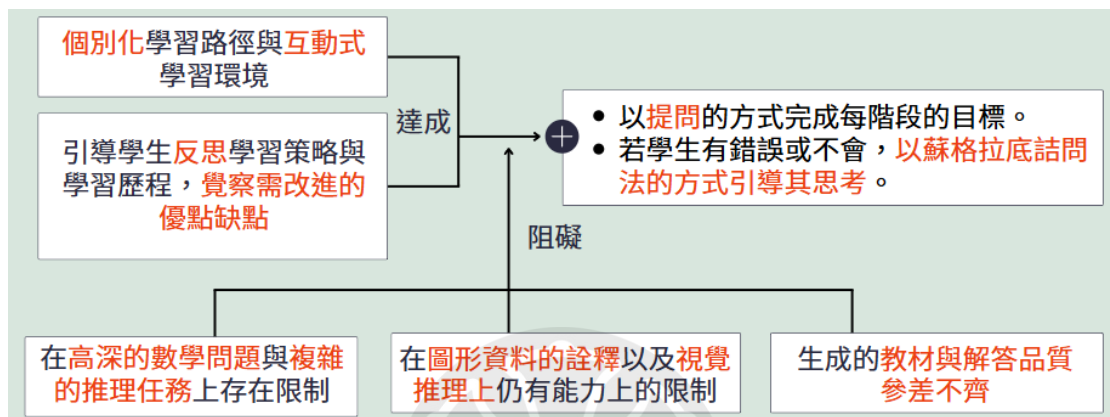


圖 2-4-1 生成式 AI 之特點在本研究的應用

第三章 研究方法

本章共分為五節，第一節為研究設計、第二節為研究工具、第三節為資料蒐集與分析、第四節為解題家教設計、第五節為研究流程。

第一節 研究設計

本研究旨在探討如何運用 GPTs 建置 108 課綱國中教育會考數學科解題家教，分為「瞭解 GPTs 答題表現」以及「建置數學家教」兩部分。在瞭解 GPTs 答題表現的部分中，研究者將探討 GPTs 在 108 課綱國中教育會考數學試題中的答題表現及錯誤類型。藉由探討 GPTs 在不同難易度、數學領域等分類下的答題表現，與學生答題表現之比較，以及解題時所出現的錯誤類型，研究者希望能在此部分瞭解 GPTs 在 108 課綱國中教育會考數學科中的表現，有無擅長或不擅長的題目類型，進而運用在後續第二部分的建置數學家教中，協助使用者探討如何訓練 GPTs 以達到能正確解題並引導學生之目的。

在第二部分的建置數學家教中，研究者共有兩個目標。第一個目標，是希望藉由第一部分所瞭解到的 GPTs 的答題表現，強化 GPTs 所不擅長的題型與常見的錯誤類型，使得 GPTs 能正確地解出 108 課綱國中教育會考數學科的試題。唯有能正確解題，我們才能期望 GPTs 有可能引導學生正確解題，進而進入第二目標，設計數學家教的引導系統。在此目標中，研究者將訓練 GPTs，使其能以 Polya 解題歷程做為解題歷程架構，運用蘇格拉底詰問法引導學生完成解題。

第二節 研究工具

一、GPTs

GPTs 指的是 OpenAI 所推出的用戶自訂版本的 ChatGPT，此工具基於 GPT-4o 模型運作，不過可以依照使用者的需求客製化自己需要的聊天機器人。使用者可以在探索 GPT 的介面中(如圖 3-2-1 所示)，點選右上角的建立來進入 GPTs 的建立介面，介面如圖 3-2-2 所示：



圖 3-2-1 探索 GPT 介面

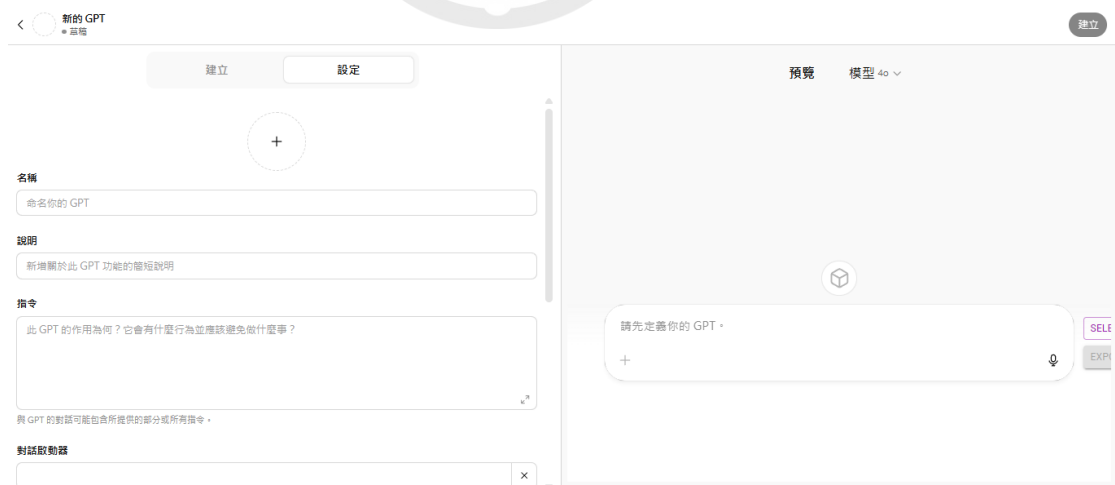


圖 3-2-2 GPTs 建立介面

使用者可以使用圖 3-2-3 左側紅框中的建立與設定完成對 GPTs 的客製化設定，並在右側紅框的預覽進行對話測試。

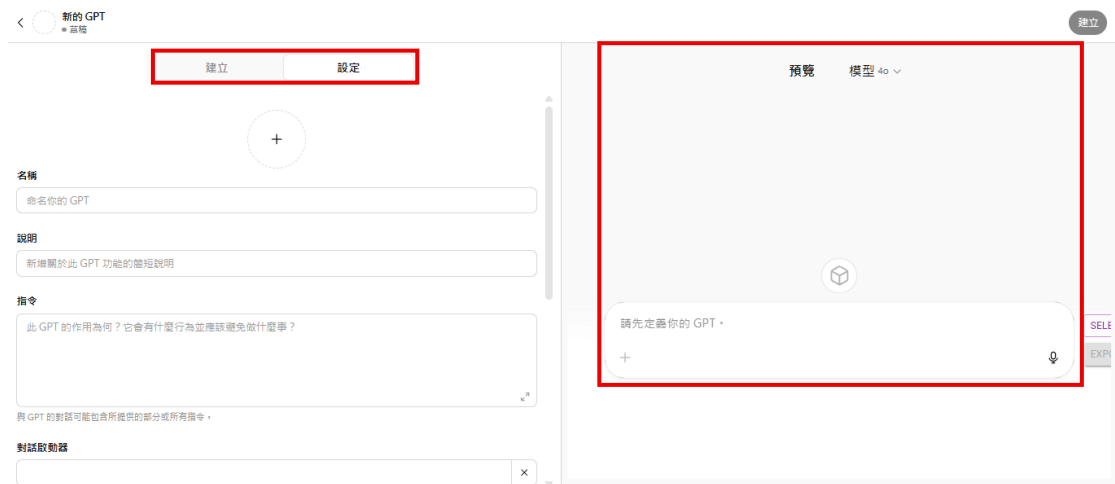


圖 3-2-3 GPTs 建立介面基礎功能

在建立介面中，使用者可以點選左側的建立，以對話的方式進行客製化設定，以對話的形式告知 ChatGPT 希望生成的 GPTs 名稱、頭像、功能等內容，讓 ChatGPT 協助完成 GPTs 的各項設定。介面與結果如圖 3-2-4、圖 3-2-5 所示：





圖 3-2-4 GPTs 對話建立介面



圖 3-2-5 GPTs 對話建立之結果

如圖 3-2-5 所示，使用者在進行對話建立過後，GPTs 會依照對話的內容自行將設定中的各項空格填滿，若對於 GPTs 所生成的內容不滿，或是有所需要修改，也都可以回到對話建立的頁面繼續討論修改。

除此之外，使用者也可以直接在設定介面中，進行填入名稱、說明、指令、對話啟動器，或是上傳頭像、知識庫檔案、勾選功能、建立動作等多種細部的設定。接下來將逐一介紹這些設定欄位的功用，並以本研究最後生成的解題家教 GPTs 作為範例說明。在名稱一欄中，使用者可填入自行命名的 GPTs 名稱（如圖 3-2-6 所示）。在說明一欄中，使用者可以簡短介紹此 GPTs 的功能，讓他人能快

速瞭解此 GPTs 的功用(如圖 3-2-6 所示)。在指令一欄中,使用者可以輸入 GPTs 的作用、應該有何種行為、避免做甚麼事, GPTs 會依照使用者在指令輸入的內容進行對話(如圖 3-2-7 所示)。在對話啟動器一欄中,使用者給予範例,讓其他人知道可以如何開啟與此 GPTs 的對談(如圖 3-2-7 所示)。在知識庫中,使用者可以上傳檔案給 GPTs, GPTs 的對話會參考知識庫中的內容,揭露部分或全部的上傳內容(如圖 3-2-8 所示)。在功能中,使用者可以勾選是否啟用網頁搜尋、畫布、4o 圖像產生、程式碼執行器等功能,本研究中,功能的部分揭示僅開啟程式碼執行器的功能,其餘皆關閉。僅在與 GPTs 討論文獻探討中所提到的蘇格拉底詰問法與 Polya 解題歷程的內容整理時,有開啟網頁搜尋的功能,讓 GPTs 能藉由網頁搜尋的內容,更好的與研究者討論如何總結這兩項理論(如圖 3-2-9 所示)。建立動作則是加入第三方的 API,連接外部的應用程式來執行更進階的功能(如圖 3-2-9 所示)。





圖 3-2-6 GPTs 名稱與說明示意圖



圖 3-2-7 GPTs 指令與對話啟動器示意圖

建立

設定

知識庫

與 GPT 的對話可能會揭露部分或全部上傳的檔案。



上傳檔案

圖 3-2-8 GPTs 知識庫示意圖

功能

- 網頁搜尋
- 畫布
- 4o 圖像產生
- 程式碼執行器和資料分析

動作

建立新動作

圖 3-2-9 GPTs 功能與動作示意圖

二、國中教育會考數學科試題

國中教育會考自民國 103 年開始實行，由國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心負責命題、組卷、閱卷與計分。本研究以 108 課綱國中教育會考數學科試題，也就是 111 年度～113 年度之國中教育會考數學科試題為例建置解題家教，並探討 GPTs 的答題表現。本研究在探討 GPTs 的答題表現時，包含計算其成績與等級標示。其中，國中教育會考數學科因包含選擇題型與非選擇題型，

採用加權分數計算，計算方式為 $\frac{\text{非選擇題獲得級分}}{\text{非選擇題總級分}} \times 15 + \frac{\text{選擇題答對題數}}{\text{選擇題總題數}} \times 85$ 。並且會將加權分數轉換為對應的等級標示，等級分為精熟（A）、基礎（B）、待加強（C）三個等級。其中精熟是表示考生精通熟習數學科國中階段所學習的知識與能力，基礎表示考生具備數學科國中階段之基本學力，待加強表示考生尚未具備數學科國中階段之基本學力。為了提供免試入學超額比序運用，在精熟與基礎的等級上又有另加註標示，分別為「A++」、「A+」、「B++」、「B+」。分別表示「精熟等級前 25%」、「精熟等級前 26%~50%」、「基礎等級前 25%」、「基礎等級前 26%~50%」。

此外，每年國中教育會考過後，國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心也會提供該年國中教育會考之試題分析，內容包含試題內容、學習表現、通過率。其中，通過率是指考生中答對該題的百分比。而非選擇題因是採用三級分評分，並非像選擇題能計算通過率，因此會提供學生平均得分取代。本研究中，將會運用此試題分析中的數據，將試題分類，或取得學生表現之依據。

第二節 資料蒐集與分析

一、蒐集 GPTs 在未訓練時之答題結果與過程

本研究中，為了瞭解 GPTs 的程度與能力，研究者先蒐集了 GPTs 在未經訓練情況下，回答 108 課綱國中教育會考數學試題之答題過程與結果。為此目的，研究者建立一個新的 GPTs，僅將其名字設為「108 課綱會考數學家教」，並填入指令「請回答使用者給你的數學問題」，在此情況下，將 111 年度到 113 年度的國中教育會考數學科試題，逐題截圖試題內容後，逐題詢問 GPTs，並將其完整回答過程輸出保留，記錄每題答對與否，以及過程是否正確。

二、分析 GPTs 在未訓練時之答題表現與錯誤類型

本研究中，研究者運用上段蒐集的答題結果與過程，進行了以下分析。探討 GPTs 在未訓練時的得分與等級標示、各分類下的答題表現、錯誤類型，來瞭解 GPTs 對數學科國中階段的掌握情形、擅長與不擅長的題目類型、回答錯誤時的錯誤原因。

在得分與等級標示中，研究者先將 GPTs 的選擇題答案對照心測中心提出的選擇題解答，計算答對題數與答錯題數，並依照心測中心所公布的非選擇題評分標準，判斷非選擇題所得級分，並按照前一節所提的國中教育會考數學科加權分數計算方式，計算出該年的加權分數，並對照當年的等級和標示所對應的分數，判斷該年 GPTs 所得到的等級與標示。在得到 GPTs 三年的得分與等級標示後，因考量此項研究最終目的在於創建數學家教，GPTs 應能正確引導學生解題，因此研究者將選擇題答對的題目挑出，仔細閱讀其答題過程後，將其中過程錯誤，僅答案正確的題目挑出，加進答錯題數之中，也就是答對題數中僅計算過程與解答皆正確之題數，以此算出新的加權分數與等級標示，後續以過程正確得分來表示此一標準下的加權分數。

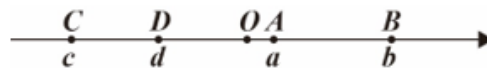
在各分類下的答題表現中，本研究一共做出了三種分類，分別為難易度分類、

主題類別分類、附圖類型分類。在難易度分類中，研究者參考心測中心所公布的試題分析中各題的通過率，以通過率 60%及 40%做為分界線，將通過率 60%以上分類為簡易類型題目，共有 29 題，通過率 60%之下、40%以上分類為適中類型題目，共有 30 題，通過率 40%之下分類為困難類型題目，共有 16 題。在主題類別分類中，研究者依照數學領域課程綱要中所提的學習內容中的主題類別，分成 N (數與量)、S (空間與形狀)、A (代數)、F (函數)、G (坐標幾何)、D (資料與不確定性) 六種不同主題類別，並依照心測中心所公布的試題分析中的學習內容來進行分類，如 111 年度的第一題，心測中心公布的學習內容為 N-7-5，因此將此題歸類為 N 類型。最終在主題類別中，N 類型一共有 21 題、S 類型一共有 24 題、A 類型中一共有 17 題、G 類型一共有 2 題、F 類型一共有 5 題、D 類型中一共有 6 題，可以看見 D、F、D 三種類型的題目數量較小，因此後續分析討論中較不著重於此三種類型的結果，而是偏重於 N、S、A 三種類型的資料分析。在附圖類型中，研究者因為研究者觀察到圖形相關的題目 ChatGPT 似乎較容易答錯，且過往的研究也有指出 AI 在詮釋圖像輔助資料方面仍有侷限(Rios-Romero et al., 2020)，因此依據題目的附圖類型，將題目分為以下四類：類型 1：有附圖，且為數學圖形。類型 2：有附圖，但非數學圖形。類型 3：無附圖，但題幹有圖形訊息。類型 4：無附圖，且題幹無圖形訊息。下面提供部分例題做為此四類的舉例。

第 1 題

圖(一)數線上的 A 、 B 、 C 、 D 四點所表示的數分別為 a 、 b 、 c 、 d ，且 O 為原點。↓
根據圖中各點的位置判斷，下列何者的值最小？↓

- (A) $|a|$
- (B) $|b|$
- (C) $|c|$
- (D) $|d|$



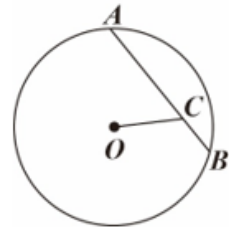
圖(一)

圖 3-3-1 附圖類型舉例-附有數線圖之題目

第 13 題

如圖(四)， \overline{AB} 為圓 O 的一弦，且 C 點在 \overline{AB} 上。若 $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{BC} = 2$ ， \overline{AB} 的弦心距為 3，則 \overline{OC} 的長度為何？

- (A) 3
 (B) 4
 (C) $\sqrt{11}$
 (D) $\sqrt{13}$



圖(四)

圖 3-3-2 附圖類型舉例-附有幾何圖之題目

第 14 題

某國主計處調查 2017 年該國所有受僱員工的年薪資料，並公布調查結果如圖(五)的直方圖所示。



已知總調查人數為 750 萬人，根據圖中資訊計算，該國受僱員工年薪低於平均數的人數占總調查人數的百分率為下列何者？

- (A) 6%
 (B) 50%
 (C) 68%
 (D) 73%

圖 3-3-3 附圖類型舉例-附有統計圖之題目

圖 3-3-1、圖 3-3-2、圖 3-3-3 三題為附圖類型 1 的舉例，分別為 111 年度之第 1 題、第 13 題、第 14 題，為附有數線、幾何圖、統計圖等類型之數學附圖之題目。

第 11 題

根據圖(三)中兩人的對話紀錄，求出哥哥買遊戲機的預算為多少元？↓

- (A) 3800 ↓
- (B) 4800 ↓
- (C) 5800 ↓
- (D) 6800 ←

←
←
←
←
←



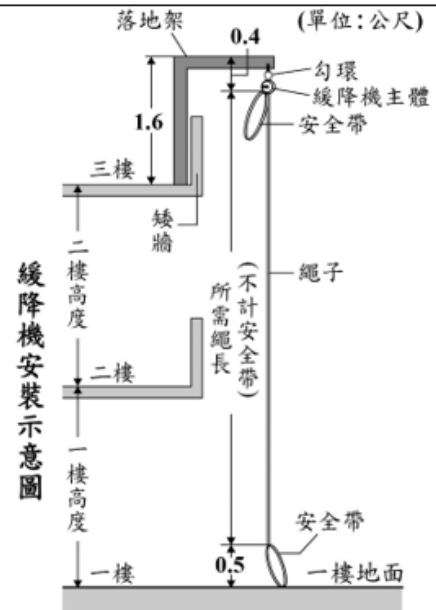
圖(三)

圖 3-3-4 附圖類型舉例-附圖為對話截圖之題目

第 16 題

緩降機是火災發生時避難的逃生設備，圖(七)是廠商提供的緩降機安裝示意圖，圖中呈現在三樓安裝緩降機時，使用此緩降機直接緩降到一樓地面的所需繩長(不計安全帶)。若某棟建築的每個樓層高度皆為 3 公尺，則根據圖(七)的安裝方式在該建築八樓安裝緩降機時，使用此緩降機直接緩降到一樓地面的所需繩長(不計安全帶)為多少公尺？←

- (A) 21.7 ↓
- (B) 22.6 ↓
- (C) 24.7 ↓
- (D) 25.6 ←



圖(七)

圖 3-3-5 附圖類型舉例-附圖為情境示意圖之題目

圖 3-3-4、圖 3-3-5 兩題為附圖類型 2 的舉例，分別為 111 年度之第 11 題、第 16 題，雖有附圖，卻為對話截圖、或是情境示意圖等非數學之圖形。

第 7 題

已知坐標平面上有一直線 L 與一點 A 。若 L 的方程式為 $x = -2$ ， A 點坐標為 $(6, 5)$ ，則 A 點到直線 L 的距離為何？

(A) 3
(B) 4
(C) 7
(D) 8

圖 3-3-6 附圖類型舉例-題目內容包含方程式圖形之題目

圖 3-3-6 為附圖類型 3 的舉例，為 111 年度之第 7 題，雖無附圖，但題目中
包含如方程式圖形等敘述之題目。

第 2 題

計算多項式 $6x^2 + 4x$ 除以 $2x^2$ 後，得到的餘式為何？

(A) 2
(B) 4
(C) $2x$
(D) $4x$

圖 3-3-7 附圖類型舉例-無附圖且與圖形無關之題目

第 24-25 題選文

表(一)、表(二)呈現 PA、PB 兩種日光燈管的相關數據，其中光通量用來衡量日光燈管的明亮程度。

表(一)

PA燈管類別	直徑(毫米)	長度(毫米)	功率(瓦)	光通量(流明)
PA-20	25.4	580	20	1440
PA-30	25.4	895	30	2340
PA-40	25.4	1198	40	3360

表(二)

PB燈管類別	直徑(毫米)	長度(毫米)	功率(瓦)	光通量(流明)
PB-14	15.8	549	14	1200
PB-28	15.8	1149	28	2600

圖 3-3-8 附圖類型舉例-無附圖但含表格之題目

圖 3-3-7、圖 3-3-8 為附圖類型 4 的舉例，分別為 111 年度之第 2 題、第 24 題、第 25 題，無附圖且與圖形無關之題目。其中含表格之題目，研究者因考量在輸入格式為截圖之情況下，表格與文字敘述差異較小，且雖圖與表時常相提並論，但卻依舊是兩種不同的表示類型，而此處著重於探討附圖類型差異的影響。因而將附有表格類型之題目歸類於類型 4。

最終在附圖類型分類中，附圖類型 1 一共有 31 題、附圖類型 2 一共有 6 題、附圖類型 3 中一共有 4 題、附圖類型 4 一共有 34 題，可以看見附圖類型 2、附圖類型 3 兩種類型的題目數量較小，因此後續分析討論中較不著重於此兩種類型的結果，而是偏重於附圖類型 1、附圖類型 4 兩種類型的資料分析。

在錯誤類型中，研究者分析 GPTs 答題過程後，將答錯原因歸類為以下五種錯誤類型，分別為題目解讀、圖像解讀、圖形推理、隱藏條件、其他。

三、蒐集強化後答題結果與過程

在前段的分析後，本研究依據前段探討出的 GPTs 常見之錯誤類型，對 GPTs 的答題正確性進行強化，以求讓 GPTs 能正確解題。本研究一共進行了三層次的正確性強化，在第一層次強化中，研究者改變了輸入格式，用 Word 純文字檔取代原先的題目截圖。使用者將每一年度之國中教育會考數學科考古題各自打成一份 Word 文字檔，其中運用 Latex 格式敘述其中的數學式子，若有附圖，則用文字的方式轉述圖片中的資訊，如圖 3-3-9 所示，並將最終的檔案上傳進 GPTs 的知識庫中。研究者希望藉由此一方式，改善其對題目敘述、附圖的解讀問題。

