

國立臺灣師範大學理學院數學系

碩士論文

108 課綱高一數學素養試題開發



指導教授：許志農 博士

中華民國 111 年 7 月

July 2022



## 誌 謝

研究所終於畢業了，不像其他同學能三、四年，甚至兩年就可以畢業。我是從 105 年的 2 月，間斷的讀到 111 年 7 月，期間經過了系所轉組、休學、替代役、考教師甄試等等。

在這裡我要謝謝我的指導老師許志農教授。謝謝老師，即使我中間休學了這麼久，回來學校還是願意指導我到畢業。跟老師學習的這一段期間，我學到了如何將文字精煉，以及洞察素養試題的能力。我剛開始不了解老師心中的素養試題，但在每次的課堂上跟老師以及其他研究生討論後，才漸漸的了解何謂好的素養題，無形中也培養我出素養題的能力，感謝老師讓我學到這樣的能力。

我也要謝謝統計組的教授們。當初因為我對統計有興趣，所以報考師大數學所統計組。但實際修課以及跟各個老師諮詢過後才發現，最終的興趣還是在數學教育，後來我也真的轉到數學教育組了。

在這裡我還要謝謝數學教育組的楊凱琳教授與曹博盛教授，兩位教授時常會被我詢問各種數學教育上的問題。謝謝老師們每次都很熱心地與我討論、替我解惑。

再來我要謝謝我的爸媽，當時一開始還沒有工作可以負擔學費，是爸媽幫忙出前期的學費。而在我讀到一半有點想要放棄、以為我爸媽會希望我繼續努力完成學業的時候，我爸跟我說：「我沒有要求你一定要讀完研究所，如果真的讀得很辛苦、壓力很大，那就不要讀了，日子過得開心比較重要。」這句話讓我心裡的壓力減輕很多。

我要謝謝宜蘭高中的數學科同事們，不吝幫我填寫素養試題的問卷，也要感謝宜蘭高中的其他同事們，時常給予我鼓勵、打氣，以及分享以往讀研究所時的經歷。甚至提前幫我規劃研究所畢業後的聚餐跟旅遊，讓我在寫論文的最後階段減輕了許多煩悶。

我還要感謝褚雪惠學姊，時常利用深夜犧牲自己的睡眠時間以及準備教師甄試的時間，跟我一同討論我出的這 20 題素養試題。學姊除了陪著我修完這些題目以外，也教了我很多論文寫作的技巧，還聽了我許多訴苦。

我要感謝古念慈，陪著我走過這很長一段時間，從教師檢定、研究所入學、學日文去海外教育役、教師甄試，也能夠忍受我時常用寫論文為由逃避做一些家務事，到現在研究所終於要畢業，謝謝你這段期間的體諒與體貼。

最後我要感謝我自己，儘管研究所休學停滯了好一段時間，還是願意在去年鼓起勇氣回去學校面對所有的一切。在這一年，能在同時接了數理資優班、雙語實驗班、數學多元選修、日文自主學習指導、雙語學分班的情況下，咬緊牙關撐過這壓力破表的一年。每個週末都把自己關在家裡備課和寫論文，為的就是不要因為研究所沒有畢業，而在人生中留下一個遺憾。謝謝心中那個強大的自己，支持我走完最辛苦的一年。



陳宗聖 謹誌

中華民國 111 年 7 月

# 中文論文題目：108 課綱高一數學素養試題開發

指導教授：許志農

研究生：陳宗聖

## 摘要

針對新實行的「108 課綱」所做的改變，素養導向的評量試題也隨之興起。本研究旨在開發以素養為導向的評量試題，並作為發展教師在素養試題之命題上的參考範例。為了達到研究目的，研究者以「大學入學考試素養導向命題簡介」為依據，並從生活情境及科普書籍取材，以高中數學第一二冊內容為範圍，同時考量試題需符合高中生的數學能力，進而產出以素養為導向的評量試題。研究方法採用半結構式訪談與量表問卷，以研究者任職學校的教師及學生為施測及訪談對象，以期達到良好的信效度，以作為未來高中數學教師在素養導向的命題上的參考及依據。

關鍵字：108 課綱、數學素養、試題開發

# 目 錄

第壹章 緒 論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究目的與問題.....	4
第三節 名詞釋義.....	5
第四節 研究限制.....	7
第貳章 文獻探討.....	8
第一節 108 課綱與 99 課綱的差異.....	8
第二節 108 課綱高一數學內容.....	13
第三節 核心素養與數學素養.....	15
第四節 大學入學考試素養導向命題.....	33
第五節 數學素養試題的大考中心試題舉例.....	36
第參章 開發研究與命題方向.....	41
第一節 研究方法與步驟.....	41
第二節 試題發展.....	43
第肆章 總結與建議.....	114
第一節 總結.....	114
第二節 建議.....	114

## 表 次

表 2-1 108 課綱與 99 課綱內容的差異 .....	9
表 2-2 學習內容主題和分年雙向細目表 .....	14
表 2-3 108 課綱核心理念、核心素養面向與核心素養項目表 .....	16
表 2-4 PISA 2012 七個數學力與三個解題歷程的交織 (OECD, 2013, p. 32) ...	27



## 圖 次

圖 1 - 1 TIMSS (2011) 臺灣學生的數學能力及對數學興趣分布 .....	2
圖 1 - 2 TIMSS (2011) 臺灣學生的數學能力及認為數學實用分布 .....	2
圖 2 - 1 108 課綱數學的學習路徑 .....	9
圖 2 - 2 教育部國民及學前教育署 (2019) 核心素養的內涵 (三面九項) .....	16
圖 2 - 3 Model of Mathematical literacy (Pugalee, 1999) .....	21
圖 2 - 4 交織的能力圖 (NRC, 2001) .....	23
圖 2 - 5 KOM 之花 (Niss & Højgaard, 2011) .....	24
圖 2 - 6 數學素養的實踐之模型 .....	25
圖 2 - 7 數學素養中數學推理與問題解決歷程之關係 .....	29
圖 2 - 8 PISA 2022 數學評量架構 (OECD, 2018a) .....	30



# 第壹章 緒論

本章共分四節：研究背景與動機、研究目的與問題、名詞釋義、研究限制。

## 第一節 研究背景與動機

近年來，許多學生抑或是老師，時常會對於為何學習數學抱持著疑惑。隨著年段的提高，不喜歡數學的比率也隨之增加，除此之外，大多數的學生都會利用背誦公式、背誦定理的方式來準備數學（劉祥通，周立勳 & 黃國勳，2008）。導致學生學完畢氏定理之後，會在心裡想著：「這有什麼用？」，或者是背完乘法公式之後，會在心裡又想著：「這有什麼用？」。造成學生對於數學的信念是：「除了應付考試之外，數學一點用處都沒有。」這種現象（劉祥通，周立勳 & 黃國勳，2008），甚至有「數學無用論」一說出現。

國際數學與科學成就趨勢調查 (Trends in Mathematics and Science Study, TIMSS) 中發現，亞洲地區（如香港、日本和韓國）學生相較於世界各國，對數學的興趣普遍低落，學生數學程度雖然好，但卻不認為數學是有用的，其中尤其特別的是，在數學成就前十名的國家中，臺灣學生喜歡數學的學生人數比例為世界數一數二低，認為學習數學有用的人數也是十名內比例最低的（陳億穎 & 徐蔚萱，2016）。由此可見，引發學生對於學習數學的動機，勢在必行，研究者認為，要讓學生從認知「學習數學是有用的」開始著手，也讓學生認知數學與生活緊密結合，才能讓學生對數學無用的想法改觀。

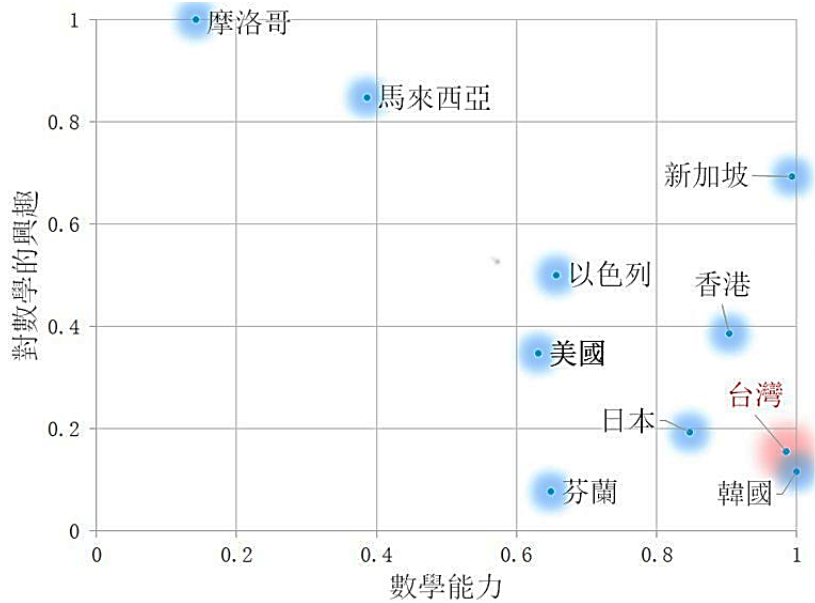


圖 1 - 1 TIMSS (2011) 臺灣學生的數學能力及對數學興趣分布



圖 1 - 2 TIMSS (2011) 臺灣學生的數學能力及認為數學實用分布

108 課綱以「核心素養」作為課程發展的主軸，所謂的「核心素養」是指一個人為了適應現在的生活環境以及面對未來的種種挑戰，所應具備的知識、能力與態度。核心素養強調學生的學習不只於學科知識及技能，也需關注學習與生活的結合（12 年國教 / 課程綱要-108 課綱重點）。

相較於以往九年一貫課程綱要（簡稱九貫課綱）中所使用的概念，如「十大基本能力」與「分段能力指標」等詞，在 108 課綱中均未再沿用，而是出現「核心素養」與「學習重點」等概念（林永豐，2018）。由此可見，新課綱強調「素養」的重要性，在這樣的背景下，設計素養導向教學以及開發素養導向試題會是現行課綱的主軸。

為了產生學生對於學習數學的動機與讓學生認知到數學與生活上的連結，以及結合數學與素養，研究者致力於開發高中數學學科的素養試題。



## 第二節 研究目的與問題

### 壹、研究目的

由於數學素養是國家新推行的政策，故本研究之目的，在於開發出良好的素養導向試題來給學生以及老師作為命題及評量之參考，同時也讓學生施測，評定學生是否具備數學素養的能力。

### 貳、研究問題

基於上述研究目的，本研究所擬定的研究問題為：

- 一、何謂良好的素養試題？
- 二、如何確認這些素養試題有符合優良的定義？



### 第三節 名詞釋義

本研究主要探討 108 課綱架構下大學入學考試數學素養導向試題的發展方向，因此針對 108 課綱、大學入學考試、數學素養進行如下的界定：

#### 壹、108 課綱

教育部於 103 年 11 月發布「十二年國民基本教育課程綱要總綱」，各領綱陸續發佈，並於 108 年 8 月正式上路，因此又稱為「108 課綱」。

#### 貳、大學入學考試

其中評量數學能力的考科有三種：

1. 學科能力測驗（以下簡稱學測）「數學 A」與「數學 B」：

評量考生基本核心能力，成績主要作為繁星推薦與申請入學的依據，自 111 學年度起，亦可作為分發入學使用；三項入學管道中，大學校系可依其學系發展與選才規劃，以學測考科成績作為檢定、倍率篩選與採計等項目。

2. 分科測驗「數學甲」：

旨在評量考生關鍵學科能力，成績主要作為分發入學使用。採用分發入學管道招生的校系，系可依其特色及需求，就學測六個考科、分科測驗七個考科當中，採計某些考科，以考試成績選才。

#### 參、數學素養

本研究對於「數學素養」一詞的定義將依循經濟合作暨發展組織 OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) 所籌劃的國際學生能力評量計畫 PISA(the Programme for International Student Assessment)對數學素養提出的定義，其定義為：「個體在各種真實世界的情境脈絡中，進行數學推理，並透過形成、應用、詮釋數學等技能解決問題的能力，包含運用數學概念、程序、事實與工

具，以描述、解釋和預測現象。透過數學素養，個體能瞭解數學在世界中所扮演的角色，以及作為具建設性、投入性與反思力的 21 世紀公民所應具備的周延判斷和決策。」



## 第四節 研究限制

本研究試題測試樣本為宜蘭市一所高中的高一普通班三個班級，共計 105 位學生為研究對象，探討其新開發的數學素養試題施測的狀況，研究結果只能呈現出局部程度的學生對於數學素養試題表現之結果，所獲得的結論可供教師未來將開發之素養試題給任課班級練習與評量之參考，也可供教師作為未來素養試題命題之參考，但不建議將學生成績結果與施測結果做過多推論。