第 11 題

1. 題目：

根據下列兩人的對話紀錄，求出哥哥買遊戲機的預算為多少元？

(A) 3800

(B) 4800

(C) 5800

(D) 6800

2. 圖片資訊：

弟：哥，你之前提到的遊戲機買了沒？

哥：還沒，因為它的售價比我的預算還要多 1200 元。

弟：這台遊戲機正在打 8 折促銷耶！

哥：這樣比我的預算還要少 200 元耶！

圖 3-3-9 第二層次強化輸入格式示意圖（111 年度第 11 題）

在第二層次強化中，研究者希望運用 Wei et al. (2022) 在研究中所提及的思維鏈對於大型語言模型在推理任務上的提升，強化 GPTs 在解題方面的能力，因此引入了 Polya 解題歷程做為 GPTs 的解題架構，將 Polya 的解題歷程理論整理成一份檔案後，上傳至 GPTs 的知識庫中，並在指令要求 GPTs 依照 Polya 解題歷程的架構進行解題。希望藉由此這樣的方式，讓 GPTs 能夠依照 Polya 解題歷程的架構將問題拆解、逐步解題，達到思維鏈的效果以強化答題正確性。第三層次強化中，研究者針對前兩次強化後依然錯誤的題目、或是 GPTs 在解題過程中會使用超出國中範圍方法的題目，以提示的方式加以強化，以達到能正確解題的目標，讓 GPTs 具備引導學生正確解題的能力。在第一層次強化時，研究者曾製作一份 Word 檔案，內容為各題題目內容的文字檔，並在第二層次強化時沿用此檔案。在第三層次強化中，研究者將此份 Word 檔中，這些錯題的部分新增了「額外資訊」作為解題之提示，並從簡單的關鍵提示開始，逐漸提升提示的強度，直

至 GPTs 能正確解題。依照每題的提示強度，研究者將其分成四個等級，分別為等級 0 的無提示、等級 1 的提供關鍵提示、等級 2 的提供大致步驟、等級 3 的提供步驟與結論。

額外資訊：←

此題請注意以下幾點：←

1. 頂點為 (P) 點的二次函數與水平線的交點為 (A) 、 (C) 兩點←
2. 頂點為 (Q) 點的二次函數與水平線的交點為 (B) 、 (D) 兩點←

圖 3-3-10 等級 1 之關鍵提示（112 年度第 14 題）

如圖 3-3-10 所示，等級 1 的提供關鍵提示針對導致 GPTs 錯誤的重要觀念與迷思給予幾句簡單的重點提示。

額外資訊←

此題請注意以下幾點：←

1. 此題請不要先計算括號內的內容。←
2. 請使用拆括號的解法，拆括號後使用結合律讓同分母的先運算。←

圖 3-3-11 等級 2 之大致解題步驟與思維範例（111 年度第 5 題）

如圖 3-3-11 所示，等級 2 的提供大致步驟，是提供大致的解題步驟與思維，但不給與各步驟的結論與結果。

額外資訊：←

此題請根據以下步驟解題：←

1. 依據 $\angle BDE = \angle ADE = 90^\circ$ 、 $\overline{AD} = \overline{BD}$ (D 為 \overline{AB} 中點)、 $\overline{DE} = \overline{DE}$ (共邊) ←
2. 使用 SAS 全等性質說明 $\triangle ADE$ 全等於 $\triangle BDE$ ←
3. 再得出 $\angle 1 = \angle 2$ (對應角相等) ←
4. 接著依據三角形內角和為 180° 得知 $\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$ ($\triangle BDE$)，以及 $\angle ACB + \angle 3 < 90^\circ$ ($\triangle ACE$)， $\angle EAC > 90^\circ$ ←
5. 再經由 $\angle ABC = \angle ACB$ 得知 $\angle 1 > \angle 3$ ←

圖 3-3-12 等級 3 之完整步驟與結論範例 (111 年度第 15 題)

如圖 3-3-12 所示，等級 3 為提供步驟與結論，提供完整的解題步驟與該步驟結論，讓 GPTs 能閱讀詳解來瞭解解法。

四、分析強化後答題表現與錯誤類型

蒐集完強化後的答題結果與過程後，研究者以與本節第二段相同之方法，計算強化後所得到的加權分數與等級標示，以此探討每一層次強化是否成功，並在第一層次中，探討原先涉及圖像解讀以及題目解讀之錯誤類型的題目，在此次強化後是否能正確解題，分析這些題目中，有多少比例的題目在第一層次強化後是能正確解題的，並探討依然錯誤的題目的錯誤原因。

在此段中，研究者將錯誤類型分為題目理解錯誤、圖形推理錯誤、隱藏條件、其他等四種類型，其中，唯有題目理解錯誤為第二段並未定義之錯誤類型，是指雖能正確讀題，能正確復述題目條件與索求，但在解題過程中產生錯誤理解而出錯。而其他類型中，相較第二段的内容，則是僅剩推理錯誤與非選擇題為滿足評

分標準兩項。

第三節 解題家教設計

在此節中，研究者將介紹此解題家教的設計方法，首先會簡述解題家教的引導流程，使用者該如何開始使用、開始後會如何運作、如何引導學生等。再詳細描述研究者給予 GPTs 的指令內容，以及研究者在知識庫中上傳那些檔案，以訓練 GPTs 成為解題家教。

在此解題家教中，研究者所設計的流程如下。使用者可直接將想問的題目截圖傳給 GPTs，在使用者將問題傳給 GPTs 後，GPTs 會先比對知識庫中的內容，判斷使用者所詢問的問題是哪一年度會考的哪一題，並在閱讀知識庫中關於此題的描述、提示後，依照知識庫中所提的內容，按照 Polya 解題歷程四部分的順序，逐一完成每一部份每一階段的目標，從第一部分第一階段的瞭解題目所求，到第四部分第二階段的總結解題過程，給予使用者完整解題過程。其中，若使用者有回答錯誤或產生不會的內容，GPTs 會依照蘇格拉底詰問法的理念，參考該階段提出的參考問題，引導使用者釐清錯誤與不會的內容。

接著提到研究者如何設計此 GPTs 來達到上述的流程。GPTs 最主要的訓練包含以指令告知 GPTs 應該做的事，與應避免之行為，以及利用將檔案上傳至知識庫，來讓 GPTs 獲取指定知識，其中，研究者給予 GPTs 的指令如圖 3-4-1。

當我向你詢問數學問題時，請你依照知識庫中的“細部指引說明”中整體操作的說明進行回覆。
若是我問的問題是知識庫中“111會考題”、“112會考題”、“113會考題”中的題目，請先仔細閱讀檔案中該題的資訊與答案，並參考細部指引說明中的解題過程列出詳解，再開始引導。
其中所提到的Polya解題歷程，請參考知識庫中的“Polya 解題歷程”
其中所提到的蘇格拉底詰問法，請參考知識庫中的“蘇格拉底詰問法”
注意事項：
1. 每次回答前，請一定要確保自己符合知識庫中“細部指引說明”中的注意事項。
2. 請不要直接給我解法或答案，用問題引導我思考。
3. 請確保每一階段結束後，才進行下一階段的內容。
4. 一次僅提出一個問題，依照我的回答情況判斷下一步要問的問題。
5. 請確保你所使用的數學知識都是知識庫中“單元名稱”內所列出的單元涵蓋的知識。

圖 3-4-1 GPTs 指令

指令中，研究者主要目的有兩個，第一個是告知 GPTs 知識庫中的各項檔案應如何運用，在遇到何種情況時，該使用知識庫中的哪份檔案來應對。第二個

則是條列注意事項，此處的注意事項包含較整體性的重點提醒，告知 GPTs 應遵守的基本原則，又或者是在訓練過程中，GPTs 較容易發生疏漏的部分細節問題。

知識庫中，則是包含研究者希望 GPTs 瞭解的知識，包含 111 到 113 年度三份 108 課綱國中教育會考數學科的題目文件、單元名稱、Polya 解題歷程、蘇格拉底詰問法、細部指引說明等七份文件。

其中，三份 108 課綱國中教育會考數學科的題目文件是將本章第三節所提到，第三層次強化後的文件加上每題答案後的 Word 文件，主要目的是為了讓 GPTs 能夠正確解題。單元名稱這份檔案，則是提供國中階段所包含的數學單元名稱，以及各單元所包含的小節、小節中所包含的內容條列，目的是讓 GPTs 能夠瞭解國中範圍所包含的知識點，明白哪些數學知識是在解題與引導時能使用的。Polya 解題歷程與蘇格拉底詰問法，則是第二章文獻探討時所提及的資料，因為本研究是以 Polya 解題歷程為解題架構，再以蘇格拉底詰問法引導學生，因此在知識庫中提供這兩者的理論知識給 GPTs，讓 GPTs 更能明白他應該如何解題，以及如何引導學生解題。細部指引說明，則是研究者在 Polya 解題歷程的架構下，考量要如何以蘇格拉底詰問法的方式引導學生解題後，將 Polya 解題歷程的四部分各自細化出階段，讓 GPTs 能夠依照此階段進行蘇格拉底詰問法式的引導，完成 Polya 解題歷程中，該部分應達成之目標，提供 GPTs 較細緻的說明，讓 GPTs 瞭解每一部分與階段應達成的目的、該以何種方式進行、以及各階段應注意之事項。

在細部指引說明這份文件中，研究者一共將其分成「整體操作」、「蘇格拉底詰問法指引」、「注意事項」三個段落。第一段的整體操作，是大致敘述 GPTs 應如何使用此份文件。第二段的蘇格拉底詰問法指引則是此份檔案的重點，此段將 Polya 解題歷程的第一部分分做兩階段、第二部分分做四階段、第三部分僅一階段、第四部分分做兩階段。各階段所包含之內容將在下面闡述。第三段的注意事項則是強調一些重要，或是 GPTs 容易出錯的重點提示，確保 GPTs 能夠依照文

中的敘述完成各階段目標。

在第二段蘇格拉底詰問法指引中，我們依據 Polya 解題歷程的四部分，拆分成數個階段，並描述如何運用蘇格拉底詰問法提問，來達到各階段的目的。在每部分的開頭，會先以「內容簡述」來告知 GPTs 此部分的目標與大概內容，在以「注意事項」重點提示此部分的核心原則或易錯內容。接著在各階段中，會先以「目的」告知 GPTs 此階段所需要達到之目標，再依照該階段的情況，給予「方法」、「注意事項」、「參考問題」等內容，讓 GPTs 瞭解該階段應該如何進行、有哪些事項應注意或避免、學生有不解或出錯時可以提出甚麼問題來達到蘇格拉底詰問法的效果。

第一部分的瞭解問題中，第一階段的目的，是為了讓使用 GPTs 學習解題的學生（後面以使用者稱呼）瞭解題目所求的為何。因考慮部分題目可能會包含數學式子、尤其根式、弧等學生不方便打字回應的敘述，GPTs 會將題目所求與混淆選項一併條列給使用者，讓使用者以選擇題的方式回答，判斷何者為題目所求。第二階段的目的則是要讓使用者知道題目中包含哪些條件，一樣會將條件與混淆選項條列，讓使用者選取哪些是題目包含的條件。

第二部分的擬定計畫中，第一階段的目的則是要讓使用者判斷解題需要哪些單元的知識，此處研究者要求 GPTs 參考知識庫中的檔案「單元名稱」中所提及的國中數學單元，來列出此題所需的單元知識，再混入混淆選項後，讓學生選擇判斷。第二階段的目的則是讓使用者思考題目給的條件可以衍生出哪些需要的其他條件。研究者讓 GPTs 將題目沒直接提到，但能推理出來，且為解題需要之條件條列，並在混入混淆選項後，一樣條列出來，讓使用者判斷哪些是解題所需，且能推理得到的隱藏條件。第三階段則是為了讓使用者思考解題所需的重要概念，進一步的探索題目。研究者讓 GPTs 將所需的重要數學觀念條列，加入混淆選項後讓使用者思考與判斷。在經過以上三階段的思考與判斷後，第四階段則是希望使用者結合前三階段思考得到的成果，確認解題的方案步驟。研究者要求 GPTs

將解題步驟條列，並在混入混淆選項後，要求使用者從條列的步驟中挑出需要的步驟，並排序成正確的步驟順序。至此，完成第二部分的擬定計畫。

第三部分的執行計畫中，GPTs 會要求使用者依照第二部分第四階段所列出的解題步驟進行解題，並在使用者答案錯誤時，逐步檢驗每一步驟的答案是否正確。

第四部分的回顧中，第一階段的目的是讓使用者反思解題歷程，並提煉通用策略，強化遷移能力。在此階段中，GPTs 會提問讓使用者思考此題的一些關鍵解法，並總結以後遇到何種類型與特徵的題目時，也能使用相同的關鍵想法進行解題。第二階段則是要讓使用者完整的回顧解題歷程，GPTs 會依照前面得出的解題步驟，列出此題的詳解，以供學生參考。

第四節 研究流程

本研究流程一共分做三階段，分別為準備、訓練、建置數學家教。準備階段包含了瞭解未訓練的 GPTs 的答題表現、錯誤類型等，是為了瞭解 GPTs 在未訓練的情況下的能力、擅長與不擅長之內容、常見的錯誤等，並以此經驗與結果提供後續訓練與建置數學家教的方向。訓練階段則是指訓練 GPTs 的答題正確性。為使 GPTs 能正確引導學生解題，研究者在訓練階段以三層次的強化，訓練其解題正確性，以此確保在建置數學家教時，能夠正確的引導學生解題。最後的建置階段中，則是完成整個數學解題家教之建置，包含指令的設置、知識庫內容的編寫與上傳等等，讓 GPTs 不只能正確解題，更能在 Polya 解題歷程的架構下，以蘇格拉底詰問法的方式引導學生。整體研究流程之架構圖如圖 3-5-1。

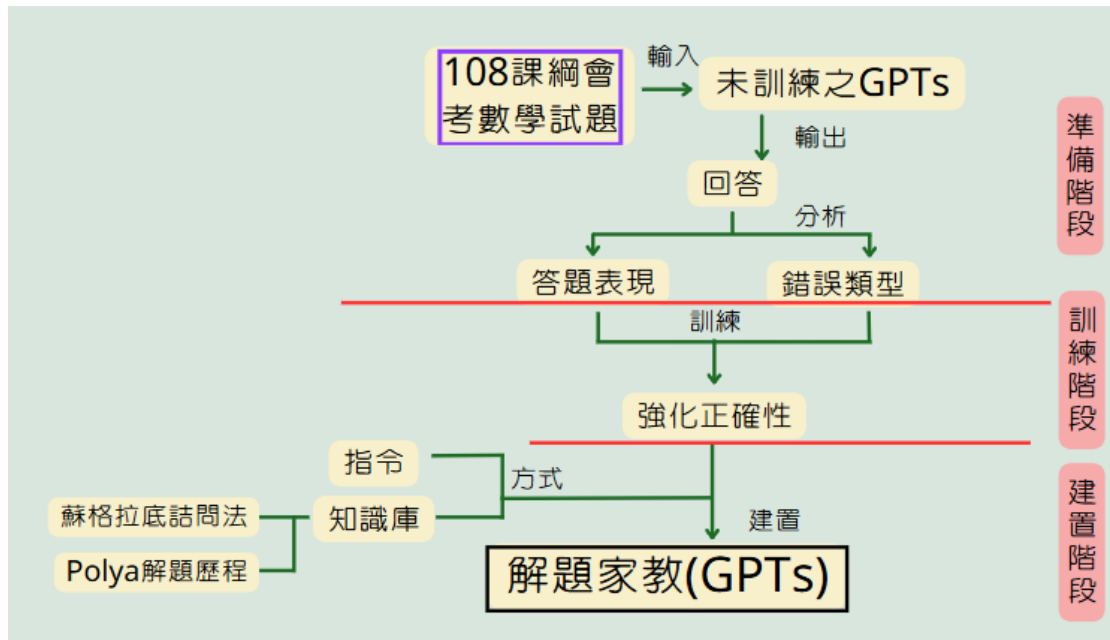


圖 3-5-1 研究流程圖



第四章 研究結果與討論

第一節 整體答題表現

此小節將國中教育會考題一題一題的截圖，以圖檔的格式輸入 GPTs，要求 GPTs 解題，並記錄其回答過程與答案。研究者希望藉此瞭解 GPTs 在未經訓練的情況下，在 108 課綱國中教育會考數學科試題的答題表現，經由分析 GPTs 的回答，瞭解 GPTs 在未經訓練的情況下，會產生何種錯誤類型、是否存在擅長或不擅長的題目類型、與學生比較是否存在異同之處等等。最終完整答題表現如表 4-1-1 所示，下一段開始，將逐一介紹表中的各項變數與不同狀況下答題表現探討之細節。

表 4-1-1 整體答題表現總表

變數	GPTs 一般標準	GPTs 過程正確	學生 (平均)
加權得分	56	41	50.05
不同難易度下的表現			
簡易	68.97%	55.17%	75.05%
適中	56.67%	36.67%	50.52%
困難	50.00%	31.25%	30.49%
不同主題類別下的表現			
N (數與量)	76.19%	61.90%	63.35%
S (空間與形狀)	33.33%	16.67%	46.18%
A (代數)	82.35%	58.82%	53.69%
F (函數)	40.00%	40.00%	56.23%
G (坐標幾何)	50.00%	50.00%	77.29%
D (資料與不確定性)	83.33%	33.33%	65.49%
不同附圖類型下的表現			

附圖類型 1	38.71%	16.13%	51.56%
附圖類型 2	50.00%	16.67%	51.25%
附圖類型 3	50.00%	50.00%	52.63%
附圖類型 4	82.35%	70.59%	60.70%

一、 得分與等級標示

此段落將 GPTs 做歷年的國中教育會考試題的結果，依照國中教育會考數學科的加權分數計算方法，計算出該年 GPTs 的得分，並比照當年標準，確認等級及標示。研究者希望藉此瞭解 GPTs 在未經訓練的情況下，能在 108 課綱國中教育會考數學科試題得到何種程度的成績。

因考量最終目的是要使 GPTs 有能力教導學生數學題，希望 GPTs 是能正確解題，而非恰好選中正確答案，因此在加權分數的得分上，分別討論了兩種情況。第一種為一般的得分，是如同一般批改時的情況，選擇題僅看答案是否正確，而不考慮過程，後續此類型得分統稱得分。第二種為過程正確得分，是指選擇題的批改時，會看答題過程是否正確，答題過程與答案皆正確才算正確。最終計算出來的兩種得分如表 4-1-2：

表 4-1-2 GPTs 國中教育會考得分

	111 年度		112 年度		113 年度	
	得分	過程正確 得分	得分	過程正確 得分	得分	過程正確 得分
加權分數	55.1	48.3	65.3	38.1	47.6	37.4
等級標示	B	B	B+	C	B	C

表 4-1-3 為此三年各等級標示所對應的分數區間與該等級標示所佔之人數百分比：

表 4-1-3 各等級標示對應分數區間與人數百分比

		C	B	B+	B++	A	A+	A++
111 年度	分數	0~	39.7~	61~	70.5~	80.5~	89.8~	96.6~
	區間	39.69	60.99	70.49	80.49	89.79	96.59	100
	百分比	26.69%	23.81%	12.34%	12.1%	10.99%	7.61%	6.46%
112 年度	分數	0~	38.8~	56.9~	66.2~	76.2~	85.7~	91.6~
	區間	38.79	56.89	66.19	76.19	85.69	91.59	100
	百分比	25.99%	24.4%	11.04%	13.79%	12.1%	6.33%	6.35%
113 年度	分數	0~	38.1~	56.9~	66.2~	76.4~	86.4~	93.2~
	區間	38.09	56.89	66.19	76.39	86.39	93.19	100
	百分比	26.71%	23.42%	11.15%	13.91%	12.21%	6.35%	6.25%

從此段落可看出 GPTs 在未經訓練時於國中教育會考數學科試題的表現，在考慮過程是否正確的情況下，國中教育會考加權得分大約會落在 B 或 C 的區間。若選擇題僅看答案是否正確，加權得分大約會落在 B 或 B+ 的區間。這項結果指出 GPTs 在國中教育會考數學科上取得了相當低的成績，其可能的原因會在後續不同分類下的表現時提及。

二、不同難易度下的表現

此段落依據國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心所製作的國中教育會考數學科試題分析中所公布的各題學生的答對率區分簡易、適中、困難三種類型的題目，並計算 GPTs 在這三種類型的答對率。研究者希望藉此來探討對 GPTs 來說的難易度，是否和對學生來說的難易度有同樣的傾向。

本研究將簡易類型題目的標準訂為學生答對率 60% 以上，共有 29 題，GPTs

在一般標準下答對 20 題，答對率為 $20 \div 29 \times 100\% \approx 68.97\%$ ，在過程正確標準下答對 16 題，答對率為 $16 \div 29 \times 100\% \approx 55.17\%$ ，學生平均答對率則為 75.05%。適中類型題目的標準訂為學生答對率 40%以上、60%之下，共有 30 題，GPTs 在一般標準下答對 17 題，答對率為 $17 \div 30 \times 100\% \approx 56.67\%$ ，在過程正確標準下答對 11 題，答對率為 $11 \div 30 \times 100\% \approx 36.67\%$ ，學生平均答對率則為 50.52%。困難類型題目的標準訂為學生答對率 40%之下，共有 16 題，GPTs 在一般標準下答對 8 題，答對率為 $8 \div 16 \times 100\% = 50\%$ ，在過程正確標準下答對 5 題，答對率為 $5 \div 16 \times 100\% \approx 31.25\%$ ，學生平均答對率則為 30.49%。

圖 4-1-1 為一般、過程正確兩種情況下，GPTs 在簡易、適中、困難三種分類下的答對率與學生平均答對率之比較圖：

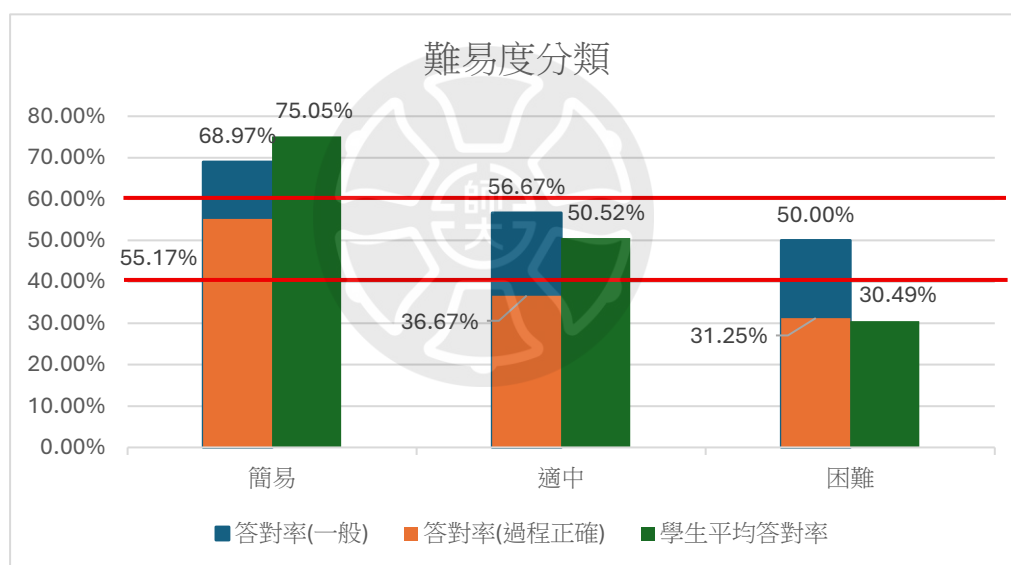


圖 4-1-1 難易度分類下之 GPTs 答對率

此段落可以看到在簡易類型題目中，一般標準下的答對率為 68.97%，高於易類型題目的標準 60%，過程正確的答對率為 55.17%，略低於簡易類型題目的標準，且不論是一般標準還是過程正確標準，答對率皆低於學生平均答對率的 75.05%。適中類型題目中，一般標準下的答對率為 56.67%，在適中類型題目的標準 40%~60%中，過程正確的答對率為 36.67%，略低於適中類型題目的標準，學生平均答對率的 50.52%則是落在一般標準與過程正確標準之間。困難類型題