本研究聚焦於教師藉由透過學生完成試題來評定開發之素養試題是否適合作為學生練習及學習之參考，但未進一步施測學生是否具備課綱中提及之數學素養的項目，由於數學素養其中的數學面相多且廣，難以單單從有限試題的表現上就可判定學生是否具備數學素養，數學素養除了從學生對於試題的表現，還需從日常的多元評量綜合評定，因此本研究無法過度推論教師開發的素養試題與學生具備數學素養的關聯性。

## 第貳章 文獻探討

本研究分析 108 課綱架構下大學入學考試數學試題的發展方向，因此在文獻探討的部分將分成四個章節進行討論，包含 108 課綱與 99 課綱的差異、108 課綱高一數學內容、數學素養、素養導向試題、優良試題舉例。

### 第一節 108 課綱與 99 課綱的差異

為了瞭解高中教師在開發素養導向試題時，有哪些單元是需要特別注意的，本節內容將探討：108 課綱與 99 課綱內容的差異。其差異大致可以分為四個項目：刪除、弱化、搬移、新增。刪除的部分，在必修部分有：「多項式函數的拉格朗日插值法、有理根判定、勘根定理」、「重複組合」、「連加符號  $\Sigma$ 」、「三角比與對數值的查表」、「線性規劃」；在選修部分有：「抽樣與統計推論」。（在必修數學 A、必修數學 B、及選修數學乙的細部刪減內容，將另外附在後幾頁的列表中。）弱化的部分為：「含絕對值的一次方程式、絕對值不等式」、「排列組合」、「三角測量」、「一般底的對數」、「平面向量的幾何表示」、「三元一次聯立方程式的三平面關係」。新增的部分是：「計算機融入教學，附帶科學記號數字與有效數字」、「二次、三次函數的局部圖形近似於一條直線；（10 年級）三次函數圖形的對稱點」、「（數據分布）百分位數」、「（10 年級古典機率）期望值」、「主觀機率和客觀機率的概念」（國家教育研究院，2020）。

108 課綱在規劃十二年一貫的數學課程時，必須考量課程內容能使國、高中之間課程可順利銜接，以及培養學生正確使用工具的素養（將計算機融入教學），另外也需考量到高二開始數學能確實分類，讓數學的學習路徑分為三種模式。

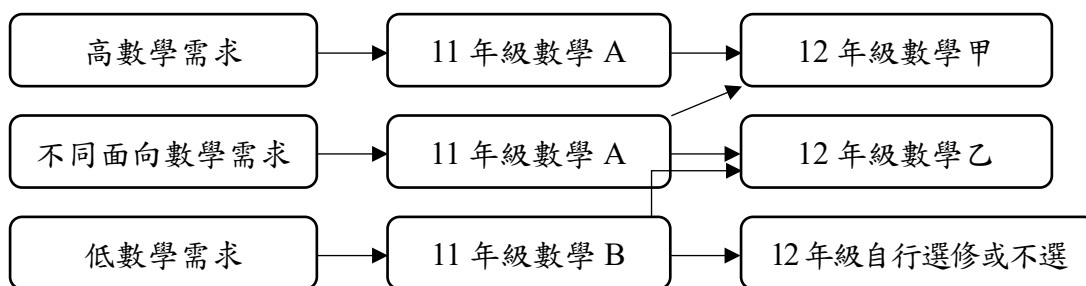


圖 2 - 1 108 課綱數學的學習路徑

以往的 99 課綱在數學的編排上每個章節仍是以一個大主題呈現，從簡單到困難的內容都在同一個章節內容裡，而 108 新課綱，希望學生在學習的銜接上不要出現太大的落差，在此做了許多的刪減跟新增，以及搬移的情況。99 課綱在高一就需要學習複數系統，由於這個單元的難度比較高，108 課綱就將複數的部分從高一課程內容搬移到高三課程內容。99 課綱以前，學生需要學習透過查表的方式來求三角函數值及對數值，由於這些內容在紙筆的計算上是屬於比較繁雜的部分，再加上 108 課綱引入了計算機教學，所以查表的內容，在 108 課綱都將其刪除。在高二的部分，原本「廣義角的三角比」、「極坐標」是在高二才學習，由於難易度相較於整個三角函數的單元來說比較基本，再加上 108 課綱在九年級就引入直角三角形的三角比內容，所以將這些部分搬移到高一就進行學習，而其他部分則繼續維持在高二內容。原本二元一次不等式的內容裡，線性規劃屬於難易度較高的內容，在 108 課綱底下，搬移到高三的數乙才來學習。高三的部分，以往在高三才會學習「弧度量」、「三角函數的圖形」及「正餘弦函數的疊合」，108 課綱也將其從原本數甲數乙的內容搬移到高二進行學習。

根據 108 課綱與 99 課綱內容的差異，總計表列如下：

表 2 - 1 108 課綱與 99 課綱內容的差異

刪除：必修部份（相對於 99 課綱數學 I, II, III, 和 IV-A）	
1.	多項式函數的拉格朗日插值法、有理根判定、勘根定理。
2.	複數系、方程式的虛根、代數基本定理。

3.	重複組合。	
4.	連加符號 $\Sigma$ 。	
5.	三角比與對數值的查表。	
6.	線性規劃。	
	必修數學 A	
	必修數學 B	
7.	二次曲線。	7. 三角的和差公式。
		8. 三角不等式、柯西不等式。
		9. 線性變換、轉移方陣。
		10. 空間概念之三垂線定理。
		11. 空間中的直線、平面方程式。
		12. 三元一次聯立方程式、三階行列式。
刪除：選修部份（相對於 99 課綱數學 IV-B+選修數學甲、選修數學乙）		
1.	抽樣與統計推論。	
	選修數學甲	
	選修數學乙	
		2. 一般三角函數的性質與圖形。
		3. 數列及其極限。
弱化		
1.	含絕對值的一次方程式、絕對值不等式。	
2.	排列組合：教學目標設定在得到古典機率所需的計數範圍，以及二項式展開。	

3.	三角測量：不另立單元，並且以長方體為主要模型。	
4.	一般底的對數。	
5.	平面向量的幾何表示（不在坐標平面上的平面向量）。	
6.	三元一次聯立方程式的三平面關係。	
	必修數學 A+選修數學乙	必修數學 B
7.	複數系、方程式的虛根。	7. 三角恆等式。
		8. (認識)圓錐曲線。
搬移		
1.	複數系、方程式的虛根：10 $\Rightarrow$ 12 年級選修（數學甲、數學乙有所區隔）。	
2.	勘根定理：10 年級 $\Rightarrow$ 選修數學甲（在 10 年級以「十進制小數的估計」呈現）。	
3.	有理數指數與常用對數，在 10 年級先以記號的形式出現。	
4.	指數與對數函數：10 $\Rightarrow$ 11 年級（數學 A、數學 B 有所區隔）。	
5.	連加符號 $\Sigma$ ：10 $\Rightarrow$ 12 年級（選修數學甲、選修數學乙）。	
6.	條件機率與貝氏定理：10 $\Rightarrow$ 11 年級。	
7.	極坐標、廣義角：11 $\Rightarrow$ 10 年級	
8.	直線方程式、圓方程式：11 $\Rightarrow$ 10 年級。	
9.	廣義角的三角比（正弦定理、餘弦定理）：11 $\Rightarrow$ 10 年級。	
10.	線性規劃：11 年級 $\Rightarrow$ 選修數學乙。	
11.	二次曲線：11 年級 $\Rightarrow$ 選修數學甲。	

12.	弧度量、三角函數：12 年級選修甲、數學乙 $\Rightarrow$ 11 年級（數學 A、數學 B 有所區隔）。	
13.	正餘弦函數的疊合：12 年級選修數學甲 $\Rightarrow$ 11 年級數學 A。	
新增		
1.	計算機融入教學，附帶科學記號數字與有效數字。	
2.	二次、三次函數的局部圖形近似於一條直線；（10 年級）三次函數圖形的對稱點。	
3.	（數據分布）百分位數。	
4.	（10 年級古典機率）期望值。	
5.	主觀機率和客觀機率的概念。	
	必修數學 A	必修數學 B
		6. 認識球面上的經線與緯線。
		7. 連續複利與 e 的認識。
		8. 列聯表與文氏圖的關聯。
	選修數學甲	選修數學乙
	6. 幾何分布。	6. 多項式函數的微分及其應用。
	7. 認識指對數函數的標準底 e。	7. 多項式函數的積分及其應用。 （詳見下一幅表格：99 課綱與 108 課綱「數學乙」之差異對照表。）
	8. 牛頓求根法。	

（國家教育研究院，2020）

## 第二節 108 課綱高一數學內容

99 課綱在國中小學的內容編排上是以「數與量 (N)」、「幾何 (S)」、「代數 (A)」、「統計與機率 (D)」、「連結 (C)」五類來進行分類，而在高中內容的編排上則是以「主題／子題」的分類方式來進行編排。108 課綱為了讓國高中的學習能夠順利銜接，將小學至高中的數學課程內容分成「數與量 (N)」、「空間與形狀 (S)」、「坐標幾何 (G)」、「關係 (R)」、「代數 (A)」、「函數 (F)」、「資料與不確定性 (D)」七類來進行分類，中學數學內容的部分只有「數與量 (N)」、「空間與形狀 (S)」、「坐標幾何 (G)」、「代數 (A)」、「函數 (F)」、「資料與不確定性 (D)」六類，而「關係 (R)」此類是針對國小的內容分類。

108 課綱在「數與量 (N)」的內容，從七年級要學的整數、指數，八年級學到的二次方根，將會銜接到高一實數單元，教師在教學與評量的重點會是計算機的操作，以及常用對數的定義與應用。而在「空間與形狀 (S)」及「坐標幾何 (G)」的分類下，從七年級學過的直觀幾何、八年級學過的測量幾何以及九年級學到的推理幾何與空間幾何，會銜接至高一的圓與直線、極坐標、三角比，教師應注意教學與評量上需連結國中學過的幾何定義，在圓與直線的單元內，確認學生能從圓的定義，用距離公式來推導其方程式，而在極坐標與三角比的單元內要用到畢氏定理以及距離公式來推導其坐標。在「代數 (A)」與「函數 (F)」的分類下，從國中學到的一元一次方程式、二元一次方程式、一元二次方程式及其函數圖形，將會延伸到高一所學到的三次函數，教師應讓學生從二次函數配成標準式的過程當中，連結三次函數的標準式，並讓學生從以往觀察函數圖形的經驗，來觀察三次函數的圖形特徵。最後一個是在「資料與不確定性 (D)」的分類上，從七年級學到的統計圖表與統計數據、八年級學過的統計資料處理、九年級學過的統計數據的分布及機率，會延伸到高一學到的一維數據及二維數據，教師應著重培養學生的數據素養及有系統地計算數據，讓學生能從給定的圖表著手，分析數據內的集中趨勢與分散趨勢。

根據 108 課綱高一數學內容，學習內容主題和分年雙向細目表列表如下：

表 2-2 學習內容主題和分年雙向細目表

年級	數與量 (N)	空間與形狀 (S)	坐標幾何 (G)	代數 (A)	函數 (F)	資料與不確定性 (D)
10 年 級	實數		坐標圖形的對稱性	式的運算	一次與二次函數	集合
	絕對值		直線方程式	多項式之除法原理	三次函數的圖形特徵	數據分析
	指數		圓方程式		多項式不等式	有系統的計數
	常用對數		直線與圓			複合事件的古典機率
	數值計算的誤差		廣義角和極坐標			
	數列、級數與遞迴關係		三角比			
	邏輯		三角比的性質			

(教育部國民及學前教育署，2018)

### 第三節 核心素養與數學素養

#### 壹、108 課綱的核心素養

108 課綱以「核心素養」縱貫整個課程發展，來達到課綱內的理念及目標，同時也顧及中小學不同教育階段間的連貫，以及不同領域與科目間的統整。108 課綱內對於「核心素養」的定義為：「一個人為了適應現在生活及面對未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度。」其中「核心素養」強調學習不局限於學科知識及技能，而應關注學習與生活的結合（教育部國民及學前教育署，2018）。