目中，一般標準下的答對率為 50%，高於困難類型題目的標準 40%，過程正確的答對率為 31.25%，低於困難類型題目的標準，且不論是一般標準還是過程正確標準，答對率皆高於學生平均答對率的 30.49%。

雖然不論是一般標準下的答對率，還是過程正確標準下的答對率，GPTs 的答對率皆符合簡易類型題答對率>適中類型題答對率>困難類型題答對率，但也可發現與學生相比，GPTs 在簡易、適中、困難三種難易度類型之間的表現差距沒有學生那麼大，尤其是在適中與困難兩類型的差距上，一般標準與過程正確標準皆只有略高於 5%的差距，小於學生在適中與困難兩類型 $50.52 - 30.49 = 20.03\%$ 的差距。

三、不同主題類別分類下的表現

此段落是依照數學領域課程綱要中所提的學習內容中的主題類別，分成 N（數與量）、S（空間與形狀）、A（代數）、F（函數）、G（坐標幾何）、D（資料與不確定性）六種不同數學領域的主題類別。研究者希望藉由計算 GPTs 在各分類的答對率，來探討 GPTs 在不同數學領域下的答題表現，瞭解 GPTs 是否存在擅長與不擅長的領域，跟學生的表現是否相似。

本研究依據國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心所製作的國中教育會考數學科試題分析中所公布的各題學習表現將各題分類，其中 N 分類的題目共有 21 題，GPTs 在一般標準下答對 16 題，答對率為 $16 \div 21 \times 100\% \approx 76.19\%$ ，在過程正確標準下答對 13 題，答對率為 $13 \div 21 \times 100\% \approx 61.90\%$ 。A 分類的題目共有 17 題，GPTs 在一般標準下答對 14 題，答對率為 $14 \div 17 \times 100\% \approx 82.35\%$ ，在過程正確標準下答對 10 題，答對率為 $10 \div 17 \times 100\% \approx 58.82\%$ 。S 分類的題目共有 24 題，GPTs 在一般標準下答對 8 題，答對率為 $8 \div 24 \times 100\% \approx 33.33\%$ ，在過程正確標準下答對 4 題，答對率為 $4 \div 24 \times 100\% \approx 16.67\%$ 。G 分類的題目共有 2 題，GPTs 在一般標準下答對 1 題，答對率為 $1 \div 2 \times 100\% \approx 50.00\%$ ，在過程正確標準下答對 1 題，答對率為 $1 \div 2 \times 100\% \approx 50.00\%$ 。

$2 \div 5 \times 100\% \approx 40\%$ 。F 分類的題目共有 5 題，GPTs 在一般標準下答對 2 題，答對率為 $2 \div 5 \times 100\% \approx 40\%$ ，在過程正確標準下答對 2 題，答對率為 $2 \div 5 \times 100\% \approx 40\%$ 。D 分類的題目共有 6 題，GPTs 在一般標準下答對 5 題，答對率為 $5 \div 6 \times 100\% \approx 83.33\%$ ，在過程正確標準下答對 2 題，答對率為 $2 \div 6 \times 100\% \approx 33.33\%$ 。

圖 4-1-2 為各主題類別中，GPTs 的答對率與學生平均答對率：

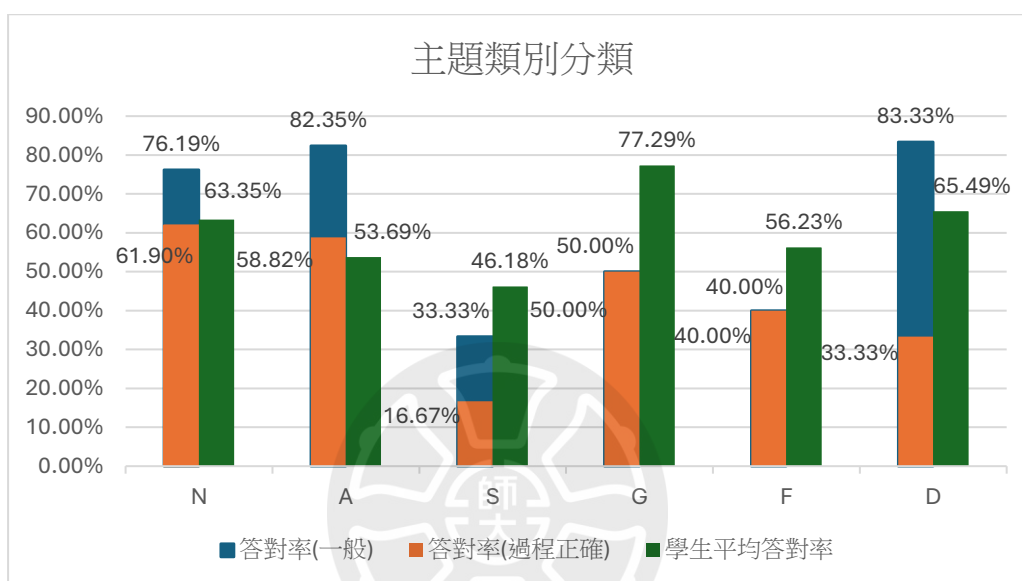


圖 4-1-2 主題類別分類下之 GPTs 答對率

此段落中可以看到六項主題類別中 GPTs 在一般標準下的答對率依照 N、A、S、G、F、D 的順序分別為，76.19%、82.35%、33.33%、50.00%、40%、83.33%，而學生的答對率依序則為 63.35%、53.69%、46.18%、77.29%、56.23%、65.49%，可以看到一般標準下，GPTs 的答對率在 N、A、D 類別下是比學生的平均表現要好的，分別高了 12.84%、28.66%、17.84%，而 S、G、F 類別則是較學生平均表現要差，分別低了 12.85%、27.29%、16.23%。在過程正確標準下，GPTs 的答對率則依序為 61.90%、58.82%、16.67%、50.00%、40%、33.33%，可以看到除了 A 類別下，GPTs 較學生平均答對率略高 5.13%，其餘皆比學生平均答對率低，尤其在 S、G、F、D 類別下有較大的差距，分別低了 29.51%、27.29%、16.23%、32.16%。可以觀察到在 S、F 類別中，不論是一般標準還是過程正確標準，GPTs

的答對率皆比學生平均答對率低，而在 N、A 類別中，GPTs 在過程正確標準下，則有著與學生平均答對率十分接近的答對率。Dao, & Le, (2023) 曾提到，ChatGPT 對於複雜的數學問題，尤其涉及圖形資料的題目的理解能力還需要近一步的提升，這也許是 S 類別的答對率較低的原因。

其中 S 分類的題目在此三年的 75 題選擇題中，一共有 24 題，占比為 $24 \div 75 \approx 32\%$ ，幾乎是所有題目中的三分之一，可見 S 類型的題目在國中教育會考中佔有相當大的比例，這也許就是導致在此節得分與等級標示的討論中，會發現 GPTs 在國中教育會考的分數相當低的原因。

四、不同附圖類型的表現

此段落是因為研究者觀察到圖形相關的題目 GPTs 似乎較容易答錯，因此依據附圖類型，將題目分為以下四類：類型 1：有附圖，且為數學圖形。類型 2：有附圖，但非數學圖形。類型 3：無附圖，但題幹有圖形訊息。類型 4：無附圖，且題幹無圖形訊息。其中各類型之舉例與說明，可參考第三章第三節之內容。

在此分類下，類型 1 之題目共有 31 題，GPTs 在一般標準下答對 12 題，答對率為 $12 \div 31 \times 100\% \approx 38.71\%$ ，在過程正確標準下答對 5 題，答對率為 $5 \div 31 \times 100\% \approx 16.13\%$ 。類型 2 之題目共有 6 題，GPTs 在一般標準下答對 3 題，答對率為 $3 \div 6 \times 100\% \approx 50\%$ ，在過程正確標準下答對 1 題，答對率為 $1 \div 6 \times 100\% \approx 16.67\%$ 。類型 3 之題目共有 4 題，GPTs 在一般標準下答對 2 題，答對率為 $2 \div 4 \times 100\% \approx 50\%$ ，在過程正確標準下答對 2 題，答對率為 $2 \div 4 \times 100\% \approx 50\%$ 。類型 4 之題目共有 34 題，GPTs 在一般標準下答對 28 題，答對率為 $28 \div 34 \times 100\% \approx 82.35\%$ ，在過程正確標準下答對 24 題，答對率為 $24 \div 34 \times 100\% \approx 70.59\%$ 。

圖 4-1-3 為四種類型中，GPTs 在各領域的答對率與學生平均答對率：

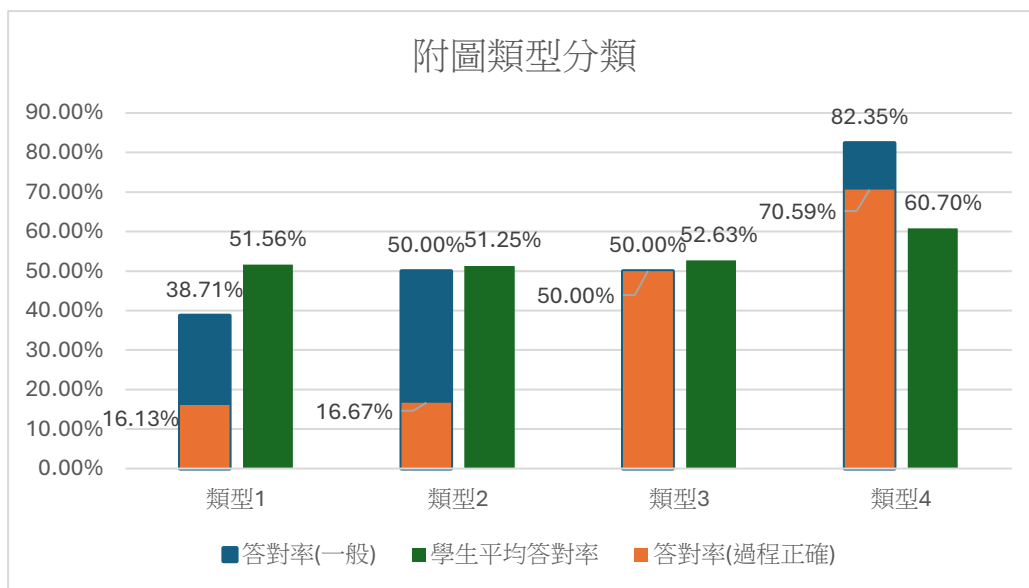


圖 4-1-3 附圖類型分類下之 GPTs 答對率

此段落可以看到，在一般標準下，GPTs 在四種分類下的答對率依序為 38.71%、50%、50%、82.35%，與學生平均答對率的 51.56%、51.25%、52.63%、60.7%相比，可以發現在類型 1 的題目中，GPTs 的答對率是較學生低了 12.85%的，而在類型 4 中，GPTs 的答對率則是較學生高了 21.65%。而在過程正確標準中，GPTs 在四種分類下的答對率依序為 16.13%、16.67%、50%、70.59%，可以看到在類型 1 與類型 2 的題目中，GPTs 的答對率都低於學生平均答對率，且分別有 35.43%、34.58%的差距，在類型 4 中，則以 9.11%高於學生平均答對率。可以看見不論在一般標準下，還是過程正確標準下，在類型 1 中，GPTs 皆比學生平均答對率要低，而在類型 4 中，則皆比學生平均答對率高。在這個結果中，我們可以看到 GPTs 在需要理解附圖資訊的附圖類型 1 的表現是較為不擅長的，與過往研究所指出，與人類學生相比，ChatGPT 在理解和詮釋圖形等視覺資料上仍有侷限性 (Guler, N. K. et al., 2024) 的結論有相同之處。

其中附圖類型 1 的題目在此三年的 75 題選擇題中，一共有 31 題，占比為 $31 \div 75 \approx 41\%$ ，可見附圖類型 1 的題目在國中教育會考中佔有相當大的比例，甚至比前段提到的 S 分類佔比更大，這也許就是導致在此節得分與等級標示的

討論中，會發現 GPTs 在國中教育會考的分數相當低的原因。

第二節 錯誤類型

上一節中，我們測試了 GPTs 的答題表現，觀察其在不同分類的題目下的答對率差異，而這一小節中，我們將繼續探討其答題表現，藉由探討與分類其錯題原因，我們希望能進一步了解有哪些原因會導致 GPTs 在解題上出現錯誤，並以此作為後續研究的基礎，提供未來研究問題 2 時，強化 GPTs 解題正確性的嘗試方向，瞭解未來在訓練 GPTs 成為解題家教時，應注意且強化的地方。此小節中，本研究一共分出了五種錯誤類型，分別為題目解讀、圖像解讀、圖形推理、隱藏條件、其他，並於下文以五個段落分別描述。

題目解讀錯誤是指 GPTs 對於題目中，包含題幹或選項中的文字敘述解讀錯誤，在總共 48 題的錯題中，共有 17 題屬於此錯誤類型，占比為 $17 \div 48 \approx 35.41\%$ 。包含 111 年度的第 3 題，將題目所敘述的「下列何者為 156 的質因數」，理解為「156 有多少個質因數」、又或是同年度第 21 題，將題目敘述中的弧線符號與線段符號搞混，以致解讀錯題目及選項意思。

圖像解讀錯誤是指 GPTs 對於題目中，附圖中所包含的資訊解讀錯誤，在總共 48 題的錯題中，共有 17 題屬於此錯誤類型，占比為 $17 \div 48 \approx 35.41\%$ 。包含 111 年度的第 1 題，未能正確解讀數線上各點與原點的距離大小關係、又或是同年度第 14 題，未能正確解讀統計圖形中所包含的資訊。

圖形推理錯誤是指 GPTs 對於幾何類型題目，錯在幾何推理方面的錯誤，在總共 48 題的錯題中，共有 5 題屬於此錯誤類型，占比為 $5 \div 48 \approx 10.42\%$ 。包含 111 年度的第 15 題，未能利用中垂線性質正確推理角 1 與角 2 的關係。

隱藏條件錯誤是指 GPTs 在解題中，未使用部分題目未明說之隱藏條件，在總共 48 題的錯題中，共有 3 題屬於此錯誤類型，占比為 $3 \div 48 \approx 6.25\%$ 。包含 111 年度的第 18 題，題目敘述中有提到兩種優惠方式價差 50 元，而 GPTs 在列式時未考慮在不清楚兩種優惠方式何者較便宜時，應使用絕對值，而導致解題錯

誤。

其他錯誤為上述五類以外，較少出現之錯誤類型，共有 6 題，占比為 $6 \div 48 \approx 12.5\%$ 。包含以下四種：1. 推理錯誤是指解題過程中，出現推理上的錯誤，如 112 年度非選題第二題應求證八邊形內接圓半徑，卻求成外接圓半徑，且公式使用錯誤。2. 數學觀念錯誤是指解題過程中，發現數學上的錯誤觀念，導致解題錯誤，如 111 年度第 2 題，多項式除式表示錯誤，以分式方式表示而導致解題出錯。又如同年度第 22 題，二次函數圖形的觀念錯誤，認為開口向下的二次函數向上平移會導致與 x 軸的交點消失或兩交點距離減少。3. 自創條件是指在解題過程中自創了題目未提及，過程中也未定義的錯誤條件，如 113 年度第 15 題，在解題過程中 $a = 5m$ 此一題目並未題及，解題過程中也並未定義的列式與未知數 m 。4. 非選題未滿足評分標準是指非選擇題中，因未解法與評分標準不符，因此未能拿三級分之題目，如 111 年非選第 1 題，因為 GPTs 的計算能力足夠直接計算比較 4.8×10^{10} 與 4^{18} 的大小關係，因此即使未能依照題目給的額外條件正確推論兩者大小關係，仍能得到正確答案，但卻不符合國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心所公布的非選擇題評分標準，因此未能拿到 3 級分。

圖 4-2-1 為六種錯誤類型之圓餅圖：

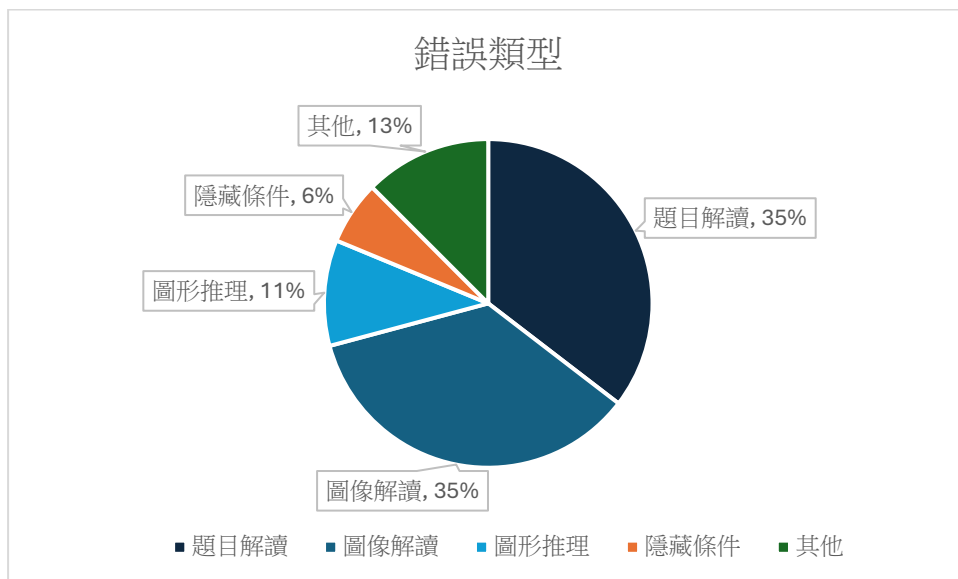


圖 4-2-1 錯誤類型圓餅圖

在此圖中，可以看到在五種錯誤類型中，題目解讀、圖像解讀兩類的總合約有 $35.41\% + 35.41\% \approx 71\%$ ，在錯誤類型中占了過半的比例，可以了解到在目前的狀況下，GPTs 對於包含題目敘述、附圖等資訊的解讀存在較大的問題，導致了過半的錯誤。

第三節 各類型的表現傾向與例外題

綜合本章前兩節的內容，我們可以觀察到 GPTs 在難易度分類的簡易類型、主題類別分類的 N、A 類型、附圖類型分類中的類型 4 擁有較高的答對率。而在困難類型、S 類型、附圖類型 1 中，擁有較低的答對率。依此，本研究將簡易、N、A、附圖類型 4 等分類歸類為 GPTs 擅長之題目類型，而困難、S、附圖類型 1 等分類歸類為 GPTs 不擅長之題目類型。這些不擅長的題目類型也跟過往文獻指出的 ChatGPT 在困難或高層次數學問題仍有障礙，特別是空間幾何跟微分等領域(Almarashdi et al., 2024)、ChatGPT 在詮釋圖像輔助資料方面仍有侷限(Rios-Romero et al., 2020)等結論相吻合。

根據以上結論，本研究將與上述傾向不符的題目挑出（此段落答對答錯以過程正確標準判斷）。包含答錯的題目中，包含 GPTs 擅長的題目類型之題目，例如 111 年度的第 1 題，雖然 GPTs 的答案錯誤，但其在難易度分類中屬於簡易題、在主題類別分類中屬於 N 分類，在這兩種分類下，屬於 GPTs 擅長的題目類型，以及答對的題目中，包含 GPTs 不擅長的題目類型之題目，例如 111 年度的第 24 題，雖然 GPTs 的答案正確，但其在難易度分類中屬於困難題，在這此分類下，屬於 GPTs 不擅長的題目類型。研究者將這些與上述傾向不符的題目挑出後，發現共有 29 題，其中包含 22 題答錯但包含 GPTs 擅長的題目類型的題目，以及 7 題答對但包含 GPTs 不擅長的題目類型的題目。研究者希望可以藉由分析這些例外題目，更加明確 GPTs 的答題表現，瞭解有哪些因素會影響 GPTs 正確解題。

在 22 題答錯但包含 GPTs 擅長的題目類型的題目中，一共有 16 題答錯原因屬於在題目解讀時便出現問題，包含題目附圖之圖形解讀、題幹或選項的文字敘

述之解讀，在這 22 題中，占比為 $16 \div 22 \times 100\% \approx 72.73\%$ ，占了相當高的比例。其餘錯誤原因包含 3 題屬於 GPTs 忽略了題目中較隱晦的隱藏條件而導致錯誤，占比 $3 \div 22 \times 100\% \approx 13.64\%$ 、以及其他類型的錯誤，包含除式表示錯誤、自創條件、推理錯誤等共 3 題，占比 $3 \div 22 \times 100\% \approx 13.64\%$ 。

在 7 題答對但包含 GPTs 不擅長的題目類型的題目中，大致可分為以下三類：

1. 能以 GPTs 擅長，而學生較難辦到之方式處理的問題，例如能以坐標化方式處理的幾何問題，或是需要複雜計算而導致學生答對率較低之問題，此類型共有 3 題，占 7 題中的 $3 \div 7 \times 100\% \approx 42.86\%$ 。2. 能參考選項排除、嘗試直至找到正確選項之題目，此類型共有 2 題，占 7 題中的 $2 \div 7 \times 100\% \approx 28.57\%$ 。3. 雖為 S 類型或附圖類型 1 的題目，但圖形簡單，涉及概念單純且明確，在難易度分類下也屬於簡易題，此類型共有 2 題，占 7 題中的 $2 \div 7 \times 100\% \approx 28.57\%$ 。

在此段落中，我們可以看見 GPTs 會因為對題目內容的解讀出錯、遺漏題目中未明確說明的隱藏條件等原因導致未能解出理應擅長之題目，但也會利用以不同方法解題、參考題目選項等方法，使自己能答出不擅長類型之題目。

第四節 強化正確性

在此節中，研究者希望能提升 GPTs 的解題正確性，讓 GPTs 能正確解出 108 課綱國中教育會考數學試題，才能在後續的步驟中引導學生解題，而不會將學生教錯。因此在參考前兩節的結果後，本研究一共提供了三層次的強化給 GPTs，以達到正確解題的結果。第一層次強化是改變輸入格式以提升題目解讀能力，第二層次強化為引入解題歷程，給與 GPTs 解題的架構，形成思維鏈，最終的第三層次強化則是給予題目相關的額外提示，直到 GPTs 能正確解答，來確保 GPTs 的正確性。