國外對於核心素養的定義中提到，「素養」的意涵，指的是個體為了發展成為一個健全的個體，必須為了適應生活情境的需求，而所不可或缺的知識

(knowledge)、能力 (ability) 或技術能力 (簡稱技能) (skill)、態度 (attitude) (Rychen & Salganik, 2001)。這段定義也與 108 課綱所定義的核心素養相符合。總歸來說，所謂「素養 (competencies)」就是由「知識 (knowledge)」、「能力 (ability)」及「態度 (attitude)」三大範疇交織而成，也是此三項的綜合應用。

在 108 課綱推行之前，課程強調學生學的是「知識」，以及培養孩子帶得走的「基本能力」。但在現今的臺灣，「素養」將會比「能力」還要更適合學生用於面對社會環境，108 課綱正是規劃往後的教育課程及評量內容除了「知識」以外，同時融入「能力」及「態度」，來培養學生學習的「素養」，並重視學生能將所學運用於社會環境中，以便學生面對現今這個知識隨手可得的時代，能達到跨領域的學習，最終成為一位終身學習者。

108 課綱中，核心素養強調以「終身學習者」的概念為中心，由「自發 (Taking the initiative)」、「互動 (Engaging the public)」、「共好 (Seeking the common good)」的核心理念，延伸分為「自主行動 (Spontaneity)」、「溝通互動 (Communication and Interaction)」、「社會參與 (Social Participation)」等三大面

向，再將其細分成九大項目，其中並強調素養是與生活情境有緊密連結與互動的關係。

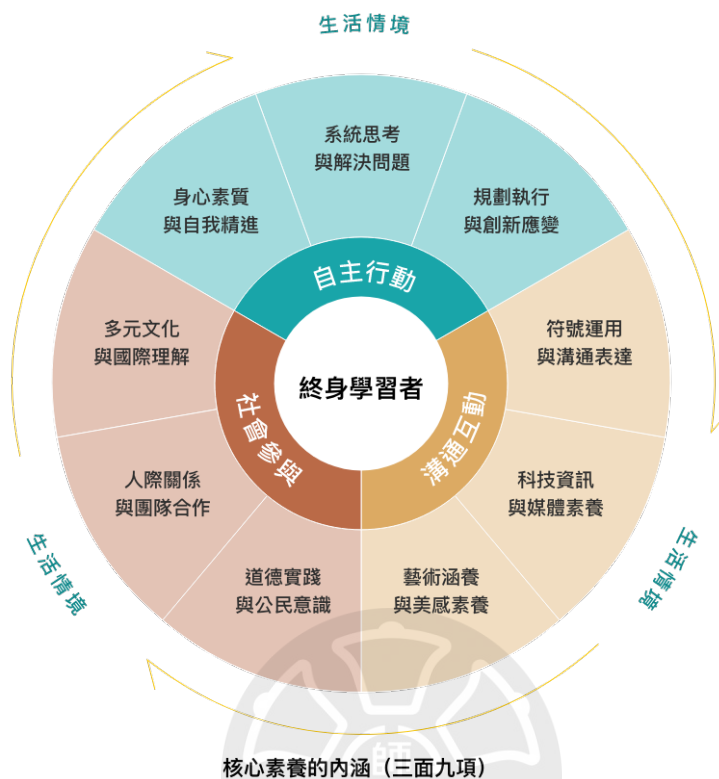


圖 2-2 教育部國民及學前教育署 (2019) 核心素養的內涵（三面九項）

根據 108 課綱核心素養的定義，核心理念、核心素養面向與核心素養項目表列如下：

表 2-3 108 課綱核心理念、核心素養面向與核心素養項目表

核心理念	核心素養面向	核心素養項目
自發： 培養孩子 自主行 動，擁有 學習與創 造的熱 情。	自主行動： 個人是學習的主 體，學習者應選 擇適當的學習方 式，進行系統思 考以解決問題，	A1 身心素質與自我精進： 具備身心健全發展的素質，擁有合宜的人性觀與自我觀，同時透過選擇、分析與運用新知，有效規劃生涯發展，探尋生命意義，並不斷自我精進，追求至善。
		A2 系統思考與解決問題：

	並具備創造力與行動力。	具備問題理解、思辨分析、推理批判的系統思考與後設思考素養，並能行動與反思，以有效處理及解決生活、生命問題。
		A3 規劃執行與創新應變： 具備規劃及執行計畫的能力，並試探與發展多元專業知能、充實生活經驗，發揮創新精神，以因應社會變遷、增進個人的彈性適應力。
互動： 學習跟自己不一樣的人溝通合作，創造更多可能。	溝通互動： 學習者能廣泛且妥善運用各種工具，包括物質工具（如人造物、科技及資訊等）和社會文化工具（如語言、文字及符號等），與他人及環境能有良好且有效的互動，並具備藝術涵養與生活美感。	B1 符號運用與溝通表達： 具備理解及使用語言、文字、數理、肢體及藝術等各種符號進行表達、溝通及互動的能力，並能了解與同理他人，應用在日常生活及工作上。
		B2 科技資訊與媒體素養： 具備善用科技、資訊與各類媒體之能力，培養相關倫理及媒體識讀的素養，俾能分析、思辨、批判人與科技、資訊及媒體之關係。
		B3 藝術涵養與美感素養： 具備藝術感知、創作與鑑賞能力，體會藝術文化之美，透過生活美學的省思，豐富美感體驗，培養對美善的人事物，進行賞析、建構與分享的態度與能力。
共好： 關心身處的環境並樂於參與，促使社會往前進步。	社會參與： 學習者處在彼此緊密連結的地球村，需要學習處理社會的多元性，以參與行動與他人或群體建	C1 道德實踐與公民意識： 具備道德實踐的素養，從個人小我到社會公民，循序漸進，養成社會責任感及公民意識，主動關注公共議題並積極參與社會活動，關懷自然生態與人類永續發展，而展現知善、樂善與行善的品德。
		C2 人際關係與團隊合作：

	立適切的合作模式與人際關係。	具備友善的人際情懷及與他人建立良好的互動關係，並發展與人溝通協調、包容異己、社會參與及服務等團隊合作的素養。
		<p>C3 多元文化與國際理解：</p> <p>具備自我文化認同的信念，並尊重與欣賞多元文化，積極關心全球議題及國際情勢，且能順應時代脈動與社會需要，發展國際理解、多元文化價值觀與世界和平的胸懷。</p>

(教育部國民及學前教育署，2018)



## 貳、數學素養

國內對於數學素養一詞，目前尚未有統一的定義與解釋，若從教育部國語辭典簡編本分別查詢數學及素養，可得到數學一詞的解釋為：「討論數量、形狀及它們之間的關係的科學。包括算術、代數、幾何、三角、解析幾何、微分、積分等。」而對於素養一詞的解釋為：「平日的修養。」在西方社會中，較常使用的詞彙為「literacy」，Merriam-Webster 字典中對於「literacy」的解釋為「能讀能寫的能力」。

對於數學素養的用詞及解釋，各國之間並不一致（劉柏宏，2016）。而最早用來代表數學素養的詞彙為 1959 年英國的「克勞瑟報告書」（Crowther Report），Crowther 將 Numerate 和 Literacy 結合成 Numeracy，來表達數學的讀寫能力，並認為數學能力與文字的讀寫能力同等重要，學生應同時具備這兩種能力。而報告書中提及：「Numeracy 一詞的解釋應要確保科學專家的讀寫能力，也必須確保藝術專家的數學能力。我們所指的 Literacy 不單指使用母語來作為成人達成溝通目的方式，也包含了道德、審美和社會判斷力的發展。而我們所說的 Numeracy 應不僅是指定量推理的能力，還包括對科學方法的一些理解和對科學成就的了解。（Crowther, 1959）」從報告書對於 Numeracy 的解釋，我們可以將 Numeracy 歸納出以下兩個面向：（1）對科學研究方法的理解，如觀察、假設、實驗、驗證等；（2）以量化思維去解釋現代社會中所面臨之問題型態及其困難度。

1978 年，英國首相調整中小學數學課程，使其更能配合未來生活、個人就業和終身學習，為了符合數學作為個人未來的目的所需，1982 年的「考克羅夫特報告書」（Cockcroft Report）中重新界定 Numeracy 一詞的定義，Cockcroft 對 Numeracy 的解釋為，作為教育目標主要有兩項特性：（1）熟悉並能運用數學處理日常生活中的數字；（2）欣賞與理解以數學術語所呈現的資訊（Cockcroft, 1982）。相較於 Crowther 對於 Numeracy 的定義，Cockcroft 對於 Numeracy 的定義則是著重於將數學運用在日常生活中，而此解釋更適合作為普及教育之目標。

不同於英國，美國較常使用 Quantitative literacy 或 Mathematical literacy 來表示數學素養。1974 年，美國教授 Jerrold Zacharias 使用 Quantitative Literacy 表示數學素養，並將其定義為個體必須具備各類的能力，如算術及運算、數線、測量、圖形、變化率、統計等數學方面的知識，來處理自身、國家和所處世界的事務、論點與問題。

生活技能國際觀察報告（International Life Skills Survey，ILSS，2000）對於 Quantitative literacy 的解釋為「舉凡個人在日常生活與工作的量化情境中，必須有效處理事務所需具備的技能、知識、信念、傾向、心智習性、溝通能力和問題解決技巧（引自 Steen et al.,2001, p. 7）」（劉柏宏，2016）。有鑒於此，美國數學家 Lynn Steen 等人（2001）整合上述不同定義，出版《數學與民主：以數學素養為例》，列出 Quantitative literacy 的十個組成要素：1. 對數學的信心（confidence with mathematics）、2. 文化欣賞（cultural appreciation）、3. 資料解讀（interpreting data）、4. 邏輯思考（logical thinking）、5. 決策（making decisions）、6. 情境數學（mathematics in context）、7. 數感（number sense）、8. 實用技能（practical skills）、9. 先備知識（prerequisite knowledge）、10. 符號感知（symbolsense）。

2002 年，Norean Sharpe 則將 Quantitative Literacy 解釋為閱讀理解、敘事寫作以及分析資料的方法，並且認為學生在接觸社會時所需閱讀日報、比較候選人差異、回覆調查問題、參加公眾抗議、平衡收支預算等，都應具備批判性的思維與建設性的思考。

另外一個常被用來表示數學素養的用詞是 Mathematical literacy，在 1986 年首度由美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM）提出，為培養學生數學素養的課程改革，提出應確保所有可能具備的人具有數學素養，並在 NCTM1989 的總綱中提及數學素養的五大願景，認為具備數學素養的個體必須：懂得並重視數學的價值，對自己的數學能力有信心，具備數學能力並解決數學問題，能夠使用數學交流，能有效的使用數學方法進行推理並且解決問題（NCTM, 1989, 1991）。

與 NCTM 對於 Mathematical literacy 的認定有所不同，國際學生評量計畫（The Programme for International Student Assessment，PISA）於 1999 年將 Mathematical literacy 定義為：「個體應能確認與瞭解數學在這個世界所扮演的角色、能做出有充分根據的判斷並且能使用及投入數學以符合作為積極的、參與的以及具反思之公民的需要。（OECD，1999）」。

另一位美國學者 David Pugalee 於同一年提出 Mathematical literacy 的擬動態模型（Pugalee, 1999）。如圖 2-3 所示，模型由兩個動態的迴圈構成，內層迴圈代表數學素養的推動者（Enablers for Mathematical literacy），包含科技（Technology）、價值（Values）、與溝通（Communication），而外層迴圈代表數學素養的過程（Processes of Mathematical literacy），包含表徵使用（Representing）、操作（Manipulating）、推理（Reasoning）、和問題解決（Problem Solving），其中，內外兩層迴圈會形成交互作用。由此可見 Mathematical literacy 包含對數學的情感、信念和態度等（Pugalee, 1999）。此模型所包含的元素與 Steen 等人所提及 Quantitative literacy 的十項元素相似，主要差別在於此模型將組成 Mathematical literacy 的元素區分為內隱和外顯兩類，由內層元素推動著外層元素的展現。

### Model of Mathematical Literacy



圖 2 - 3 Model of Mathematical literacy （Pugalee, 1999）

2003年，Jan de Lange 統整先前數學素養的定義及其概念，將數學素養定義為 Mathematical literacy，將數學知識分為四個主題：數量（quantity）、空間與形狀（space and shape）、變化與關係（change and relationships）和不確定性（uncertainty），而此次對於 Mathematical literacy 的定義，日後也成為 PISA 的數學素養概念，到目前已廣泛地被許多國家接受。