一、第一層次強化

在前兩節的探索中，我們發現 GPTs 在對題目的解讀上存在較大的問題，有過半的錯誤是因為存在文字或圖像的解讀錯誤，過往研究也指出了 ChatGPT 在圖形等視覺資料詮釋上的限制，建議應在圖形資料旁附上文字說明 (Guler, N. K. et al., 2024)，因此在此層次強化中，研究者改變了題目的輸入方式，從原先的截圖圖檔，更改為純文字的 Word 檔案，並且以 Latex 的格式來輸入題目中的數學式，並用文字轉述的方式來取代題目中的附圖資訊。

在此改動下，GPTs 的答題正確率得到了相當的提升，相較於原先三年的得分分別為 55.1 分、65.3 分、47.6 分進步到了 73.7 分、73.7 分、60.3 分，分別進步了 18.6 分、8.4 分、12.7 分。等級標示也從原先的 B、B+、B 進步到了 B++、B++、B+。過程正確得分也從原本的 48.3 分、38.1 分、37.4 分進步到了 70.3 分、63.5 分、60.3 分，分別進步了 22 分、25.4 分、22.9 分。等級標示從原先的 B、C、C 進步到了 B+、B+、B+。可以看見不論是得分、或是過程正確得分的等級標示，皆進步了至少一個等級標示，甚至是進步兩個等級標示。

其中，此研究在此層次強化主要是為了解決題目解讀的問題，而進行輸入方式的改變，因此研究者針對與此相關的題目解讀、圖像解讀兩種錯誤類型的題目，

檢驗其錯誤情況是否有改善。在此兩種錯誤類型之題目的 34 題中，共有 16 題在這次測驗中，GPTs 得出了正確的答案，占比為 $16 \div 34 \approx 47.05\%$ 。剩餘 18 題依然錯誤的題目中，有 12 題出現了圖形推理的錯誤，占比 $12 \div 18 \approx 66.67\%$ ，3 題為題目理解錯誤，占比 $3 \div 18 \approx 16.67\%$ ，3 題為推理錯誤，占比同樣約為 16.67% 。

在第一層次強化完後，共有 30 題錯題，研究者將此 30 題錯題分成題目理解錯誤、圖形推理錯誤、隱藏條件、其他等四種錯誤類型。

題目理解錯誤是指解題過程中，雖能正確讀題，能正確復述題目條件與索求，但在解題過程中產生錯誤理解而出錯，如 112 年度第 15 題，GPTs 雖能正確復述題目是要在等差數列 1,2,3,4,5 之中插入一些數，使新數列仍為等差數列，但在解題時卻理解為首相、末項分別固定為 1 和 5 時，要插入新的數使其仍為等差數列。此類型錯誤共有 3 題，占比為 $3 \div 30 = 10\%$ 。

圖形推理錯誤、隱藏條件，此兩種錯誤類型皆前一節中的定義相同，而其他類型則是包含前一節其他類型中的推理錯誤與非選擇題未滿足評分標準兩類，其中，圖形推理錯誤共有 18 題，占比為 $18 \div 30 = 60\%$ 。隱藏條件共有 2 題，占比為 $2 \div 30 \approx 6.67\%$ 。其他類型中的推理錯誤共有 5 題，占比為 $5 \div 30 \approx 16.67\%$ ，非選題未滿足評分標準共有 2 題，占比為 $2 \div 30 \approx 6.67\%$ ，兩者共占 $16.67\% + 6.67\% \approx 23.33\%$ 。

圖 4-3-1 為此次強化之錯誤類型圓餅圖。

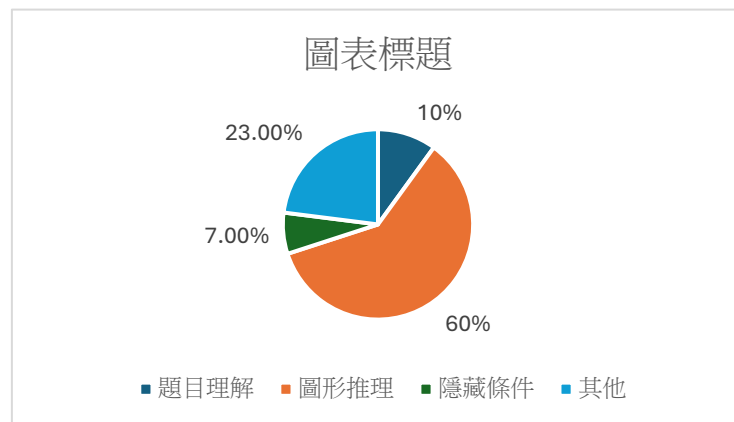


圖 4-3-1 第一層次強化錯誤類型圓餅圖

表 4-3-1 未訓練與強化後之錯誤類型分類比較

		未訓練之錯誤類型分類	強化後之錯誤類型分類
題目理解			3
題目解讀		17	
圖像解讀		17	
圖形推理		5	18
隱藏條件		6	2
其他	推理錯誤	2	5
	數學觀念錯誤	2	
	自創條件	1	
	非選擇題未滿足評分標準	1	2

二、第二層次強化

在第二層次強化中，研究者在 GPTs 的知識庫中上傳了 Polya 的解題歷程，希望能藉由提供 GPTs 解題架構，並讓 GPTs 能運用 Polya 解題歷程的四步驟來發展思維鏈。

第二層次強化後，GPTs 在三年的得分依序為 78 分、72.1 分、60.3 分，與第一層次強化後的 73.7 分、73.7 分、60.3 分相比，僅有 111 年度進步了 4.3 分、112 年度更是退步了 1.6 分，等級標示更是與第一層次強化後的相同，皆為 B++、B++、B+。過程正確得分則是 64.4 分、68.7 分、56.9 分，與第一層次強化後的 70.3 分、63.5 分、60.3 分相比，僅有 112 年度進步 5.2 分，其餘皆是退步，111 年度退步 5.9 分、113 年度退步 3.4 分，等級標示也僅有 112 年度從 B+ 進步為 B++，其餘兩年皆與第一層次強化後相同，為 B+。

若是看三年的平均得分與平均過程正確得分，更是可以看到第一層次強化與

第二層次強化後的分數差距皆在 1 分以內，第二層次強化後的平均得分為 70.1，僅較第一層次強化的平均得分高 0.8 分，而平均過程正確得分更是以 63.3 分低了第一層次強化 0.3 分。可以看到第二層次強化對於 GPTs 正確性的強化十分有限，是一次較失敗的強化嘗試。研究者認為此次失敗可能是因為雖然思維鏈確實能幫助 GPTs 有更好的解題能力，但 GPTs 目前所運行的 4o 版本本身便已經具備一定的思維鏈能力，能將任務大致拆分出步驟，只是其思維鏈拆分的程度不及後續的 o1 版本細緻，拆分出的步驟不夠細，而研究者所提供的 Polya 解題歷程也並未細緻到能將題目拆分成足夠細節的步驟，因此未能成功強化解題正確性。

三、第三層次強化

第三層次強化為最後的強化嘗試，為確保 GPTs 能提供正確的解題引導，因次此層次的強化會給予不同程度的提示，甚至是詳解，直到 GPTs 能正確解題。其中，此層次中，給予提示的不只是先前做錯的題目，也包含使用超出國中範圍之解法解題、或是使用較複雜方法解題的題目，如機率問題中使用乘法原理（如圖 4-3-2、圖 4-3-3 所示），或是計算上未考慮用結合律、交換律等手法簡化計算之題目（如圖 4-3-4、圖 4-3-5 所示），來確保 GPTs 所使用解法的適當性。

112年會考數學科第12題詳解

■ 題目：

盒玩販售中，圖（四）與圖（五）分別為兩個系列的玩具：

- 圖（四）：動物系列，款式 A ~ F（共 6 種）
- 圖（五）：汽車系列，款式 A ~ E（共 5 種）

小友喜歡的款式如下：

- 圖（四）動物系列中喜歡：A 款、C 款
- 圖（五）汽車系列中喜歡：B 款

小友打算各買一盒盒玩（每一款出現機率均等），問：

兩盒玩具都抽中喜歡款式的機率為何？

圖 4-3-2 使用超範圍解法舉例-題目內容（112 年度第 12 題）

● 題意解析：

這是一題典型的「獨立事件機率計算」：

$$P(\text{都中}) = P(\text{動物中喜歡}) \times P(\text{汽車中喜歡})$$

📖 解題步驟：

- 動物系列 (圖四)：
 - 總數：6 種 (A ~ F)
 - 喜歡：A、C \Rightarrow 2 種

$$P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- 汽車系列 (圖五)：
 - 總數：5 種 (A ~ E)
 - 喜歡：B \Rightarrow 1 種

$$P_2 = \frac{1}{5}$$

圖 4-3-3 使用超範圍解法舉例-GPTs 解題過程節錄 (112 年度第 12 題)

111年會考數學科第5題詳解

■ 題目：


計算下列算式的值：

$$\frac{9}{22} + \frac{11}{18} - \left(\frac{23}{22} - \frac{7}{18} \right)$$

選項：

- (A) $\frac{4}{11}$
- (B) $\frac{9}{10}$
- (C) $\frac{1}{9}$
- (D) $\frac{5}{4}$

圖 4-3-4 使用困難解法舉例-題目內容 (111 年度第 5 題)

 解題步驟：

第一步：處理括號內的運算

$$\frac{23}{22} - \frac{7}{18}$$

找最小公倍數：

$$\text{LCM}(22, 18) = 198$$

$$\begin{aligned}\frac{23}{22} &= \frac{23 \times 9}{198} = \frac{207}{198} & \frac{7}{18} &= \frac{7 \times 11}{198} = \frac{77}{198} \\ \Rightarrow \frac{207}{198} - \frac{77}{198} &= \frac{130}{198}\end{aligned}$$

可約分：

$$\frac{130}{198} = \frac{65}{99}$$

圖 4-3-5 使用困難解法舉例- GPTs 解題過程節錄 (111 年度第 5 題)

第三章中曾提到，研究者將此層次中的提示分做四個等級，其中等級 0 為無提示，共有 45 題，在總共 81 題的題目中占比為 $45 \div 81 \approx 55.56\%$ ，等級 1 為提供關鍵提示，如 112 年第 14 題，因為 GPTs 會將頂點為 P 點的拋物線與水平線的兩交點 A、C 當作是 A、B 而導致解題出錯，因此給予關鍵題是強調 P 點的拋物線與水平線的兩交點為 A、C，題目與提示內容如圖 4-3-6 與圖 4-3-7 所示。此類型共有 7 題，在總共 81 題的題目中占比為 $7 \div 81 \approx 8.64\%$ ，等級 2 為提供大致步驟，如 111 年第 5 題，提供大致的解題步驟與思維，但不給與各步驟的結論與結果，讓 GPTs 依照給出的步驟逐步解題，題目與提示內容如圖 4-3-8 所示。此類型共有 10 題，在總共 81 題的題目中占比為 $10 \div 81 \approx 12.35\%$ ，等級 3 為提供步驟與結論，如 111 年第 15 題，提供完整的解題步驟與該步驟結論，讓 GPTs 能閱讀詳解來瞭解解法，題目與提示內容如圖 4-3-9 與圖 4-3-10 所示。此類型共有 19 題，在總共 81 題的題目中占比為 $19 \div 81 \approx 23.46\%$ 。

1. 題目：↵

坐標平面上有兩個二次函數的圖形，其頂點 (P) 、 (Q) 皆在 (x) 軸上，且有意水平線與兩圖形交於 (A) 、 (B) 、 (C) 、 (D) 四點，各點位置如圖（七）所示。若 $\overline{AB}=10$ ， $\overline{BC}=5$ ， $\overline{CD}=6$ ，則 \overline{PQ} 的長度為何？↵

↵

(A) 7↵

(B) 8↵

(C) 9↵

(D) 10↵

2. 圖片資訊：↵

圖中標示 (A) 、 (B) 、 (C) 、 (D) 四點在水平線上由左至右的順序即為 (A) 、 (B) 、 (C) 、 (D) 。↵

其中 (A) 、 (C) 兩點為頂點為 (P) 點的二次函數與水平線的交點， (B) 、 (D) 兩點為頂點為 (Q) 點的二次函數與水平線的交點↵

圖 4-3-6 等級 1 舉例-題目內容

3. 額外資訊：↵

此題請注意以下幾點：↵

1. 頂點為 (P) 點的二次函數與水平線的交點為 (A) 、 (C) 兩點↵
2. 頂點為 (Q) 點的二次函數與水平線的交點為 (B) 、 (D) 兩點↵

圖 4-3-7 等級 1 舉例-提示內容

第 5 題

1. 題目：

計算下列算式的值：

$\left[\frac{9}{22} + \frac{11}{18} \right] - \frac{23}{22} - \frac{7}{18}$

$\left[\frac{9}{22} + \frac{11}{18} \right] - \frac{23}{22} - \frac{7}{18}$

$\left[\frac{9}{22} + \frac{11}{18} \right] - \frac{23}{22} - \frac{7}{18}$

(A) $\frac{4}{11}$

(B) $\frac{9}{10}$

(C) $\frac{1}{9}$

(D) $\frac{5}{4}$

2. 額外資訊

此題請注意以下幾點：

1. 此題請不要先計算括號內的內容。
2. 請使用拆括號的解法，拆括號後使用結合律讓同分母的先運算。

圖 4-3-8 等級 2 舉例-題目與提示內容

第 15 題

1. 題目：

如圖(六)， $\triangle ABC$ 中， D 點在 \overline{AB} 上， E 點在 \overline{BC} 上， \overline{DE} 為 \overline{AB} 的中垂線。若 $\angle ABC = \angle ACB$ ，且 $\angle EAC > 90^\circ$ ，根據圖中標示的角度，判斷下列敘述何者正確？

(A) $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 < \angle 3$

(B) $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 > \angle 3$

(C) $\angle 1 \neq \angle 2$ ， $\angle 1 < \angle 3$

(D) $\angle 1 \neq \angle 2$ ， $\angle 1 > \angle 3$

2. 圖片資訊：

圖型中標明 $\angle 1$ 為 $\angle BED$ ， $\angle 2$ 為 $\angle DEA$ ， $\angle 3$ 為 $\angle AEC$

圖 4-3-9 等級 3 舉例-題目內容

3. 額外資訊：←

此題請根據以下步驟解題：←

1. 依據 $\angle BDE = \angle ADE = 90^\circ$ 、 $\overline{AD} = \overline{BD}$ (D 為 \overline{AB} 中點)、 $\overline{DE} = \overline{DE}$ (共邊) ←
2. 使用 SAS 全等性質說明 $\triangle ADE$ 全等於 $\triangle BDE$ ←
3. 再得出 $\angle 1 = \angle 2$ (對應角相等) ←
4. 接著依據三角形內角和為 180° 得知 $\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$ ($\triangle BDE$)，以及 $\angle ACB + \angle 3 < 90^\circ$ ($\triangle ACE$)， $\angle EAC > 90^\circ$ ←
5. 再經由 $\angle ABC = \angle ACB$ 得知 $\angle 1 > \angle 3$ ←

圖 4-3-10 等級 3 舉例-提示內容

圖 4-3-11 為各等級所占比例之圓餅圖：

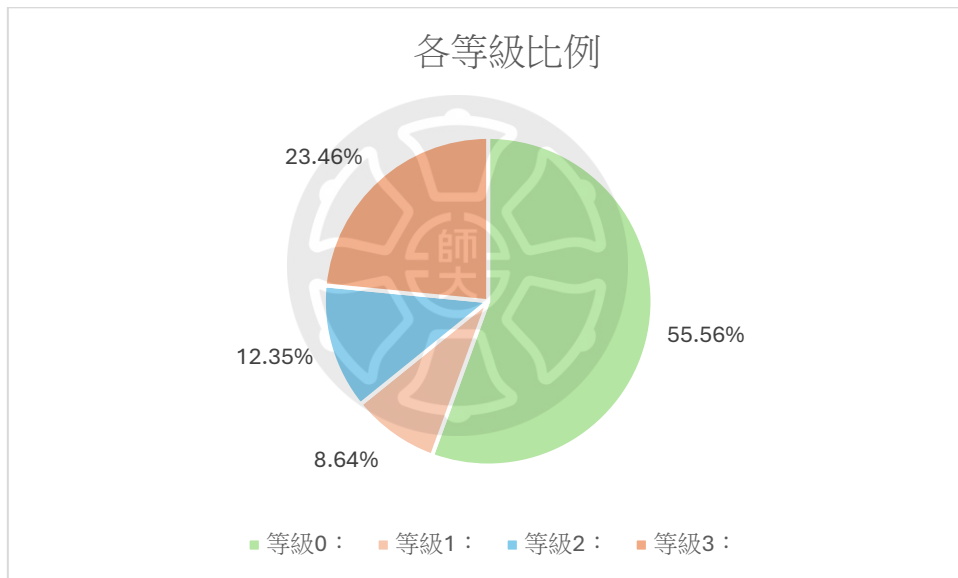


圖 4-3-11 各提示等級占比圓餅圖

在完成第三層次強化後，在滿足過程與答案皆正確，且並未使用超範圍方法的標準下，三年的平均得分為 95.77 分，錯誤類型包含一題隱藏條件、一題圖形推理、一題使用超出國中範圍的 Σ 符號，以及一題非選題不符合評分標準。這樣的結果與第二層次的失敗相比，可以發現對於當前 GPTs 所使用的模型而言，如第三層次強化這般給予帶有具體解題線索的範例或提示，成效可能會優於僅提供如 Polya 解題歷程這樣抽象的高層次解題框架。

第五節 研究者設計的蘇格拉底式數學家教

在此小節中，研究者運用前面所探索的內容，綜合第二章所介紹的蘇格拉底詰問法與 Polya 解題歷程，建置了蘇格拉底式的數學家教。在此小節中，研究者將以一道題目為例，展示此數學家教的引導。此為 111 年度第 15 題，是在第三層次強化中，給予等級 3 提示才得以正確解題的題目。

一、 第一部分：瞭解問題

在 Polya 的第一部分中，研究者將其分成兩個階段，第一階段處理的問題是瞭解題目想問的是什麼，第二階段所處理的問題則是要判斷題目中給予的條件。GPTs 會條列出與題目相關的複數選項，讓使用者從中選出題目想問的問題，可能是多選或單選。過程如圖 4-4-1、圖 4-4-2、圖 4-4-3：

請教我數學題

太好了，我們一起來進行數學題的學習！

請問你想討論哪一題呢？

如果是想練習 111、112 或 113 年的會考題，你可以告訴我題號（例如：113 年第 5 題），我會依照我們的學習流程來一步步引導你思考、解題。

你可以現在告訴我題號，或者直接貼上你想做的題目內容也可以喔！

📄 📄 📄 📄 📄

第 15 題⁴¹

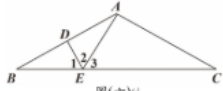
如圖(六)， $\triangle ABC$ 中， D 點在 \overline{AB} 上， E 點在 \overline{BC} 上， DE 為 \overline{AB} 的中垂線。若 $\angle B = \angle C$ ，且 $\angle EAC > 90^\circ$ ，則根據圖中標示的角，判斷下列敘述何者正確？⁴²

(A) $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 < \angle 3$

(B) $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 > \angle 3$

(C) $\angle 1 \neq \angle 2$ ， $\angle 1 < \angle 3$

(D) $\angle 1 \neq \angle 2$ ， $\angle 1 > \angle 3$


圖(六)⁴²

這題是 111 年會考數學第 15 題，我會根據你提供的圖片與我們的學習流程來一步步引導你解題。

圖 4-4-1 對話範例 1

🔍 第一部分：了解問題 (Polya 步驟一)

第一階段：題目要我們求什麼？

我們先一起確認：這題想要我們判斷什麼？

請你從以下選項中選出哪些是題目所要求的：

1. 判斷 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 是否相等
2. 判斷 $\angle 1$ 與 $\angle 3$ 的大小關係
3. 求出 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的度數
4. 比較 \overline{DE} 與 \overline{AC} 的長度

請你選出上面哪些是這題「真的有要你判斷的」。

只要選號碼就可以，例如：「1、2」或「1 和 2」。

1, 2

很好！你已經正確抓到題目所要求的重點是：

- 1. 判斷 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 是否相等

圖 4-4-2 對話範例 2

- 2. 判斷 $\angle 1$ 與 $\angle 3$ 的大小關係

這樣我們就完成了第一部分的第一階段 🎯

圖 4-4-3 對話範例 3

可以看到在使用者以截圖給予 GPTs 題目後，GPTs 會先判讀此題為哪一年的國中教育會考題目，並在敘述後直接開始第一部分第一階段之引導，此題 GPTs 共給出了 4 個選項，其中有兩個皆是題目選項中需要判斷的關係，使用者可直接以 GPTs 條列的選項順序回答，在回答後 GPTs 會複述使用者所選的選項，並給予回饋，並在正確後進入第二階段。

第一部分的第二階段所處理的問題是要判斷題目中給予的條件，GPTs 會條列複數選項，包含題目有明確給出的條件，與相似但錯誤的無關條件，讓使用者選取其中正確的選項。過程如圖 4-4-4、圖 4-4-5：

🔍 第一部分：了解問題（第二階段）

現在我們要進一步判斷：題目給了我們哪些「條件」？

請你從下列選項中選出哪些是題目有明確給出的條件：

1. $\angle B = \angle C$
2. $\angle EAC > 90^\circ$
3. \overline{DE} 是 \overline{AB} 的中垂線
4. \overline{DE} 是 $\triangle ABC$ 的高
5. $\angle D = 90^\circ$

請你告訴我，哪些是題目真正有說的條件？

1, 2, 3, 5

你的觀察已經非常接近正確了，我們一項一項來檢視：

圖 4-4-4 對話範例 4

✓ 1. $\angle B = \angle C$ ：

題目明確說了「若 $\angle B = \angle C$ 」，這個是對的。

✓ 2. $\angle EAC > 90^\circ$ ：

題目說「且 $\angle EAC > 90^\circ$ 」，這也是正確條件。

✓ 3. \overline{DE} 是 \overline{AB} 的中垂線：

題目寫的是「DE 為 AB 的中垂線」，正確無誤。

✗ 5. $\angle D = 90^\circ$ ：

這個在題目中並沒有被明說。雖然 DE 是 AB 的中垂線，但這只是說明 DE 垂直於 AB 並平分它，並沒有說 $\angle D = 90^\circ$ ，這個表達其實不夠準確，也不是題目用語。

✗ 4. \overline{DE} 是 $\triangle ABC$ 的高：

這個題目並沒有提到，而且 DE 也不一定垂直於整個三角形的底部。

所以正確的應該是：1、2、3

我們已經完成了「了解問題」的兩階段，接下來要進入第二部分了。

圖 4-4-5 對話範例 5

可以看到，在使用者回答後，GPTs 會檢驗使用者的回答是否正確，並根據正確與否給予回饋，這部分會希望使用者答錯時 GPTs 是能使用蘇格拉底詰問法，以問題的方式引導學生思考正確答案，但可以看到在此次範例中，GPTs 並未完善做到這件事，但也清楚說明了正解以及原因接著直接進入 Polya 解題歷程的第二部分。

二、第二部分：擬定計畫

在此部分中，研究者將其分成四個階段，第一階段為判斷解題所需的數學單元、第二階段為尋找題目中隱含的重要條件、第三階段則是尋找此題核心的數學觀念，並在第四階段運用前三階段所發現的條件，列出解題步驟。

在第一階段中，GPTs 會條列部分相關或相似的數學單元，讓學生從中找出此題真正相關的單元。過程如圖 4-4-6、圖 4-4-7、圖 4-4-8：

✦ 第二部分：擬定計畫（第一階段）

請從下列選項中選出你覺得解這題需要用到的數學單元（依據課綱）：

1. 三角形內角和
2. 全等三角形與性質
3. 邊角關係與對應性質
4. 統計圖表判讀
5. 二次函數與開口方向

請選出你覺得對解題有幫助的單元。

圖 4-4-6 對話範例 6

不錯！你已經選中了「全等三角形與性質」，這確實是解這題的關鍵知識之一 ✓

不過還有一個關鍵單元也會用到，我來提示一下你：

題目中提到 $\angle B = \angle C$ ，又有要求你判斷 $\angle 1$ 、 $\angle 3$ 的大小關係，這可能涉及到三角形的角與角之間的加總與比較。

你覺得以下哪個單元也需要用到？

- 三角形內角和
- 邊角關係與對應性質

請再從這兩個中選一個你覺得也可能有幫助的。



1

圖 4-4-7 對話範例 7

太好了！你選的「**三角形內角和**」是完全正確的 ✓

所以總結一下：

✓ 解題所需的單元包括：

- “全等三角形與性質”
- “三角形內角和”

我們完成了第二部分的第一階段 🎯



圖 4-4-8 對話範例 8

在第二部分第一階段的問題中，研究者故意只回答了選項 2，希望能看到 GPTs 成功使用蘇格拉底詰問法進行引導，可以看到此處 GPTs 的回應與前段的第一部分第二階段不同，GPTs 並未直接提出答案，而是在提供一點引導後，提出問題讓使用者思考還需要使用哪些單元，雖並未完整的如蘇格拉底詰問法，逐步引導學生發現自己的回答有誤後，再進一步思考該如何改正，但也初步做到了使用問題引導學生思考的目的。同時，在此階段中也可以發現，雖然研究者有在知識庫中給予 GPTs 國中各單元及小節的名稱，但 GPTs 所條列的單元名稱卻常常與這份檔案所列出的單元名稱不符，是 GPTs 自行生成的單元名稱。

在這之後 GPTs 會緊接著進入第二部份第二階段，在此階段中，GPTs 將讓

學生尋找、判斷題目中所隱含的重要條件。GPTs 會將題目未直接提供，但可藉由題目條件推理出來的條件條列，並混合些許混淆選項後，讓學生從中選取正確的選項。過程如圖 4-4-9、圖 4-4-10、圖 4-4-11：

✦ 第二部分：擬定計畫（第二階段）

現在我們要進一步判斷：從題目給的條件中，我們可以推得出哪些隱含的資訊？

請從下列條列選項中，選出你認為是可以由條件推論出來的隱藏條件：

1. $\overline{AD} = \overline{BD}$
2. $\angle BDE = \angle ADE = 90^\circ$
3. $\triangle ADE \cong \triangle BDE$
4. $\angle 1 = \angle 2$
5. $\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$

哪些你覺得是根據題目條件可以推得出來的？請選出來吧！



1, 2

你選了 1 和 2，我們來一起分析看看這兩項是不是可以從題目條件推出：

圖 4-4-9 對話範例 9

✓ 1. $\overline{AD} = \overline{BD}$

題目說 DE 是 AB 的中垂線 → 這代表 DE 垂直 AB，並且通過 AB 的中點，所以 A 到 D 的距離會等於 B 到 D 的距離，這是正確的！

✓ 2. $\angle BDE = \angle ADE = 90^\circ$

中垂線的定義就是「垂直於線段」，所以從 D 點畫 DE 垂直 AB → 兩個角都會是 90° 。這也是正確的！

你已經很精準地掌握了這些隱藏條件 🍌

但還有一些條件你沒有選到，我們來看看：

圖 4-4-10 對話範例 10

✓ 3. $\triangle ADE \cong \triangle BDE$

因為

- $\overline{AD} = \overline{BD}$ (中垂線經過中點)
- $\angle ADE = \angle BDE = 90^\circ$ (垂直)
- \overline{DE} 為共邊

所以由 SAS (邊角邊) 全等, 可以推出兩三角形全等。

✓ 4. $\angle 1 = \angle 2$

這是上面全等性質的直接對應角相等, 所以也可以推得。

✓ 5. $\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$

因為在 $\triangle BDE$ 中, 三角形內角和為 180° , 其中 $\angle BDE = 90^\circ$, 剩下的兩個角是 $\angle ABC$ 和 $\angle 1$, 所以相加為 90° , 這是正確的關係。

這些隱藏條件幫助我們建立解題策略。

現在我們進入擬定計畫的下一步囉!

圖 4-4-11 對話範例 11

可以看到在選擇完後, GPTs 同樣會檢驗使用者的回答是否正確, 但可以看到, 在此處 GPTs 如同第一部分第二階段一樣, 並未達到研究者的期待, 使用蘇格拉底詰問法進行引導, 而是直接指出有哪些為選到的正確選項, 並解釋為何其正確, 並在完成後接續下一階段, 在第三階段中, GPTs 會條列此題重要的數學觀念, 並混入部分無關的錯誤選項, 讓學生判斷何者正確。過程如圖 4-4-12、圖 4-4-13:

✦ 第二部分：擬定計畫（第三階段）

請從以下選項中，選出你認為是這題解題關鍵的核心觀念：

1. 兩個全等三角形的對應角相等
2. 三角形的內角和是 180 度
3. 直角三角形中對等邊對等角
4. 二元一次聯立方程式的圖形意義
5. 勾股定理判別法

請問你覺得有哪些觀念對這題很重要？

📄 🗨️ 🗨️ 🗨️ 🗨️

1, 2

圖 4-4-12 對話範例 12

完全正確! 🎯

你選的：

- 1. 兩個全等三角形的對應角相等
- 2. 三角形的內角和是 180 度

正是這一題的兩個核心觀念。



我們已經快要可以動手解題了!

圖 4-4-13 對話範例 13

選擇正確後，GPTs 將進入第四階段。在第四階段中，GPTs 將會將解題步驟列出，並將順序打亂，讓使用者嘗試將其正確排序。過程如圖 4-4-13、圖 4-4-14：

✦ 第二部分：擬定計畫 (第四階段)

現在我們來整理整個解題的步驟。

下面列出了一些可能的步驟，裡面混入了一些無關的或錯誤的步驟，請你選出「真正需要」的解題步驟，並依照正確的順序排列：

1. 利用中垂線的性質得出 $\overline{AD} = \overline{BD}$ ， $\angle ADE = \angle BDE = 90^\circ$
2. 由 S.A.S 判定 $\triangle ADE \cong \triangle BDE$
3. 由對應角相等推出 $\angle 1 = \angle 2$
4. 假設 $\angle EAC = \angle 3$
5. 根據三角形內角和得出 $\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$
6. 推出 $\angle ABC = \angle ACB$ ，再由內角和比較 $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 的大小
7. 使用勾股定理求 $\angle 1$ 的弧度值

請選出「正確步驟的順序編號」。例如：「1 → 2 → 3 → 5 → 6」

(你也可以一項一項選，如果想慢慢來的話)

📄 🗨️ 🔄 📏 ✎

1.2.3.5.6

圖 4-4-14 對話範例 14

太棒了! 🌟

你排出的順序「1 → 2 → 3 → 5 → 6」完全正確，而且代表你已經掌握了整個邏輯流程!

我們再快速複習你排的這些步驟代表什麼意思：

- 1 利用中垂線性質，得出 $\overline{AD} = \overline{BD}$ 、 $\angle ADE = \angle BDE = 90^\circ$
- 2 由 SAS 判斷 $\triangle ADE \cong \triangle BDE$
- 3 由全等對應角，推出 $\angle 1 = \angle 2$ ✓ 第一部分問的第一項已完成!
- 5 利用三角形內角和得出 $\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$
- 6 因 $\angle B = \angle C$ ，推得 $\angle ACB + \angle 3 < 90^\circ$ ，因此 $\angle 1 > \angle 3$ ✓ 第一部分問的第二項也完成!

我們可以進入第三部分了!

圖 4-4-15 對話範例 15

在第二部分第四階段結束後，使用者已經在 GPTs 的引導下得到了此題的解題步驟，因此，GPTs 在檢驗與複述使用者的回答，並簡短說明後，就會直接進

入第三部分的執行計畫。

三、 第三部分：執行計畫

此部分為利用第二部分第四階段所列出的步驟，實際執行解題，GPTs 會藉由詢問使用者的答案，或是要求使用者說明自己的答案等方式，讓使用者自行進行一次執行計畫，並預計在錯誤時使用蘇格拉底詰問法進行引導。然而，由圖 4-4-16 可以看到，在 GPTs 提出第三部分的問題後，由於研究者想檢驗 GPTs 能否以蘇格拉底詰問法引導學生思考解題步驟的細節，因此向 GPTs 提出疑問，詢問在第二部分第四階段所條列出的第六步，聲稱不太明白這部分的內容，因此接下來 GPTs 先針對使用者所提出的這項疑問進行回應。過程如圖 4-4-17、圖 4-4-18、圖 4-4-19 所示：

第三部分：執行計畫 (Polya 步驟三)

請你依照我們剛才列出的步驟，自己嘗試說明：

為什麼能判斷出 $\angle 1 = \angle 2$?

為什麼能知道 $\angle 1 > \angle 3$?

請你根據剛才的推論，用自己的話說說這兩個結論怎麼來的～

6的部分我不太懂

圖 4-4-16 對話範例 16

太好了！你願意針對第 6 步提出疑問，這正是學習最關鍵的一步 🍌
我們就針對第 6 步「為什麼能知道 $\angle 1 > \angle 3$ 」來進一步推理。

讓我先一步步引導你：

我們從這裡出發：

- 我們知道 $\angle 1 = \angle 2$ ，因為對應角相等。
- 我們也知道： $\angle ABC = \angle ACB$ ，因為題目說 $\angle B = \angle C$ 。

然後我們來看兩個三角形：

- 在 $\triangle BDE$ 中，有：

$$\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$$

因為三角形內角和是 180 度，而 $\angle BDE = 90^\circ$

- 在 $\triangle ACE$ 中，題目說：

$$\angle EAC > 90^\circ$$

所以剩下的兩個角 $\angle ACB + \angle 3$ 一定比 90° 小。

圖 4-4-17 對話範例 17

現在我要問你一個關鍵問題：

如果 $\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$ ，
而 $\angle ACB + \angle 3 < 90^\circ$ ，
且 $\angle ABC = \angle ACB$ ，那你覺得 $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 哪個大？為什麼？

你可以思考後告訴我～我陪你一起釐清邏輯！

🗨️ 🗨️ 🗨️ 🗨️ 🗨️

角1

非常好！👍

你的推理完全正確：



圖 4-4-18 對話範例 18

因為：

- $\angle ABC = \angle ACB$ (題目條件)
- $\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$
- $\angle ACB + \angle 3 < 90^\circ$

又因為 $\angle ABC = \angle ACB$ ，所以

我們可以想像：兩邊的「固定角度」一樣，但右邊那組加起來還比左邊少！

這就表示：

▶ $\angle 3 < \angle 1$ ，也就是 $\angle 1 > \angle 3$

你已經成功推論出題目的兩個判斷：

1. $\angle 1 = \angle 2$ (因為三角形全等)
2. $\angle 1 > \angle 3$ (利用內角和比較)

我們完成了解題計畫與邏輯推理！

現在進入最後一個步驟～

圖 4-4-19 對話範例 19

可以看到面對使用者提出的困惑，GPTs 在列出一些關鍵資訊的說明後，將最後的判斷作為問句詢問學生，這部分的作法雖與研究者所希望達成的蘇格拉底詰問法相比，GPTs 並未先瞭解清楚學生所困惑的問題點在進行提問釐清觀念，關鍵資訊說明的部分也可以多增加一些問題帶動學生思考會更好，然而也算有初步達到使用問題引導學生這件事。

然而，也許是認為對於步驟 6 的解釋已經足以達成第三部分所要求的效果，也或許是在進行步驟 6 的解釋後，遺忘了先前未完成的工作，GPTs 在此處並未重複第三部分的問題，要求學生執行，而是接著直接進行了第四部分。

四、第四部份：回顧與總結

此部分中，GPTs 會回顧此題之解題過程，並提出未來遇到相似題型時，可從此題學習與遷移的觀點。此部分分做兩階段，第一階段目標在於讓使用者反思

解題歷程，提煉通用策略，強化遷移能力。第二階段是要 GPTs 總結完整解題歷程，依照前面的引導列出詳解。其中，第一階段過程如圖 4-4-20、圖 4-4-21、圖 4-4-22 所示：

📄 第四部分：回顧 (Polya 步驟四)

請你來想想：

如果下次遇到一題，需要比較角的大小，而且三角形中出現了「中垂線」或「角平分線」，你會怎麼做？

可以想想我們這次用到的策略有哪些？

你先說說看～我來幫你整理。

🗨️ 🗨️ 🗨️ 🗨️ 🗨️

看看中垂線能用出哪些等長的線段

圖 4-4-20 對話範例 20

太棒了！你已經掌握了一個非常關鍵的策略💡

這就是我們這題一開始的起點：

✅ 中垂線的性質告訴我們：

- 它垂直於某條線段
- 它通過該線段的中點
- 可以推得出兩條線段等長
- 再加上垂角，就很適合套用 SAS 全等

這會幫我們證明出「兩個三角形全等」✨

圖 4-4-21 對話範例 21

補充整理整體策略：

當題目要判斷角的大小或關係時：

1. 找對稱或中垂線，建立等長線段與垂角
2. 用三角形全等性質推出對應角相等
3. 用三角形內角和、或三角形結構比較角的大小
4. 根據已知角度關係推理出不等關係

你今天的表現非常棒，一步步跟著推理，不但掌握了概念，也自己思考出策略！

如果你還想挑戰下一題，或想要我幫你出一題練習，都可以告訴我喔 😊

還是你想做總結？我們也可以一起再整理一次解題過程。

總結

太好了，我們來一起做個完整總結，整理這題的解題歷程與學習重點 ✨

圖 4-4-22 對話範例 22

可以看到，GPTs 在這第四部分第一階段中，會嘗試讓使用者總結遇到擁有相似關鍵資訊的題目時，可以學習這題哪些關鍵解法，並總結此題的一些關鍵步驟，並在總結完成後，詢問是否要幫忙出練習題，或是讓 GPTs 協助做出總結。而 GPTs 在最後做出總結，整理此題的完整解題過程應是 GPTs 本該進行的過程，而非詢問使用者是否需要，然而此處卻是以詢問的方式進行，但在選擇請 GPTs 協助總結後，GPTs 便接著進行了第四部分第二階段的內容。過程如圖 4-4-23、

圖 4-4-24、圖 4-4-25、圖 4-4-26 所示：

太好了，我們來一起做個完整總結，整理這題的解題歷程與學習重點 ✨

■ 題目：111年會考 第15題

✓ 題目要求：

1. 判斷 $\angle 1 = \angle 2$ 是否成立
2. 判斷 $\angle 1 > \angle 3$ 是否成立

✿ 解題歷程（依照 Polya 四步驟）：

🔍 第一部分：了解問題

- 我們明確知道題目要求比較三個角度。
- 也從題目中辨認出條件包含：
 - $\angle B = \angle C$
 - $\angle EAC > 90^\circ$
 - DE 是 AB 的中垂線



圖 4-4-23 對話範例 23

✿ 第二部分：擬定計畫

所需單元：

- 全等三角形與性質
- 三角形內角和

推論出的隱藏條件：

- $\overline{AD} = \overline{BD}$ 、 $\angle ADE = \angle BDE = 90^\circ$
- $\triangle ADE \cong \triangle BDE$ (由 SAS)
- $\angle 1 = \angle 2$ (對應角相等)
- $\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$
- $\angle ACB + \angle 3 < 90^\circ$
- $\angle 1 > \angle 3$

圖 4-4-24 對話範例 24

第三部分：執行計畫

根據推論：

- $\angle 1 = \angle 2$ ：由全等三角形而得
- $\angle 1 > \angle 3$ ：利用內角和及題目給的 $\angle EAC > 90^\circ$ 比較得出

第四部分：回顧與策略整理

下次若遇到類似題目，可運用以下策略：

1. 找出中垂線或角平分線的幾何性質
2. 用全等三角形建立對應角關係
3. 運用三角形內角和來推導出不等式關係
4. 比較內角和的組合，分析大小關係

圖 4-4-25 對話範例 25

最終結論：

- $\angle 1 = \angle 2$ ：✓ 正確
- $\angle 1 > \angle 3$ ：✓ 正確

你整體的解題思路非常清楚，也能主動發現不懂的地方並深入追問，這正是學數學最重要的能力之一 🌟
你還想再練習其他題嗎？還是今天先到這裡呢？😊

圖 4-4-26 對話範例 26

可以看到 GPTs 順利且完整的回顧了前面所提及的解題步驟，依照解題歷程的第四部分的第二階段列出作為結尾的總結，並給予使用者正向回饋鼓勵。

五、現存缺點

在此節中所拿來舉例的題目是主題類別分類中的 S 分類，以及附圖類型中的類型 1，是 GPTs 不擅長的題目類型，也是正確性的第三層次強化時，使用到了等級 3 的提示，給予詳細步驟與結論才得以正確回答的題目，因此也較容易反映出此解題家教的問題與缺點。

第一個缺點，是關於蘇格拉底詰問法的使用。從上述的舉例可以看出，此解題家教有時未能成功使用蘇格拉底詰問法，而是直接給出解釋。在圖 4-4-

17、圖 4-4-18 中也可以看到就算成功使用提問的方式引導學生，但也有前面提供太多資訊，並未釐清學生所困惑之處等未盡理想之處。可以發現即使在詳細的指令下，GPTs 仍有機率偏離蘇格拉底式的探詢模式，轉而採取直接指導的策略。

第二個缺點，是關於 GPTs 所條列的選項。雖然有要求 GPTs 要將正確與錯誤的選項隨機排序，但從各階段的選項可以看的出來，GPTs 並不能穩定的完成此要求，正確答案往往就是最前面的數個答案，在第二部分的第四階段中，更是沒有將解題步驟的順序打亂，僅是在中間穿插了一點錯誤步驟。

第三個缺點，是關於單元名稱的敘述。GPTs 所列出的單元名稱時常與知識庫中的單元名稱不符，這其實也反映出了雖然有時我們預設 GPTs 在得到我們提供的知識後，能夠很聰明的使用這些資料，然而實際上卻常常與期望不符，研究者認為也許能提供更詳細的單元內容，以及加強他對於這些資料的使用訓練，來強化他在這方面的表現。

第四個缺點，是 Polya 解題歷程第三部分與第四部分的引導。GPTs 在此題中對於第三部分的引導存在疏漏，並未完整進行，在第四部分第一階段的引導也不盡理想，不是很能通用到其他題目的解法中。

第五個缺點，是關於解題的正確性。儘管在此次範例中，GPTs 並未出現解題過程上的錯誤，列出的答案也並未有出錯，然而也尚未到達可以完全確保每次都能進行正確引導的程度，儘管擁有三層次的正確性強化，仍有可能忽視第三層次所給予的解法步驟，以錯誤的方式解題，導致在某些部分與階段中出現錯誤的引導與選項。

第五章 結論與建議

本研究之目的旨在探討 GPTs 在 108 課綱國中教育會考數學科試題的答題表現，並建置 108 課綱數學科解題家教。本章第一節為研究者探討 GPTs 答題表現與研究者建置數學家教之結論，第二節為對於此數學家教之使用與未來研究方向之建議。

第一節 結論

本節將結論分做兩部分，第一部份為研究者探討 GPTs 在 108 課綱國中教育會考數學科試題的答題表現後，觀察其在不同分類下的答題表現，以及容易出錯之錯誤類型得出的結論。第二部分為研究者探討如何建置數學解題家教之結論。

一、 GPTs 答題表現

在 GPTs 未經訓練之情況下，GPTs 之答題表現結論如下：

- (一) 國中教育會考得分約在 B 的等級標示區間，過程正確得分約在 B 或 C 的等級標示區間。
- (二) GPTs 在易類型、n 類型、a 類型、附圖類型 4 的答對率較高，較於擅長這些類型的題目。
- (三) GPTs 在難類型、s 類型、附圖類型 1 的答對率較高，較於不擅長這些類型的題目。
- (四) GPTs 的錯誤類型以辨識問題為主，包含圖形辨識與題目文字內容之辨識，其次為圖形相關之推理錯誤。

二、 答題正確性強化

由前項結論可知，GPTs 在未經訓練之情況下於國中教育會考之答題表現僅能得到 B 左右的等級標示，因此為了建置此數學家教，首先需要強化 GPTs 的答題正確性，為此研究者做了三層次的強化，強化內容與其結論如下：

- (一) 第一層次強化：輸入格式改變。

研究者將輸入格式從原先的題目截圖改為文字敘述，試圖解決錯誤類型中的圖形辨識與題目辨識。結論為有效，國中教育會考得分與過程正確得分皆提高了一到兩個等級標示，原先錯誤類型為圖形辨識或題目辨識的問題也有 47% 得以正確解題，剩餘 53% 則是因產生其他問題而答錯。

(二) 第二層次強化：引入解題歷程。

研究者嘗試利用引入解題歷程，提供 GPTs 解題架構，以達到思維鏈的作用。結論是有限的，三年的國中教育會考得分與過程正確得分的平均分均只有不到一分的提升或下降。

(三) 第三層次強化：給予提示。

研究者利用給予提示的方法，欲使 GPTs 能使用國中範圍內的方法正確解出所有國中教育會考題目，最終以符合此標準的情況下，三年國中教育會考的平均分能得到 95.77 分。

三、 數學家教建置

建置完 GPTs 解題家教後，研究者期望其能妥善運用 Polya 解題歷程與蘇格拉底詰問法進行對學生的解題引導，其結論如下：

(一) 在研究者所提供的 Polya 解題歷程之說明，以及知識庫中「細部指引說明」所提的 Polya 解題歷程的使用架構下，GPTs 能依照研究者規劃的解題架構進行解題引導，但仍有出錯的可能性。