同樣在美國，2001年，隸屬於美國國家研究委員會（National Research Council，簡稱NRC）的數學學習研究委員會（Mathematics Learning Study Committee，簡稱MLSC）發佈了一篇報告書「累加向上：幫助兒童學習數學」（Adding it up：Helping children learn mathematics），該報告書中以 Mathematical proficiency 代表數學素養，其意涵為成功地學習數學，並認為數學素養是所有人必須達到的目標，若是一個人能成功學習數學，那麼他就擁有數學素養。該報告認為數學素養是由五個方面的能力組織而成的，包含：(1) 概念性的理解（Conceptual Understanding）、(2) 過程的流暢性（Procedural Fluency）、(3) 策略性的能力（Strategic Competence）、(4) 合適的推理（Adaptive Reasoning）、(5) 積極的傾向（Productive Disposition）（Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001）。如圖2-4所示，五個能力如同五條線一般緊密交織而成，五個能力間的關係越緊密就越能幫助學生成功地學習數學。而上述最後一個項目可以看出 Mathematical proficiency 有包含情意的方面，表示數學素養除了數學的能力以外，還有個體本身也對於數學的態度正向並且積極。

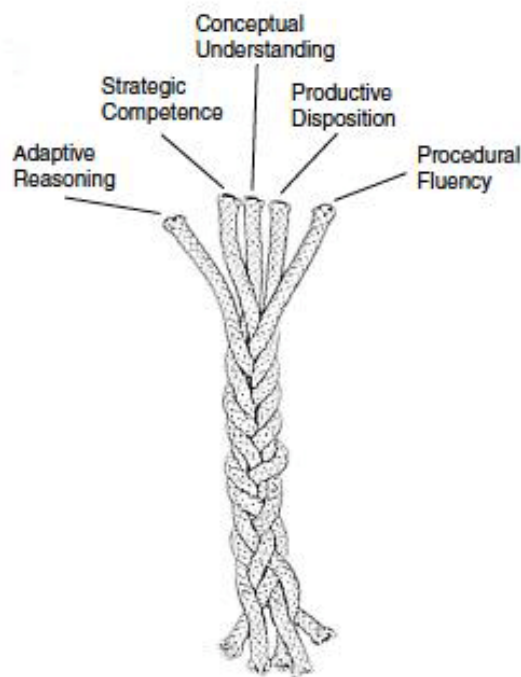


圖 2 - 4 交織的能力圖 (NRC, 2001)

而在歐洲，常是用 Mathematical competence 來表示數學素養，丹麥數學家 Mogens Niss 在 the KOM project (KOM 是 Competencies and the Learning of Mathematics 丹麥語的縮寫) 中對於 Mathematical competence 一詞的定義為：「數學素養是指在各種數學脈絡的內部或外部，和各種數學能發揮作用的情境中，去理解、判斷、從事和使用數學的能力。(Niss, 2003)」其中，Mathematical competency 是 Mathematical competence 中清晰可辨且獨特專業的組成要素，有八種項目，並可以分為以下兩類：

(一)用數學提出和回答問題的能力

1. 數學思維 Thinking mathematically
2. 提出並解決數學問題 Posing and solving mathematical problems
3. 數學建模 Modelling mathematically (i.e. analysing and building models)
4. 數學推理 Reasoning mathematically

(二)處理和管理數學語言和工具的能力

5. 數學表徵 Representing mathematical entities (objects and situations)

6. 數學符號和形式 Handling mathematical symbols and formalisms
7. 數學溝通 Communicating in, with, and about mathematics
8. 使用工具 Making use of aids and tools

這八個能力如圖 2 - 5 所示，彼此是密切相關，彼此之間也都可以有交集。

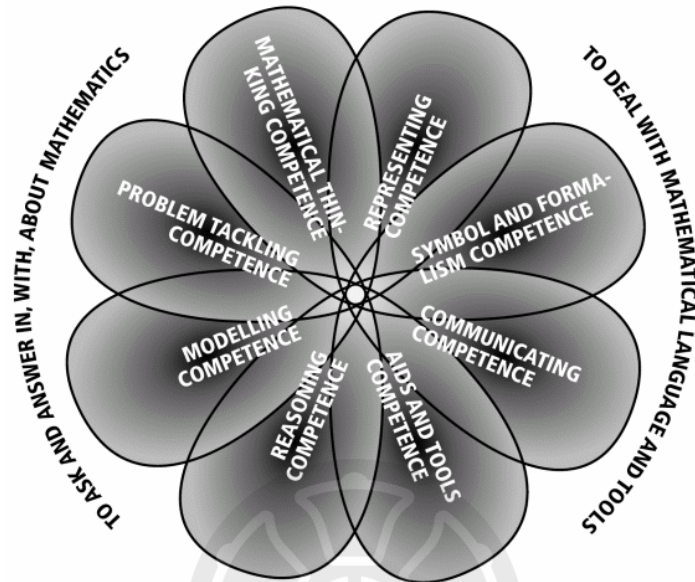


圖 2 - 5 KOM 之花 (Niss & Højgaard, 2011)

從 1999 年開始，PISA 就有參考這八項能力，直到 PISA 2012 數學素養架構中的七個基本數學能力，也與這八項能力相似，可能與 Mogens Niss 是最初 PISA 測驗中數學項目的專家成員之一相關。

2012 年，經濟合作暨發展組織 OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) 所籌劃的國際學生能力評量計畫 PISA (the Programme for International Student Assessment) 對數學素養提出的定義廣泛被各國接受，其定義為：

數學素養是個人各種脈絡裡形成 (*formulate*)、使用 (*employ*) 和詮釋 (*interpret*) 數學的能力。其中包括數學推理，以及使用數學概念、程序、事實和工具來描述、解釋和預測現象。數學素養輔助 (*assists*) 個人辨識 (*recognise*) 數學在世界上扮演的角色，並且能做出有所依據的判斷與決定，而這是具建設性、參與性和反思性的公民所需具備的 (OECD, 2013, p. 25)。