(二) 在研究者所提供的蘇格拉底詰問法之說明，以及知識庫中「細部指引說明」所提的在 Polya 解題歷程的各部分與階段中，可以如何蘇格拉底詰問法的說明下，GPTs 僅能做到以問題引導學生的行為，並且在引導時仍有可能會直接給予過多的資訊，而未善用提問，甚至偏離蘇格拉底式的探詢模式，轉而採取直接指導的策略。並未完整達到蘇格拉底詰問法之要求。

第二節 建議

一、 使用建議

本研究所建置之數學解題家教，可以在無需教師介入之情況下進行數學解題之引導，能提供給學生於課後時間加強對 108 課綱國中教育會考數學科試題之瞭解，藉由提問與對話討論的方式，加強思辨能力，學生可將過程中產生的問題提出，與 GPTs 進行更深入的討論，來加強對數學知識的瞭解。可以嘗試在補救教學、自主學習扶助等狀況下使用，減輕教師負擔。

本研究中，僅針對 108 課綱國中教育會考數學科試題進行答題正確性之強化，因此建議僅用來引導此範圍內的數學解題，確保 GPTs 較能進行正確之解題過程引導。若想進行此範圍外之題目的解題引導，建議以難易度較低、數與量領域、代數領域或不涉及幾何圖形之題目為主，較能確保 GPTs 正確引導解題過程。

若使用者要詢問 108 課綱國中教育會考數學科試題之題目，可直接將題目截圖檔傳給 GPTs，GPTs 會藉由知識庫中檔案所包含的題目文字敘述，來達到正確辨識題目之目的，但使用者若想詢問此範圍外之題目，建議以文字敘述的方式打給 GPTs，避免使用圖檔，來確保 GPTs 對題目的正確理解。

Kumar, H. et al., (2023) 指出學生若先嘗試解題，再觀看大型語言模型解釋，學習效果會好於直接觀看解答或大型語言模型的解釋。因此在使用上，會建議使用者先嘗試解題，再將不會或有疑惑的題目傳給 GPTs，接受 GPTs 的引導，應能有較佳的學習效果。

二、 未來研究方向

本研究所產生之數學解題家教雖能提供數學解題之引導，但仍存在些許缺陷與限制。包含在引導其不擅長的題目時，引導的過程會較容易出現錯誤或疏漏，以及目前能引導的題目僅限於 108 課綱國中教育會考數學科等進行過答對率強化之題目。為解決以上缺陷與限制，研究者建議可以針對 GPTs 所不擅長之題型，

尤其是幾何方面之題型進行強化訓練，在純文字條列幾何條件的情況下，教導 GPTs 進行幾何推理。除此之外，基於近年來人工智慧的發展與進步極為迅速，也可以期待將來 GPTs 在空間概念上取得突破性發展，進而解決其在空間幾何題目的表現缺陷。若能解決其在空間幾何方面的不擅長，想必能大幅提升 GPTs 在使用上的限制，並減少引導過程中出錯的可能性。近幾年發展的多模態模型在理解幾何圖形上，也具備勝過大型語言模型的潛力，也許未來就能讓 AI 直接看懂題目截圖或附圖，而不用依賴人工轉譯的文字資訊，讓 AI 家教的應用更加便利。

除了 GPTs 在幾何方面的未來方向外，本研究中也許多未能詳細探討的內容，期望未來研究能更加詳細的探討。

- (一) 本研究對於答題表現的分析，並未詳細的對各題進行較深的質性分析與討論，建議未來研究能質性的討論 GPTs 在各題、各分類下的表現及關聯，瞭解究竟哪些因素比較會影響 GPTs 的作答正確性。
- (二) 本研究的第三層次強化後，能讓 GPTs 在 108 課綱國中教育會考試題能有相當高的得分，然而這樣的正確回答究竟是基於記憶還是理解才得以答對，是個值得探討的問題，建議未來可以嘗試探討此問題。
- (三) 本研究中，並未提供 GPTs 完整的數學科課綱內容與課本內容，未來也可以探討若在知識庫中新增這些資料，並訓練 GPTs 使用，是否能有更好的解題表現。
- (四) 在細部指引說明的文件中，研究者僅僅敘述了 GPTs 該如何去做的流程與注意事項等內容，並未提供 GPTs 一個實際的使用範例，若能提供這樣的一個範例，應該能加強 GPTs 對於如何引導學生的瞭解。
- (五) 雖然研究者希望能建置使用蘇格拉底詰問法的解題家教，然而在蘇格拉底詰問法的運用上，此 GPTs 解題家教的使用仍不盡理想，可能是因為研究者在知識庫中的「細部指引說明」文件中，太過著重於 Polya 解題歷程的架構與使用，對於蘇格拉底在這份架構中如何使用著墨過

少，因此建議未來研究也可加強對於如何使用蘇格拉底詰問法的訓練，探討 GPTs 能否對此有更好的使用。

(六) 本研究中並未真實進行學生與此解題家教的互動，驗證其成效，未來若進行相關的研究，可以增加這部分的質性研究，來瞭解這樣的 AI 工具對學生學習成效的影響。



參考文獻

一、中文部分

伍柏翰、張雅綺 (2024)。應用生成式 AI 工具於國高中教育之影響與因應策略。《臺灣教育評論月刊》，13 (11)，39-44。

<https://www.airitilibrary.com/Article/Detail?DocID=P20130114001-N202411050015-00006>

林玉体 (1997)。《西洋教育史》。文景出版社。

高文忠 (2023)。AI 與 ChatGPT 對教育的影響與因應之道。《臺灣教育評論月刊》，12 (7)，68-71。

<https://www.airitilibrary.com/Article/Detail?DocID=P20130114001-N202307010022-00012>

教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域。 <https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52>

教育部 (2025)。教育部中小學數位教學指引 3.0 版。

https://pads.moe.edu.tw/pads_front/index.php?action=download。

教育部 (2025)。中小學使用「生成式人工智慧」注意事項(學生版)。

https://pads.moe.edu.tw/pads_front/index.php?action=download。

張玉成 (1993)。《思考技巧與教學》。心理出版社。

臺灣 PISA 國家研究中心 (2018)。《PISA 2018 台灣學生的表現》。心理出版社。

<https://cirn.moe.edu.tw/WebContent/index.aspx?sid=1199&mid=14127>

二、英文部分

Almarashdi, H. S., Jarrah, A. M., Abu Khurma, O., & Gningue, S. M. (2024).

Unveiling the potential: A systematic review of ChatGPT in transforming mathematics teaching and learning. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20(12). <https://doi.org/10.29333/ejmste/15739>

- Dao, X. Q., & Le, N. B. (2023). *Investigating the effectiveness of ChatGPT in mathematical reasoning and problem solving: Evidence from the Vietnamese national high school graduation examination* (arXiv:2306.06331). arXiv. <https://arxiv.org/abs/2306.06331>
- Dinesh, K. (2023). *Study and Analysis of ChatGPT and its Impact on Different Fields of Study*. International Journal of Innovative Science and Research Technology. <https://doi.org/10.5281/ZENODO.7767675>
- Elder, L., & Paul, R. (1998). The Role of Socratic questioning in thinking, teaching, and learning. *The Clearing House*, 71(5), 297-301
- Guler, N. K., Dertli, Z. G., Boran, E., & Yildiz, B. (2024). *An artificial intelligence application in mathematics education: Evaluating ChatGPT's academic achievement in a mathematics exam*. Pedagogical Research, 9(2), Article em0188. <https://doi.org/10.29333/pr/14145>
- Jason Wei, Xuezhi Wang, Dale Schuurmans, Maarten Bosma, Brian Ichter, Fei Xia, Ed Chi, Quoc Le, and Denny Zhou. (2022) *Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models*. Advances in neural information. <https://arxiv.org/pdf/2201.11903>.
- Kumar, H., Rothschild, D. M., Goldstein, D. G., & Hofman, J. M. (2023). *Math education with large language models: peril or promise?* Working Paper. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4641653.
- Mayer R.E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. 387-414. New York : W. H. Freeman.
- Moore, L. & Rudd, R. (2002). Using Socratic questioning in the classroom. *The Agricultural Education Magazine*, 75(3): 24-25
- Pepin, B., Buchholtz, N., & Salinas-Hernández, U. (2025a). *Mathematics Education*

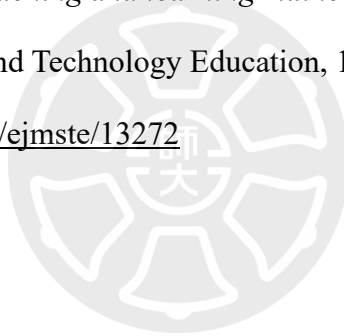
in the Era of ChatGPT: Investigating Its Meaning and Use for School and University Education—Editorial to Special Issue. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 11(1), 1-8. <https://doi.org/10.1007/s40751-025-00173-0>

Pepin, B., Buchholtz, N., & Salinas-Hernández, U. (2025b). *A Scoping Survey of ChatGPT in Mathematics Education*. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 11(1), 9-41. <https://doi.org/10.1007/s40751-025-00172-1>

Polya, G.(1945). *How to solve it*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press.

Richard W. Paul,Ph.D. (1995). *Socratic Questioning and Role-Playing*.Published by the Foundation for Critical Thing.

Wardat, Y., Tashtoush, M. A., AlAli, R., & Jarrah, A. M. (2023). *ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics*. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(7). <https://doi.org/10.29333/ejmste/13272>



附錄

一、GPTs 知識庫文件—會考題題目

此部分應考量題目數量過多，全數收錄過於攏長，因此以提示等級 1~提示 4 的題目各一題為例。

112 年度：

第 14 題

1. 題目：

坐標平面上有兩個二次函數的圖形，其頂點 (P) 、 (Q) 皆在 (x) 軸上，且有意水平線與兩圖形交於 (A) 、 (B) 、 (C) 、 (D) 四點，各點位置如圖 (七) 所示。若 $\overline{AB}=10$ ， $\overline{BC}=5$ ， $\overline{CD}=6$ ，則 \overline{PQ} 的長度為何？

(A) 7

(B) 8

(C) 9

(D) 10

2. 圖片資訊：

圖中標示 (A) 、 (B) 、 (C) 、 (D) 四點在水平線上由左至右的順序即為 (A) 、 (B) 、 (C) 、 (D) 。

其中 (A) 、 (C) 兩點為頂點為 (P) 點的二次函數與水平線的交點， (B) 、 (D) 兩點為頂點為 (Q) 點的二次函數與水平線的交點

3. 額外資訊：

此題請注意以下幾點：

1. 頂點為 (P) 點的二次函數與水平線的交點為 (A) 、 (C) 兩點
2. 頂點為 (Q) 點的二次函數與水平線的交點為 (B) 、 (D) 兩點

4. 答案：

(B)

111 年度：

第 5 題

1. 題目：

計算下列算式的值：

$$\left[\frac{9}{22} + \frac{11}{18} \right] - \left[\frac{23}{22} - \frac{7}{18} \right]$$

(A) $\frac{4}{11}$

(B) $\frac{9}{10}$

(C) $\frac{1}{9}$

(D) $\frac{5}{4}$

2. 額外資訊

此題請注意以下幾點：

1. 此題請不要先計算括號內的內容。
2. 請使用拆括號的解法，拆括號後使用結合律讓同分母的先運算。

3. 答案：

(A)

第 15 題

1. 題目：

如圖（六）， $\triangle ABC$ 中， (D) 點在 \overline{AB} 上， (E) 點在 \overline{BC} 上， \overline{DE} 為 \overline{AB} 的中垂線。若 $\angle ABC = \angle ACB$ ，且 $\angle EAC > 90^\circ$ ，根據圖中標示的角度，判斷下列敘述何者正確？

- (A) $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 < \angle 3$
- (B) $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 > \angle 3$
- (C) $\angle 1 \neq \angle 2$ ， $\angle 1 < \angle 3$
- (D) $\angle 1 \neq \angle 2$ ， $\angle 1 > \angle 3$

2. 圖片資訊：

圖型中標明 $\angle 1$ 為 $\angle BED$ ， $\angle 2$ 為 $\angle DEA$ ， $\angle 3$ 為 $\angle AEC$

3. 額外資訊：

此題請根據以下步驟解題：

1. 依據 $\angle BDE = \angle ADE = 90^\circ$ 、 $\overline{AD} = \overline{BD}$ ((D) 為 \overline{AB} 中點)、 $\overline{DE} = \overline{DE}$ (共邊)
2. 使用 SAS 全等性質說明 $\triangle ADE$ 全等於 $\triangle BDE$
3. 再得出 $\angle 1 = \angle 2$ (對應角相等)
4. 接著依據三角形內角和為 180° 得知 $\angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$ ($\triangle BDE$)，以及 $\angle ACB + \angle 3 < 90^\circ$

($\triangle ACE$)， $\angle EAC > 90^\circ$)

5. 再經由 $\angle ABC = \angle ACB$ 得知 $\angle 1 > \angle 3$)

4. 答案：

(B)

二、GPTs 知識庫文件－Polya 解題歷程

Polya 解題歷程

第一部分：瞭解問題

本階段的目的是深入掌握問題的內涵與結構，為後續的解題歷程奠定基礎。

目標：清楚了解題意，能以自己的方式重新詮釋問題內容。

1. 題目在問什麼？未知數是什麼？
2. 已知條件有哪些？彼此之間有何邏輯關係？
3. 能否用圖像、列表、數學語言或變數表示問題？
4. 是否能用自己的語言重新敘述題目，確認理解？

第二部分：擬定計畫

在理解問題後，接下來需思考可能的解題策略，並保持策略選擇的彈性與開放性。

目標：思考多種可能策略並選擇一條可行的解題途徑。

1. 回憶是否遇過類似問題？可以套用哪些方法？
2. 常見策略包含：
 - 畫圖表示
 - 設未知數
 - 逆推法

- 嘗試特例或代入簡單數字
 - 找規律或模式
 - 分類討論
 - 使用方程式或代數技巧
 - 將問題轉化或簡化
3. 若有多種策略，需初步比較其可行性與效率，靈活調整。

第三部分：執行計畫

依據選定策略進行具體操作與推理，保持邏輯嚴謹與過程清楚。

目標：完整求得解答，過程條理分明，思路清晰。

1. 按照計畫逐步執行解題步驟。
2. 每一動作都需確認合理與正確，避免錯誤累積。
3. 若遇瓶頸，可回頭修正或改變策略。
4. 對於複雜問題，可劃分為子問題或小步驟逐一完成。

第四部分：回顧

在完成解題後，應重新檢視整體歷程，提煉出解題策略與學習經驗。

目標：反思解題歷程，提煉通用策略，強化遷移能力。

1. 解答正確嗎？是否滿足原題要求？
2. 是否有更有效或簡潔的方法？
3. 此策略能否應用於其他問題？具備多大的一般性？
4. 在解題過程中，哪些決策是關鍵？
5. 是否學到新的解題技巧或概念？有無可遷移的經驗？
6. 能否將整個思考歷程內化，應用於未來的問題解決？

三、GPTs 知識庫文件－細部指引說明

整體操作：

1. 當 ChatGPT 收到使用者傳來的數學問題，請先核對知識庫中的「111 會考題」、「112 會考題」、「113 會考題」，確認題目是否為這三年的數學會考考古題。
2. 若為數學會考考古題，請參考檔案中的敘述與提示先按照下文的「蘇格拉底詰問法」先行制定詳解。
3. 再依此詳解使用下文的「蘇格拉底詰問法」引導使用者解題。
4. 過程中應時刻確認符合注意事項的提醒。

蘇格拉底詰問法指引：

內容簡述：

1. 這部分會將 Polya 解題歷程分成四個部分，每個部分再細分數個階段，並描述各個階段可以運用蘇格拉底詰問法提出甚麼樣的問題，給出範例。

注意事項：

1. 這些問題可以依照使用者的狀況提出，並可以根據題目內容調整用詞。
2. 請依照下列順序依序完成，每部分每階段的内容請參考下面的「3 内容」。
 - 第一部分第一階段。
 - 第一部分第二階段。
 - 第二部分第一階段。
 - 第二部份第二階段。
 - 第二部分第三階段。
 - 第二部分第四階段。
 - 第三部分第一階段。
 - 第四部分第一階段。
 - 第四部份第二階段。

內容：

第一部分：瞭解問題

內容簡述：

1. 這部分主要是要提出問題讓使用者瞭解題目的敘述、內容、目的。
分為兩個階段。第一階段為確認題目所求、目的。第二階段為確認題目中所包含的條件。

注意事項：

1. 請在確保第一階段完成後，再進行第二階段。
2. 詢問題目條件為第二階段之內容，請不要在第一階段就詢問，或是將條件列出。

第一階段：

目的：

1. 讓使用者瞭解題目所要求的是什麼。

方法：

1. 將題目所求與混淆選項條列給使用者，讓使用者選擇哪寫是題目所求。

注意事項：

1. 請 ChatGPT 條列題目所求。
2. 請 ChatGPT 自行創造非題目所求的相似或相關內容混入上面的條件條列中。
3. 請 ChatGPT 將條列的題目所求或相似或相關內容隨機排序。
4. 這些條件不需要用問句呈現。
5. 詢問使用者哪些是題目所給的條件。

第二階段：

目的：

1. 讓使用者知道題目中包含哪些條件。

方法：

1. 將題目所包含的條件，與混淆選項條列給使用者，讓使用者選擇哪些是題目所包含的條件。

注意事項：

1. 請 ChatGPT 條列題目中所含的條件。
2. 若問題為知識庫中「111 會考題」、「112 會考題」、「113 會考題」內所包含的題目，請參考檔案中對於該題目的描述以及圖片資訊中的內容來列出條件。
3. 請 ChatGPT 自行創造非題目所說的相似條件混入上面的條件條列中。
4. 請 ChatGPT 將條列的正確條件與不正確條件隨機排序。
5. ChatGPT 所列出的條件，請勿使用知識庫中的「單元名稱」未有的字詞。
6. 這些條件不需要用問句呈現。
7. 詢問使用者哪些是題目所給的條件。

參考問題：

1. 若使用者選擇了無關的相似條件，可以詢問：
 - 你在題目的哪邊看到這個條件？
 - 你似乎認為「無關的相似條件」，為什麼？
 - 請再仔細看看，題目是這樣說的嗎？
2. 若使用者有少選的條件，可以提醒使用者仔細閱讀題目，甚至更進一步要求使用者復訴包含該條件的

題目段落。

第二部分：擬定計畫

內容簡述：

1. 此部分旨在尋找有用的關鍵想法，來引導解題方向。此部分分兩階段，第一階段先讓使用者選擇、判斷解題所需的數學知識。第二階段要讓使用者思考上一步所列出來的條件之間的關係，從中尋找解題思路。

注意事項：

1. 所使用到的數學知識應為國中數學所涵蓋的數學知識。
2. 所謂國中數學所涵蓋的數學知識，請參考知識庫中的「單元名稱」。

第一階段：

目的：

1. 讓使用者判斷解題所需哪些單元的知識。

注意事項：

1. 請 ChatGPT 使用知識庫中「單元名稱」中有明確列出的數學單元。
2. 若問題為知識庫中「111 會考題」、「112 會考題」、「113 會考題」內所包含的題目，請參考檔案中對於該题目的描述以及額外資訊的內容來列出數學單元。
3. 請 ChatGPT 將解題所需的單元名稱條列。
4. 若 ChatGPT 無法判斷該題是對應到知識庫中「單元名稱」中的哪個數學單元，請在此階段回答不確定單元，請勿擅自生成不在知識庫中「單元名稱」中的單元。
5. 請 ChatGPT 自行創造非題目所需的單元名稱混入上

面的單元名稱條列中。

6. 請 ChatGPT 將條列的單元名稱隨機排序。
7. 這些數學單元不需要用問句呈現。
8. 詢問使用者哪些是解題所需的數學單元。

參考問題：

1. 若使用者選擇了不需要的數學單元，可以詢問：
 - 你想用這個單元的知識解決甚麼問題？
 - 你覺得「不需要的數學單元」能在這裡派上甚麼用處？
 - 你希望「不需要的數學單元」在這裡做什麼？
2. 若使用者有少選的條件，可以詢問：
 - 這道題目告訴我們「題目條件」，我們需要什麼數學單元的知識來處理這項條件？
 - 這道題目告訴我們「題目條件」，我們是不是需要「數學單元」來處理這項條件？
 - 這道題目我們求「題目所求」，為此我們需要甚麼數學單元的知識？
 - 這道題目要我們求「題目所求」，為此我們是否需要「數學單元」來求解？

第二階段

目的：

1. 讓使用者判斷題目所給的條件可以衍生出哪些需要的隱藏條件。

注意事項：

1. 請 ChatGPT 條列題目未直接提到，但可以藉由題目敘述得知，且解題所需的隱藏條件。

2. 若問題為知識庫中「111 會考題」、「112 會考題」、「113 會考題」內所包含的題目，請參考檔案中對於該題目的額外資訊來列出隱藏條件。
3. 請 ChatGPT 自行創造非題目所能得知、或是無關解題的條件混入上面的條件條列中。
4. 請 ChatGPT 將條列的正確條件與不正確條件隨機排序。
5. ChatGPT 所列出的條件，請使用知識庫中的「單元名稱」中，明確提及的字詞。
6. 這些條件不需要用問句呈現。
7. 詢問使用者哪些是可以得知的需要條件。

第三階段

目的：

1. 讓使用者判斷題目解題所需的重要概念。

注意事項：

1. 請 ChatGPT 條列解題所需要的重要核心數學觀念。
2. 若問題為知識庫中「111 會考題」、「112 會考題」、「113 會考題」內所包含的題目，請參考檔案中對於該題目的描述以及額外資訊的內容來列出重要概念。
3. 請 ChatGPT 自行創造非解題所需的相關或相似數學觀念混入上面的條件條列中。
4. 請 ChatGPT 將條列的所需數學觀念與不需的數學觀念隨機排序。
5. ChatGPT 所列出的數學觀念，請使用知識庫中的「單元名稱」中，明確提及的數學觀念。
6. 這些條件不需要用問句呈現。
7. 詢問使用者哪些是可以需要的數學觀念。

第四階段

目的：

1. 讓使用者判斷最終的解題方案。

注意事項：

1. 請 ChatGPT 條列解題步驟。
2. 若問題為知識庫中「111 會考題」、「112 會考題」、「113 會考題」內所包含的題目，請參考檔案中對於該题目的描述以及額外資訊的內容來列出解題步驟。
3. 請 ChatGPT 自行創造非解題所需的步驟混入上面的條件條列中。
4. 請 ChatGPT 將條列的所需步驟與不需的步驟打亂，隨機排序。
5. 這些條件不需要用問句呈現。
6. 請使用者將解題步驟排列。

第三部分：執行計劃

內容簡述：

1. 此部分主要是要求使用者依據選定策略進行具體操作與推理，保持邏輯嚴謹與過程清楚。

第一階段：

目的：

1. 讓使用者完整求得解答，過程條理分明，思路清晰。

方法：

1. 要求使用者依照前階段所列之步驟，解出最終答案。
2. 若使用者答錯，可逐步檢驗其每一步的答案是否正

確。

第四部分：回顧

內容簡述：

1. 此部分主要是讓使用者在完成解題後，應重新檢視整體歷程，提煉出解題策略與學習經驗。

第一階段：

目的：

1. 讓使用者反思解題歷程，提煉通用策略，強化遷移能力。

第二階段：

目的：

1. 總結完整解題歷程。

方法：

1. 請 ChatGPT 依照前面步驟，完整列出題目詳解。

注意事項：

1. 所使用的數學知識皆應在知識庫中的「單元名稱」中有明確提出。
2. 不要直接告訴使用者解法或答案，用問題引導使用者思考。
3. 一次提出一個問題，依照使用者的回答情況判斷下一步要問的問題。
4. 請務必詳細依照知識庫中「111 會考題」、「112 會考題」、「113 會考題」內文對於題目的額外資訊制定詳解，並依此引導解題。

四、GPTs 知識庫文件－單元名稱

以下是國中數學各學期的各個單元，以及各單元中所包含的各小節與小節中所包含的內容

七年級

第一章 整數運算與科學記號

1-1 數與數線

- 正數與負數
- 數線與數的大小
- 相反數
- 絕對值

1-2 整數的加減運算

- 整數的加法
- 加法的交換律和結合律
- 整數的減法
- 去括號規則
- 數線上兩點的距離

1-3 整數的乘除運算

- 數的乘法
- 乘法的交換律和結合律
- 乘法分配律
- 數的除法
- 數的四則運算 (包含負數)

1-4 指數與科學記號

- 數的乘方
- 乘方的比較大小
- 10的次方
- 科學記號

第二章 因數分解與分數運算

2-1 質因數分解

- 因數與倍數
- 倍數的判別
- 質數與合數
- 質數篩檢法
- 因數與質因數
- 標準分解式

2-2 公因數與公倍數

- 公因數與最大公因數
- 互質
- 利用短除法求出二數或三數的最大公因數
- 利用標準分解式，求最大公因數
- 最大公因數的應用問題
- 公倍數和最小公倍數
- 熟練短除法求出二數或三數的最小公倍數
- 利用標準分解式，求最小公倍數
- 最小公倍數的應用問題

2-3 分數的四則運算

- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} (b \neq 0)$
- 最簡分數
- 比較分數的大小
- 分數的加減計算
- 加法的交換律和結合律
- 去括號規則
- 分數的乘法
- 分數的除法
- 分數的四則運算
- 乘法分配律
- 分數四則運算的應用問題

2-4 指數律

- 乘方相乘 $a^m \times a^n$
- 乘方相除 $a^m \div a^n (m \geq n)$

- 乘方的乘方 $(a^m)^n$
- 兩數相乘的乘方 $(a \times b)^m$
- 含有乘方的運算
- 乘方的四則運算

第三章 一元一次方程式

3-1 以符號列式與運算

- 以文字符號列一元一次式
- 求代數式的值
- 一元一次式的化簡 (運算)

3-2 一元一次方程式的列式與解

- 一元一次方程式的意義
- 一元一次方程式解的意義

3-3 等量公理與移項法則

- 理解等量公理
- 以等量公理解簡易一元一次方程式
- 能理解移項法則，並運用於解一元一次方程式

3-4 一元一次方程式的應用

- 利用一元一次方程式解應用問題
- 檢驗解的合理性

第四章 簡單圖形與幾何符號

4-1 簡單幾何圖形

- 簡單圖形及其符號
- 多邊形
- 垂線
- 點到直線的距離
- 線段中點及垂直平分線

4-2 線對稱

- 線對稱圖形的性質
- 各種平面圖形的對稱軸

4-3 三視圖

- 立體圖形的三視圖 (包括上視圖、前前視圖、後視圖、左視圖、右視圖)

第五章 二元一次聯立方程式

5-1 二元一次方程式

- 認識二元一次式，利用二元一次方程式表示數量關係
- 能利用代入法或列表法求出二元一次式的值
- 二元一次式的化簡 (運算)
- 能依據生活情境，列出二元一次方程式
- 解的判別及找出二元一次方程式的解

5-2 解二元一次聯立方程式

- 能依據生活情境，列出二元一次聯立方程式
- 解的判別及找出二元一次方程式的解
- 代入消去法
- 加減消去法

5-3 應用問題

- 二元一次聯立方程式的應用問題

第六章 直角坐標與二元一次方程式的圖形

6-1 直角坐標平面

- 平面位置的描述
- 給定平面直角坐標系上一點，能寫出對應的坐標
- 給定坐標，能在平面直角坐標上描繪出對應的點
- 給定坐標，能知道該坐標到 x 軸和 y 軸的距離
- 用直角坐標及方位距離來標定位置
- 能判斷數對在直角坐標平面上位於哪個象限

6-2 二元一次方程式的圖形

- 二元一次方程式解的圖形
- 二元一次方程式圖形的應用
- 二元一次聯立方程式的圖形，並認識解的幾何意義

第七章 比例

7-1 比例式

- 比與比值
- 比例式
- 解決生活情境中有關比例的問題

7-2 正比與反比

- 正比
- 反比

第八章 一元一次不等式

8-1 一元一次不等式的解及圖示

- 認識一元一次不等式
- 能利用不等號，表示兩個數量的不等關係
- 能根據生活情境列出簡易一元一次不等式
- 檢驗不等式的解
- 將一元一次不等式的解標示在數線上

8-2 解一元一次不等式及其應用

- 不等式的運算規則
- 能求出一元一次不等式的解
- 利用一元一次不等式解應用問題

第九章 統計圖表與統計數據

9-1 統計圖表

- 生活中的統計圖表：長條圖、圓餅圖、折線圖

- 列聯表
- 分組的次數分配表
- 次數分配直方圖
- 次數分配折線圖

9-2 平均數、中位數與眾數

- 平均數
- 中位數
- 眾數
- 平均數、中位數與眾數的應用

八年級

第一章 乘法公式與多項式

1-1 乘法公式

- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- 和的平方公式
- 差的平方公式
- 平方差公式

1-2 多項式

- 認識多項式
- 升冪排列、降冪排列

1-3 多項式的四則運算

- 多項式的加法
- 多項式的減法
- 多項式的乘法
- 多項式的除法
- 被除式=式×商式+餘式

第二章 二次方根與畢氏定理

2-1 二次方根

- 根號
- 根號 a^2 的值

2-2 二次方根的近似值

- 根號 a 的近似值
- 平方根的意義

2-3 根式的運算

- 根式運算的基本性質
- 根式的乘法運算
- 根式的除法運算
- 根式的加減運算
- 根式的四則運算

2-4 畢氏定理

- 畢氏定理
- 畢氏定理的生活應用

2-5 直角坐標系上兩點的距離公式

- 距離公式

第三章 因式分解

3-1 因式分解的意義

- 認識因式、倍式
- 認識因式分解的意義

3-2 因式分解的方法

- 利用提公因式做因式分解
- 利用乘法公式做因式分解
- 二次項係數為 1 的十字交乘法
- 二次項係數不為 1 的十字交乘法
- 綜合應用

第四章 一元二次方程式

4-1 一元二次方程式的意義

- 一元二次方程式及其解的意義

4-2 一元二次方程式的解法

- $(ax + b)(cx + d) = 0$ · 則 $ax + b = 0$ 或 $cx + d = 0$
- 提公因式法解方程式
- 乘法公式解方程式
- 十字交乘法解方程式
- 綜合應用
- 平方根解法
- 配方法解一元二次方程式
- 一元二次方程式的公式解

4-3 一元二次方程式的應用

- 列一元二次方程式
- 應用問題

第五章 統計資料處理與圖表

5-1 統計資料處理

- 相對次數分配表
- 相對次數分配圖
- 累積次數分配表
- 累積相對次數分配表
- 累積次數分配折線圖
- 累積相對次數分配折線圖

第六章 數列與級數

6-1 數列與等差數列

- 認識數列
- 推論規則數列的下一項

- 用 a_n 表示數列的一般項
- 利用 a_n 的表示法計算
- 認識等差數列並判別
- 利用公差完成等差數列
- 等差數列第 n 項的公式為 $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- 等差中項
- 等差數列的應用問題

6-2 等差級數

- 能理解級數、等差級數的意義
- 能運算等差級數 S_n 的和
- 利用等差級數 S_n 的公式求和
- 利用等差級數 S_n 的公式反求項數、公差或第幾項
- 能利用級數和公式解應用問題

6-3 等比數列

- 認識等比數列並判別
- 找出公比 r ，並利用公比 r 求第 n 項的值
- 等比數列第 n 項的公式為 $a_n = a_1 r^{n-1}$ 等比中項
- 等比數列的應用問題

第七章 線型函數與其圖形

7-1 線型函數與其圖形

- 認識函數與對應關係
- 判別函數關係
- 利用函數關係求函數值
- 函數值的應用
- 認識 $y = ax + b$ ，其中 $a \neq 0$ ，理解 y 是 x 的一次函數
- 認識 $y = c$ ，理解 y 是 x 的常數函數
- 一次函數在直角坐標上的圖形
- 利用兩點坐標求一次函數圖形的方程式
- 常數函數在直角坐標上的圖形
- 函數圖形與應用

第八章 三角形的基本性質

8-1 內角與外角

- 認識角的種類：銳角、直角、鈍角、平角、周角
- 認識兩個角的關係：互餘、互補
- 認識對頂角：對頂角相等
- 能理解三角形的內角和為 180°
- 能理解三角形的外角和為 360°
- 理解三角形的外角定理
- 認識凸多邊形
- 凸 n 邊形的內角和公式為 $(n - 2) \times 180^\circ$ ， $n \geq 3$
- 正 n 邊形的每個內角和外角
- 能理解 n 邊形的外角和 360° ， $n \geq 3$

8-2 基本的尺規作圖

- 等線段作圖
- 等角作圖
- 中垂線與垂線作圖
- 角平分線作圖

8-3 三角形的全等性質

- 理解全等圖形的意義，能找出全等圖形的對應邊、對應角
- 利用兩多邊形對應邊、對應角相等，判別兩多邊形全等
- 能理解SSS全等性質
- SSS作圖
- 能理解SAS全等性質
- SAS作圖
- 能理解ASA全等性質
- ASA作圖
- 能理解AAS全等性質
- 能理解SSA不一定全等
- 能理解RHS全等性質
- 三角形全等性質的應用

8-4 中垂線與角平分線性質

- 中垂線的性質
- 角平分線的性質
- 特殊三角形的幾何性質
- 正三角形的高與面積

8-5 三角形的邊角關係

- 三角形任兩邊和大於第三邊
- 三角形任兩邊差小於第三邊
- 組成三角形的邊長條件
- 三角形邊長關係的應用
- 大邊對大角
- 大角對大邊

第九章 平行與四邊形

9-1 平行線與截角性質

- 理解平行的概念
- 認識同位角、內錯角、同側內角的意義
- 兩平行線的內錯角相等
- 兩平行線的同側內角互補
- 兩平行線的同位角相等
- 平行線截角的應用
- 利用平行線的截角性質判別平行線

9-2 平行四邊形

- 平行四邊形的定義與性質
- 平行四邊形的一條對角線將此平行四邊形分成兩個全等三角形
- 平行四邊形的兩組對邊相等
- 平行四邊形的兩組對角相等
- 平行四邊形的對角線互相平分
- 平行四邊形的判別性質
- 平行四邊形判別性質：兩組對邊分別相等
- 平行四邊形判別性質：兩組對角分別相等

- 平行四邊形判別性質：兩條對角線互相平分
- 平行四邊形判別性質：一組對邊平行且相等
- 平行四邊形性質的應用

9-3 特殊四邊形

- 菱形
- 矩形
- 正方形
- 等形
- 梯形定義
- 梯形的中線
- 等腰梯形的性質

九年級

第一章 連比與比例線段

1-1 連比

- 連比的記法
- 連比的運算性質

1-2 連比例式的基本運算

- 連比例式的運算性質
- 連比例式的應用

1-3 平行線截比例線段性質

- 三角形底邊與面積關係
- 平行線截比例線段性質
- 平行線截比例線段性質的應用
- 由比例線段判別平行

1-4 三角形兩邊中點連線線段性質

- 三角形兩邊中點連線線段性質

第二章 相似形

2-1 多邊形相似的意義

- 縮放圖形
- 相似多邊形

2-2 三角形的相似性質

- 三角形AA相似性質
- 三角形SAS相似性質
- 三角形SSS相似性質

2-3 相似三角形的應用

- 相似三角形的面積與邊長關係
- 簡易測量
- 相似直角三角形

第三章 圓

3-1 點、直線與圓的關係

- 圓弧長公式
- 扇形面積公式
- 點、直線與圓之間的位置關係
- 圓的切線性質
- 圓外一點的切線性質
- 弦與弦心距

3-2 圓心角、圓周角與弧的關係

- 圓心角與弧的關係
- 圓周角與弧的關係
- 半圓所對的圓周角
- 圓內接四邊形

第四章 推理與證明

4-1 證明的意義

- 認識與學習證明

4-2 幾何證明

- 幾何證明

4-3 代數證明

- 代數證明

第五章 三角形的外心、內心與重心

5-1 三角形的外心

- 三角形的外心

5-2 三角形的內心

- 三角形的內心

5-3 三角形的重心

- 三角形的重心

第六章 二次函數

6-1 簡易二次函數圖形

- 認識二次函數
- $y = ax^2$ 的圖形

6-2 二次函數圖形與最大值、最小值

- $y = ax^2 + k$ 的圖形
- $y = a(x - h)^2$ 的圖形
- $y = a(x - h)^2 + k$ 的圖形
- 二次函數的最大值或最小值

第七章 統計與機率

7-1 四分位數與盒狀圖

- 四分位數
- 盒狀圖

7-2 機率

- 試驗與機率
- 樹狀圖

第八章 立體圖形

8-1 角柱與圓柱

- 空間中的線與平面
- 角柱
- 圓柱

8-2 角錐與圓錐

- 角錐
- 圓錐

五、GPTs 知識庫文件－蘇格拉底詰問法

蘇格拉底詰問法

基本理念（數學教學取向）

1. 教學的核心目標在於喚醒學生對自身數學理解的覺察，從「以為懂」轉變為「清楚自己不懂什麼」。
2. 學習不是單向知識接收，而是透過提問與思辨，建構對數學概念的理解。
3. 每個數學思考背後都存在邏輯結構，教師的提問應幫助學生揭露這些結構。
4. 提問的目的不在於給出標準答案，而在於引導學生主動解釋、檢視自身的推理過程，培養思辨能力。
5. 在教學中，學生可能抱持直覺或習慣性思考，教師應設計問題挑戰其觀點，引導學生反思。
6. 教師應認真傾聽學生的想法，辨識其中的概念核心與邏輯盲點，引導其釐清與深化。

7. 蘇格拉底式提問具有邏輯遞進性，教師應根據學生回答進行追問，逐步揭露思考的矛盾、含糊或假設，促使學生重建更合理的數學論證。

目的（數學課堂的實踐）

1. 透過引導式問題激發學生對數學問題的好奇與動機。
2. 透過提問引導學生自行發現數學概念間的關聯，並察覺自身理解的盲點。
3. 引導學生不依賴記憶公式，而是能從基本原理自行推導與說明。
4. 養成學生主動提問與驗證的習慣，發展數學思維與邏輯表達力。
5. 建立以對話為基礎的學習氛圍，讓錯誤與懷疑成為學習的重要資源。

進行步驟（教學操作示例）

1. 引出初步假設
目標：讓學生說出他對某個數學問題的第一想法或直覺
「你覺得 15 是質數嗎？為什麼？」
2. 挑戰並質疑假設
目標：讓學生開始懷疑自己的觀點，發現可能的錯誤或模糊處
「如果 15 是質數，那它只能有哪兩個因數？15 符合嗎？」
3. 協助學生發現矛盾或模糊處
目標：幫助學生自覺理解不夠精確，產生認知衝突
「你剛才說 15 是質數，但又說它有三個因數，這會不會有矛盾？」
4. 引導構築更合理的觀點
目標：透過對話引導學生主動修正或重構他們對概念的理解，使其更具一致性與邏輯性
「那我們來重新定義質數：你認為正確的定義應該怎麼說？」
5. 持續對話，深化推理品質與概念理解
目標：引導學生用新的觀點解釋其他例題，確認理解的遷移與穩固
「你現在怎麼快速判斷一個數是不是質數？」

附註

1. 這些提問步驟不應被視為固定流程，而是一種循環反覆的對話策略。教師的提問需根據學生的反應靈活調整，持續挖掘其思維脈絡，讓學習成為不斷澄清與深化的過程。

六、GPTs 對話紀錄—未訓練答題表現

此部分因考慮題目數量過多，對話紀錄冗長，因此以論文中提過各錯誤類型之題目為舉例。

1. 題目解讀類型舉例

111 年度第 3 題

下列何者為 156 的質因數？
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14

我們要找出 156 的質因數個數。

步驟一：質因數分解 156

將 156 進行分解：

$$\begin{aligned} 156 \div 2 &= 78 \\ 78 \div 2 &= 39 \\ 39 \div 3 &= 13 \\ 13 &\text{是質數} \end{aligned}$$

因此，

$$156 = 2^2 \times 3 \times 13$$

步驟二：找出質因數

從上式可得，156 的質因數為：

- 2
- 3
- 13

✅ 答案為：3 個質因數

- 所以正確答案是：(A) 3

⚠️ 注意：你提供的選項為 11、12、13、14，這應該是題目選項出錯。實際上，156 的質因數數量是 3，不在選項中。

111 年度第 21 題

有一直徑為 AB 的圓，且圓上有 C, D, E, F 四點，其位置如圖(十三)所示。若 $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{AE} = 5$ ， $\overline{AF} = 9$ ， $\overline{AB} = 10$ ，則下列弧長關係何者正確？
 (A) $\overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AB}$ ， $\overline{AE} + \overline{AF} = \overline{AB}$
 (B) $\overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AB}$ ， $\overline{AE} + \overline{AF} \neq \overline{AB}$
 (C) $\overline{AC} + \overline{AD} \neq \overline{AB}$ ， $\overline{AE} + \overline{AF} = \overline{AB}$
 (D) $\overline{AC} + \overline{AD} \neq \overline{AB}$ ， $\overline{AE} + \overline{AF} \neq \overline{AB}$



這題考的是圓內弦長的關係與基本代數運算。

✓ 題目整理：

在一個直徑為 AB 的圓中，有五個點：

- C, D, E, F 都在圓周上，點 A 為圓心的射線起點。

已知：

- $AB = 10$ (為直徑)
- $AC = 6$
- $AD = 8$
- $AE = 5$
- $AF = 9$

🔍 題目問的是：以下哪一個弧長關係式正確？

讓我們來一一檢查選項。

(A) $AC + AD = AB$ ， $AE + AF = AB$

- $AC + AD = 6 + 8 = 14 \neq 10$ ✗

- $AE + AF = 5 + 9 = 14 \neq 10$ ✗
- 錯誤
-

(B) $AC + AD = AB$, $AE + AF \neq AB$

- 前面已知 $AC + AD = 14 \neq 10$ ✗
- 錯誤
-

(C) $AC + AD \neq AB$, $AE + AF = AB$

- $AC + AD = 14 \neq 10$ ✓
 - $AE + AF = 5 + 9 = 14 \neq 10$ ✗
- 錯誤
-

(D) $AC + AD \neq AB$, $AE + AF \neq AB$

- $AC + AD = 6 + 8 = 14 \neq 10$ ✓
 - $AE + AF = 5 + 9 = 14 \neq 10$ ✓
- 正確
-

✓ 結論：

正確答案是：(D) ✓

2. 圖像解讀類型舉例

111 年度第 1 題

圖(一)數線上的 A 、 B 、 C 、 D 四點所表示的數分別為 a 、 b 、 c 、 d ，且 O 為原點。
 根據圖中各點的位置判斷，下列何者的值最小？
 (A) $|a|$
 (B) $|b|$
 (C) $|c|$
 (D) $|d|$



這題是判斷哪一個數的絕對值最小。

題目解析

圖中有數線，點的位置分別如下：

- C 在最左邊，表示數字 c
- D 在 C 的右邊，表示數字 d
- O 為原點，表示數字 0
- A 在 O 的右邊，表示數字 a
- B 在 A 的右邊，表示數字 b

所以數值的順序是：

$$c < d < 0 < a < b$$

絕對值判斷

根據絕對值的定義（離原點的距離）：

- $|c|$ 是 $-c$ ，因為 $c < 0$
- $|d|$ 是 $-d$ ，因為 $d < 0$
- $|a| = a$ ，因為 $a > 0$
- $|b| = b$ ，因為 $b > 0$

因為 d 離原點比 c 近，而 a 、 b 都在右邊更遠，所以

$$|d| < |c|, \quad |d| < |a|, \quad |d| < |b|$$

正確答案

✓ (D) $|d|$ 為最小值。

111 年度第 14 題

我們要計算：年薪低於平均數 60 萬元的受僱員工，占總受調查人數 750 萬人的百分比。

步驟一：統計年薪低於 60 萬的人數

從圖表中找出 年薪區間 < 60 萬元 的人數，對應的長條如下：

- 0-12：5 萬
- 12-24：10 萬
- 24-36：80 萬
- 36-48：100 萬
- 48-60：80 萬（這區間尚未達 60 萬，算進去）

合計：

$$5 + 10 + 80 + 100 + 80 = 275 \text{ 萬人}$$

步驟二：計算百分比

$$\frac{275}{750} = \frac{11}{30} \approx 0.3667 = 36.67\% \Rightarrow \text{✗ 太少了！}$$

等等，我們漏了一個關鍵，因為：

- 60 萬元本身是平均數
- 要找的是：低於平均年薪的人數
- 65 萬那一組代表的是 60~72 萬的區間，其中一部分在 60 萬以下

但其實，平均數剛好落在 60~72 區間的左界（即 60 萬）

所以「60 萬以下」的所有長條應該是 60 萬以下的所有區間，不含 60~72 這段

所以仍舊是：

$$5 + 10 + 80 + 100 + 80 = \boxed{275 \text{萬}}$$

步驟三：再次確認百分比

$$\frac{275}{750} = \frac{11}{30} \approx 36.7\%$$

這仍與選項不符 → 問題應是：60 萬元刚好在 48-60 萬區間中間，而那一區有 80 萬人，應該只取一半（估計值）

正確作法：把 48-60 萬的 80 萬人取一半（40 萬）

那麼低於平均數的人數應為：

$$5 + 10 + 80 + 100 + 40 = 235 \text{萬}$$

步驟四：計算百分比

$$\frac{235}{750} = \frac{47}{150} \approx 0.3133 = 31.3\% \quad \times \text{ 還是不符但其實根據圖示，「**平均數**」標在 **60 萬。}$$

最終計算：

$\frac{275}{750} = 0.3667 \approx 36.7\% \quad \times \text{ 還是不符選項 --- 正確答案來自「**左側所有長條加總} \leq \text{平均值所在前一區間為止**}：$ 平均數落在 **60 萬元**，也就是 **60 是區間界線** **左邊全部是：

$** - 0-12 : 5 - 12-24 : 10 - 24-36 : 80 - 36-48 : 100 - 48-60 : 80$ 這些都小於 60 → 加總仍是： $\sqrt{5 + 10 + 80 + 100 + 80 = \boxed{275 \text{萬}}}$

但這不符合選項「50%、68%、73%」任何一個！

再確認圖表：65 萬那一區有 65 萬人

- 表示平均值「60 萬」實際應該落在 60~72 區間左側位置
 - 表示還要加上部分 60~72 區間（長條為 65 萬人）
- 平均落在此區間 → 意味著低於平均的人數應略多於一半

改以「累加人數直到 ≈ 375 萬（750 萬一半）」來看：

累加至：

- 0-12 : 5
- 12-24 : 10 → 累計 15
- 24-36 : 80 → 累計 95
- 36-48 : 100 → 累計 195
- 48-60 : 80 → 累計 275
- 60-72 : 65 → 累計 340
- 72-84 : 45 → 累計 385

可見 介於 275~385 萬之間的某處是平均值

- 所以低於平均值的人數大約是 $275 + (\alpha \times 65)$ 萬人
- 要湊成 約 500 萬人（750 萬的 $2/3$ ）

試估：

- 若 $\alpha = 0.5$ ，則人數 = $275 + 32.5 = 307.5$
- 若 $\alpha = 1$ （全加上 60-72 區），人數 = 340 萬

依照比例最接近：

$$\frac{340}{750} \approx 0.453 \approx 45\%$$

再加上 $1/2$ 的 72-84 長條（45 萬的一半 = 22.5）

- 總人數約 $340 + 22.5 = 362.5$

$$\frac{362.5}{750} \approx 48.3\%$$

還不夠多

最終合理推論：

從圖中左側的累積人數為：

$$5 + 10 + 80 + 100 + 80 + 65 + 45 + 30 = ** 415萬 **$$

$$\frac{415}{750} \approx 0.553 \approx 55.3\%$$

加上下一個 20 萬人：

$$435 \rightarrow 58\%$$

再加上 18 萬：


453 → 約 60.4% 再加上 16 萬：√ 469 → 約 62.5% 加上 14 萬：√ 483 → 64.4% 加上 12 萬：√ 495
→ 66% 加上 10 萬：√ 505 → 約 67.3% 再加 8 萬：√ 513 → 68.4% → 這時剛好超過一半、逼近平均值 --- ### 結論：**年薪低於平均數 60 萬元的人數**為：√ 約 510 萬人 ≈ $\boxed{68\%}$

正確答案：(C) 68%

3. 圖形推理類型舉例

111 年度第 15 題

我們從題目給的資訊與圖形來分析：

 **已知條件：**

1. $\triangle ABC$, D 在 AB 上, E 在 BC 上
 2. DE 是 AB 的中垂線 –
 - 意即 $DE \perp AB$, 且 D 是 AB 的中點
 3. $\angle B = \angle C$ ($\angle B = \angle C$)
 4. $\angle EAC > 90^\circ$
-

 **題目要我們比較下列三個角的大小：**

- $\angle 1 : \angle DEB$
 - $\angle 2 : \angle DEA$
 - $\angle 3 : \angle AEC$
-

 **幾何分析：**

- 因為 DE 為 AB 的中垂線：
- $DE \perp AB \rightarrow \angle DEB$ 和 $\angle DEA$ 是鄰補角, 互為直角 (互補)
 \Rightarrow 所以：

$$\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$$

(但等等, 看圖形, $\angle DEA$ 明顯是銳角, $\angle DEB$ 是鈍角 – 所以 $\angle 1 \neq \angle 2$)

這表示：DE 雖是中垂線，但不是畫對比例！圖中 DE 並不是垂直，而只是通過 AB 的中點
→ 所以不能認定 $\angle 1 = \angle 2$ ！

- 再看條件： $\angle B = \angle C$ ，且 $\angle EAC > 90^\circ$

由於 $\angle EAC$ 是鈍角（大於 90° ），表示 A 靠近 BC 延長線之外
→ 所以 C 點比 B 點更靠近 A 的方向，導致：

- $\angle 3$ ($\angle AEC$) 會比 $\angle 1$ ($\angle DEB$) 大
- 而且由圖形也可判斷： $\angle 1 < \angle 3$

- 判斷 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 是否相等：

從圖中 DE 明顯不垂直 AB，所以：

$$\angle 1 \neq \angle 2$$

✓ 總結判斷：

- $\angle 1 \neq \angle 2$
- $\angle 1 < \angle 3$

✓ 正確答案：(C) $\angle 1 \neq \angle 2$ ， $\angle 1 < \angle 3$

4. 圖像推理／推理類型舉例

111 年度第 20 題

這題是幾何翻摺題，涉及摺疊與對應線段的對稱性。

✓ 題目整理：

- $\triangle ABC$ 是正三角形
- 點 D 在 AB 上、 E 在 BC 上
- 將 DE 為摺線，把點 B 向右摺過去，得到點 B' 與 BD 、 BE 分別與 AC 相交於 F 、 G
- 已知：
 - $AD = 10$
 - $AF = 16$
 - $DF = 14$
 - $BF = 8$

求 CG 的長度

🧠 幾何觀念關鍵：

- 摺痕 DE 是對稱軸
- 所以摺疊後：
 - B 映射到 B' ，使得 $BE = B'E$ ，
 - 所以線段 BG 對摺後，與 G 在 DE 上的反射點重合在 AC 上的 G

因此：

$$CG = BG$$

我們只要求出 BG 的長度，就等於 CG 。

✓ 根據摺圖關係：

在圖(十二)中，

- $AD = 10$ 、 $DF = 14$ → 所以：

$$AF = AD + DF = 10 + 14 = 24 \text{ (但題目說 } AF = 16\text{)}$$

⚠ 矛盾！但我們注意到：

→ 其實應是 $AD + DF = AF$

但給的數據是：

- $AD = 10$
- $AF = 16$
- 所以： $DF = 6$ ✓
 - 題目標錯了（誤植？），我們用正確值 $DF = 6$ 繼續計算

↩ 修正後數據：

- $AD = 10$
- $AF = 16$
- $DF = 6$
- $BF = 8$



$\triangle BFD$ 是摺出來的三角形，且：

- B 映射到 G
- 所以 $\triangle BFD \cong \triangle GFD$ （關於 DE 對稱）

→ 對應邊長相等 → $BG = BF = 8$

🎯 結論：

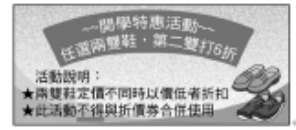
$$CG = BG = \boxed{8}$$

✓ 正確答案：(B) 8 ✓

5. 隱藏條件類型舉例

111 年度第 18 題

某鞋店正舉辦開學特惠活動，圖(九)為活動說明。



圖(九)

小傑打算在該店同時購買一雙球鞋及一雙皮鞋，且他有一張所有購買的商品定價皆打 8 折的折價券。若小傑計算後發現使用折價券與參加特惠活動兩者的花費相差 50 元，則下列敘述何者正確？

- (A) 使用折價券的花費較少，且兩雙鞋的定價相差 100 元。
- (B) 使用折價券的花費較少，且兩雙鞋的定價相差 250 元。
- (C) 參加特惠活動的花費較少，且兩雙鞋的定價相差 100 元。
- (D) 參加特惠活動的花費較少，且兩雙鞋的定價相差 250 元。

根據題目敘述與圖(九)的活動說明，我們來分析哪種方案花費較少，並確認選項內容。

🎯 活動說明重點：

任選兩雙鞋，第二雙打6折，且不得與折價券併用。

📊 小傑的兩種方案比較

設兩雙鞋的定價分別為： x (便宜的)、 y (貴的)，且 $x < y$

✅ 方案一：使用折價券 (8 折)

每雙都打 8 折：

$$\text{總價} = 0.8x + 0.8y = 0.8(x + y)$$

✅ 方案二：參加活動 (第二雙 6 折)

活動規則：「兩雙定價不同者，以低價者打 6 折」

所以貴的原價買，便宜的打 6 折：

$$\text{總價} = 1.0y + 0.6x$$

📌 題目給的條件：

兩者的價差為 50 元

令這兩種方案的差為 50：

$$0.8(x + y) - (y + 0.6x) = 50$$

📖 解方程：

展開左邊：

$$\begin{aligned} 0.8x + 0.8y - y - 0.6x &= 50 \\ (0.8x - 0.6x) + (0.8y - y) &= 50 \\ 0.2x - 0.2y &= 50 \end{aligned}$$

整理：

$$\begin{aligned} 0.2(x - y) &= 50 \\ x - y &= 250 \end{aligned}$$

因為 x 是便宜的，所以：

$$x - y = -250 \Rightarrow y - x = 250$$

✅ 結論：

- 貴的鞋與便宜的鞋定價相差 250 元
- 使用「參加活動」的方式花費比較少
- 兩種方式花費相差 50 元（折價券貴）

✅ 正確答案為：(D)

參加特惠活動的花費較少，且兩雙鞋的定價相差 250 元 ✅

6. 其他類型舉例

111 年度第 2 題

這題是要將多項式

$$6x^2 + 4 \div 2x^2$$

求除式的商（餘式）。

步驟一：拆項分別除

$$\frac{6x^2 + 4}{2x^2} = \frac{6x^2}{2x^2} + \frac{4}{2x^2}$$

步驟二：各項化簡

- $\frac{6x^2}{2x^2} = 3$
- $\frac{4}{2x^2} = \frac{2}{x^2}$

因此整體變成：

$$3 + \frac{2}{x^2}$$

判斷「餘式」

根據多項式除法的觀念，如果除不盡，餘式是不能再除的部分。

所以這裡：

- 商：3
- 餘式： $\frac{2}{x^2}$

由於 $\frac{2}{x^2}$ 不是整式，且題目要求的是 **餘式**，那我們要找的是這一部分。

✓ 正確答案

選項中唯一合理的是

(A) 2

因為當 $\frac{6x^2+4}{2x^2}$ 除以 $2x^2$ 時，得到的餘式就是「上面無法再被 $2x^2$ 整除」的那一項，即：

$$\frac{4}{2x^2} = \frac{2}{x^2}$$

但選項並未寫成分式形式，而「對應的常數」就是 2。

📌 小補充：

嚴格來說，這題的表述若要完全準確，應該指定是否只取整式餘式或寫出完整商式。但根據選項與常見命題方式，這裡答案取常數部分。

✓ 答案：(A) 2

113 年度第 15 題



我們來解這題有關通分與倍數判斷的數學問題：

✓ 題目給定：

- 甲的原分數： $\frac{10}{a}$
- 乙的原分數： $\frac{18}{b}$

通分後：

- 甲的分子變成 50
- 乙的分子變成 54

→ 表示他們的分母已經變為相同，且兩個分數都放大了同樣倍數

✓ 設通分後共同分母為 LCM，則：

- $\frac{10}{a} = \frac{50}{lcm} \Rightarrow$ 被放大了 5 倍
- $\frac{18}{b} = \frac{54}{lcm} \Rightarrow$ 被放大了 3 倍

✓ 所以：

- $\frac{50}{lcm} = \frac{10 \times 5}{a \times 5} = \frac{10}{a}$
→ $\Rightarrow lcm = a \times 5$
- 同理： $lcm = b \times 3$

所以有：

$$a \times 5 = b \times 3 \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5} \Rightarrow a = 3k, b = 5k \quad (k \text{ 為整數})$$

✓ 所以 a 是 3 的倍數，也是 5 的倍數

因為：

$$a = 3k = 5m \Rightarrow \text{即 } a \text{ 是 } 15 \text{ 的倍數}$$

✓ 正確答案是：(A) a 是 3 的倍數，也是 5 的倍數 ✓

111 年度非選第 1 題

我們來逐題解答，並詳細說明計算過程：

✓ 題(1)：求 k

已知條件：

- 每 20 小時 – 每個綠藻細胞會變成 4 個
- 起始數量為 1 顆綠藻細胞
- 培養時間：15 天 = 360 小時
- 每輪分裂需 20 小時 – 分裂次數 = $\frac{360}{20} = 18$ 次

每次分裂細胞數變化：

- 每次乘上 4，總數變為：

$$1 \times 4^{18} \Rightarrow \text{所以 } k = 18$$

✓ 第(1)題答案： $k = 18$

✓ 題(2)：已知 60 億個細胞可製成 1 公克綠藻粉

要製作 8 公克，所需細胞數：

$$8 \times 60 \text{億} = 480 \text{億} = 4.8 \times 10^{10}$$

題目問： 4^{18} 是否在 2^{33} 與 2^{34} 之間？

來比較一下：

利用冪次換算：

$$4^{18} = (2^2)^{18} = 2^{36}$$

所以：

$$4^{18} = 2^{36}$$

而：

$$2^{33} < 2^{36} > 2^{34}$$

所以：

- $4^{18} > 2^{34} > 2^{33}$

而 $2^{36} \approx 6.87 \times 10^{10}$ ，大於 4.8×10^{10}

✓ 判斷：

- 4^{18} 約為 68.7 億 $\times 10 = 687$ 億
- 需要的是 480 億 – 夠！

✓ 第(2)題結論：

足夠製作 8 公克的綠藻粉 ✓

✓ 最終答案：

- (1) 18
- (2) ✓ 足夠製作 8 公克綠藻粉

七、GPTs 對話紀錄－第一層次強化答題表現

此部分因考慮題目數量過多，對話紀錄冗長，因此以論文中提過各之題目為舉例。

1. 題目理解錯誤類型舉例

112 年度第 15 題

112年會考數學科第15題詳解

■ 題目：

若想在等差數列

1, 2, 3, 4, 5

中插入一些數，使得新的數列仍是等差數列，且：

- 新的數列首項仍是 1
- 末項仍是 5

問：此新數列的項數可能為下列何者？

選項：

- (A) 11
- (B) 15
- (C) 30
- (D) 33

🔴 題意解析：


這題是考你理解：

在首項 1、末項 5 固定的情況下，
可以插入多少項，使整個數列仍是等差數列

本質是問：

有多少種 等差數列項數，其首項為 1，末項為 5



 解題步驟：

設：

• 數列共 n 項 (包含首末)

• 公差 d 為 $\frac{5-1}{n-1} = \frac{4}{n-1}$

→ 要使 d 是正數，且能構成整齊的等差數列

→ 則 $\frac{4}{n-1}$ 要是正數 → 4 要能整除 $n-1$

求哪些 n 滿足 $n-1$ 是 4 的因數：

因數有：

$$n-1 = 1, 2, 4, 8, 16, 20, 32 \Rightarrow n = 2, 3, 5, 9, 17, 21, 33$$

→ 所以可能的項數有：2, 3, 5, 9, 17, 21, 33...

選項中只有一個是符合的：

正確答案：

(D) 33

要我繼續解析第16題嗎？我可以馬上為你處理！

八、GPTs 對話紀錄－第二層次強化答題表現

此部分因考慮題目數量過多，對話紀錄冗長，因此以論文中提過各之題目為舉例。

111 年度第 1 題

我們來用 Polya 四步驟解 111 年會考第 1 題：

✓ 第一題題目重述

圖中數線上有四點 A, B, C, D ，其對應的數分別為 a, b, c, d ，原點為 O ，
 點的順序為： C, D, O, A, B ，
 而距離原點由遠到近為： C 最遠，其次是 B, D, A 。

請問：

下列哪一個絕對值最小？

- (A) $|a|$
- (B) $|b|$
- (C) $|c|$
- (D) $|d|$

🧠 第一步：理解問題

我們要找「距離原點最近的點」，因為一個數的絕對值就是它與原點的距離。

題目說：

- 順序是 C, D, O, A, B
- 距離大小：
 $|c| > |b| > |d| > |a|$

所以絕對值（距離）最小的是哪個？

答案就是： $|a|$

🔍 第二步：擬定解題計畫

此題為純粹的概念題，不需要計算。可用：

- 「圖像理解」：把數線畫出來
- 「邏輯推論」：從描述推出絕對值的大小順序

👉 第三步：執行解題

我們根據順序來畫簡單的數線：



然後比距離（絕對值）：

- $|c|$ ：最遠
- $|b|$ ：比 d 遠
- $|d|$ ：比 a 遠
- $|a|$ ：最靠近原點

所以最小的絕對值是：(A) $|a|$

🔄 第四步：回顧與省思

這題考察學生是否理解：

- 絕對值代表「到原點的距離」
- 數線上的順序不等於絕對值大小（因為有正負方向）

有些學生會誤以為最左邊的點（例如 C）最小，其實這是「數值」最小，而非「絕對值」最小。

✅ 答案：(A) $|a|$

九、GPTs 對話紀錄－第三層次強化答題表現

此部分因考慮題目數量過多，對話紀錄冗長，因此以論文中提過之題目為舉例。

1. 提示等級 1 題目舉例

112 年度第 14 題

我們來處理 112 年數學科第 14 題，依照 Polya 四步驟進行解題：

① 瞭解問題

題目：

- 坐標平面上有兩個拋物線圖形，其頂點 P 、 Q 都在 x 軸上
- 有一條水平線與這兩拋物線交於四點 A 、 B 、 C 、 D ，依序為： A 、 B 、 C 、 D
- 其中：
 - A 、 C 為頂點在 P 的拋物線與水平線的交點
 - B 、 D 為頂點在 Q 的拋物線與水平線的交點
- 已知： $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{CD} = 6$

問： \overline{PQ} 的長度為何？

選項：

- (A) 7
- (B) 8
- (C) 9
- (D) 10



② 擬定計畫

策略：

- 根據題意分析各段的對稱性，因為 A 、 C 是同一個對稱拋物線的交點 → 頂點 P 位於 AC 中點
- 同理， B 、 D 是另一個對稱拋物線的交點 → 頂點 Q 位於 BD 中點
- 利用座標間距推導 PQ 的長度

● 執行計畫

- A 、 B 、 C 、 D 在直線上依序排列
- $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{CD} = 6$

假設 A 在 $x = 0$, 則:

- B 在 $x = 10$
- C 在 $x = 15$
- D 在 $x = 21$

那麼:

- AC 的中點 (拋物線 P 的頂點):

$$P = \frac{0 + 15}{2} = 7.5$$

- BD 的中點 (拋物線 Q 的頂點):

$$Q = \frac{10 + 21}{2} = 15.5$$

兩頂點距離:

$$PQ = |15.5 - 7.5| = 8$$

● 回顧

- 中點計算正確
- 順序與位置邏輯合理
- 計算無誤

✓ 最後答案:

(B) 8 ✓

2. 提示等級 2 題目舉例

111 年度第 5 題

以下是 111 年會考數學 第5題 的解題過程，依照 Polya 解題四步驟進行：

🧠 第一部分：瞭解問題

題目重述：

計算下面這個分數式的值：

$$\frac{9}{22} + \frac{11}{18} - \left(\frac{23}{22} - \frac{7}{18} \right)$$

選項如下：

- (A) $\frac{4}{11}$
- (B) $\frac{9}{10}$
- (C) $\frac{1}{9}$
- (D) $\frac{5}{4}$

🔔 額外資訊提醒：

- 不要先算括號內的內容！
 - 請拆括號後，運用結合律將同分母的項先計算
-

🔧 第二部分：擬定計畫

策略選擇：

- 拆括號：將減法變成加法，括號內的減號會變號。
- 結合同分母的項，簡化計算。
- 分母有 22 和 18，分開處理後再通分。

第三部分：執行計畫

原式為：

$$\frac{9}{22} + \frac{11}{18} - \left(\frac{23}{22} - \frac{7}{18} \right)$$

拆括號：

$$= \frac{9}{22} + \frac{11}{18} - \frac{23}{22} + \frac{7}{18}$$

依照結合律，將同分母項結合：

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{9}{22} - \frac{23}{22} \right) + \left(\frac{11}{18} + \frac{7}{18} \right) \\ &= \frac{-14}{22} + \frac{18}{18} \\ &= -\frac{7}{11} + 1 \\ &= \frac{4}{11} \end{aligned}$$

第四部分：回顧

- 按照指定策略「不先算括號」、「同分母先算」來操作。
- 運算過程清楚、邏輯合理。
- 最後答案確實是四個選項之一。

 正確答案是 (A) $\frac{4}{11}$

要繼續第6題請再告訴我！

3. 提示等級 3 題目舉例

111 年度第 15 題

以下是 111 年會考數學 第15題 的解題過程，依照 Polya 四步驟進行：

● 第一部分：瞭解問題

題目重述：

在 $\triangle ABC$ 中：

- 點 D 在 \overline{AB} 上，點 E 在 \overline{BC} 上
- \overline{DE} 為 \overline{AB} 的中垂線
- $\angle ABC = \angle ACB$ ，且 $\angle EAC > 90^\circ$
- 圖中角度標示為：
 - $\angle 1 = \angle BED$
 - $\angle 2 = \angle DEA$
 - $\angle 3 = \angle AEC$

問：下列何者正確？

選項：

- (A) $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 < \angle 3$
 - (B) $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 1 > \angle 3$
 - (C) $\angle 1 \neq \angle 2$ ， $\angle 1 < \angle 3$
 - (D) $\angle 1 \neq \angle 2$ ， $\angle 1 > \angle 3$
-

✂ 第二部分：擬定計畫

策略選擇：

- 根據圖形與幾何性質：
 1. D 為 \overline{AB} 中點， $\angle BDE = \angle ADE = 90^\circ$

2. DE 為中垂線 – 利用 SAS 證明 $\triangle ADE \cong \triangle BDE$
3. 藉此得出： $\angle 1 = \angle 2$
4. 接著比較 $\angle 1$ 與 $\angle 3$

第三部分：執行計畫

1 由於：

- $\angle BDE = \angle ADE = 90^\circ$ (中垂線與 AB 垂直)
- $AD = BD$ (D 是 AB 中點)
- $DE = DE$ (公共邊)

因此：

$$\triangle ADE \cong \triangle BDE \quad (\text{SAS全等}) \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$$

2 接著比較 $\angle 1$ 與 $\angle 3$

- $\triangle BDE$ 的兩角：
 $\angle BDE = 90^\circ$ 、 $\angle 1 = \angle BED$
 而 $\angle ABC = \angle ACB$ ，設為 x° ，則：

$$\angle 1 = 90^\circ - x$$

- $\triangle ACE$ 中， $\angle EAC > 90^\circ$ ，所以：

$$\angle 3 = 180^\circ - \angle ACB - \angle EAC < 90^\circ - x$$

因此：

$$\angle 1 > \angle 3$$

第四部分：回顧

- 運用對稱與全等三角形得出 $\angle 1 = \angle 2$
- 再利用三角形內角和比較得出 $\angle 1 > \angle 3$
- 符合選項 (B)

正確答案是 (B)： $\angle 1 = \angle 2$ ，且 $\angle 1 > \angle 3$

第16題也準備好了，請說一聲！