PISA 對於數學素養的實踐於 2012 年提出了一個示意模型(PISA, 2012)：

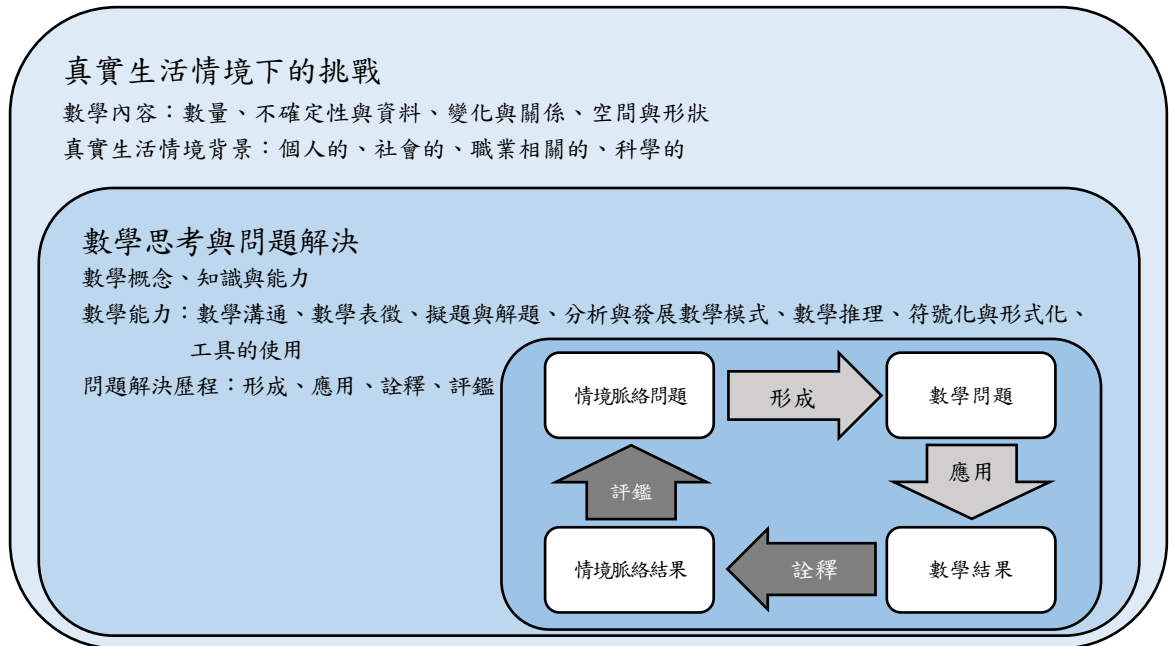


圖 2-6 數學素養的實踐之模型

如同個體面對外在真實生活情境下遇到的挑戰，情境來自於個人的、社會的、職業相關的又或者是科學的，其中遇到關於數量、不確定性與資料、變化與關係、空間與形狀等數學內容與問題。

對於這些各式各樣的生活挑戰，個體內在會形成一個迴圈，面對生活情境問題而形成數學問題，對於數學問題應用數學進而得到數學結果，再將數學結果詮釋成生活情境的結果，最後評估生活情境的問題而有後續的決策。在外在接觸情境問題與內在運作之間的方框是建模循環用到的三個步驟（Processes）和七個基本數學力（Fundamental mathematical capabilities）：

（一）解題歷程三步驟（Processes）

1. 形成數學問題（Formulate）：對應建模循環的第一個箭頭，個體辨識和認出（recognize and identify）使用數學的機會，並提供（provide）一個情境問題的數學結構。

2. 運用數學解題 (Employ)：對應建模循環的第二個箭頭，個體使用數學概念、事實、過程、和推理來解決數學問題以取得數學上的解答。
3. 詮釋結果 (Interpret)：對應建模循環的第三及第四個箭頭，指個體將數學上的解答、結果或結論，在情境中詮釋，並且評估是否適用於情境問題。

## (二) 七個基本數學力 (Fundamental mathematical capabilities)

1. 溝通 (communication)：包含人與情境之間，及人與人之間的溝通。人於情境之間的溝通即理解情境脈絡，閱讀、解碼、解讀敘述、任務、問題或物件使個體能形成心智模型，將其形成數學問題。在解決問題過程中，可能需要總結、統整或報告展示中間的結果。找到解決方案後，解題者可能需要向他人報告、解釋、或證明。
2. 數學化 (mathematising)：將情境脈絡問題形成數學問題之能力（包含結構化、概念化、進行假設、建立模型）。以及對於數學上的結果或模型與原問題的關係、以及基本的數學活動進行詮釋或評估的能力。
3. 表徵 (representation)：選擇、詮釋、轉換和使用多樣的數學表徵（圖像、表格、圖表、方程式、具體物件等）以描述情境脈絡中的數學問題。
4. 推理論證 (reasoning and argument)：即涉及數學素養的不同階段或活動中調用的數學能力。包含透過邏輯思考過程探究和連結問題中的元素並作出推論、提供或驗證已給出的論述。

5. 發展策略 (devising strategies for solving problems)：選擇或精心構思用數學解題的策略或計畫，並使用數學來解決生活情境中所遇到的問題。
6. 使用符號、正式術語、和運算 (using symbolic, formal and technical language and operations)：包含在數學情境中以數學常規及符號的理解、詮釋、操作及使用。
7. 使用數學工具輔助 (using mathematical tools)：數學工具包含物理性工具如計算機、電腦等測量儀器，也包含繪圖工具，用以辨識情境脈絡中的數學結構、描繪出數學關係進而產生數學建模。

PISA(2012)將上述的解題歷程三步驟與七個基本數學力再交織成二十一個細項，如表 2 - 4所示。

表 2 - 4 PISA 2012 七個數學力與三個解題歷程的交織 (OECD, 2013, p. 32)

	形成數學問題 (Formulate)	運用數學解題 (Employ)	詮釋結果 (Interpret)
溝通 (communication)	閱讀，解碼和理解陳述，問題，任務，對象，圖像或動畫，以形成情況的心理模型	闡明解決方案，展示達成解決方案所涉及的工作，並(或)總結和給出中間的數學結果	在問題脈絡中建構和交流解釋和論點
數學化 (mathematising)	辨識真實世界問題中的數學變亮和結構並提出可使用的假設	使用數學方法將問題概念化或在原始問題脈絡中闡述解決方案	利用數學模型的結果了解數學解答的範圍和限制
表徵 (representation)	為真實情境建立數學表徵	面對問題時，理解、聯繫和使用各種表徵	根據情況以各種模式解釋數學結果；比較或評估兩個或

			多個與情境有關的表徵
推理論證 (reasoning and argument)	為已識別或設計的真实情況的解釋、辯護或判斷	為決定數學解答的過程和程序提供解釋、辯護或判斷；連接資訊片段已得出數學解答、作用歸納或多步驟的爭論	反思數學解答並建立解釋和論點，以支持、反駁或確認情境問題中的數學解答
發展策略 (devising strategies for solving problems)	選擇或設計一個計劃或策略，以數學方式重新描述情境中的問題	積極有效並持續控制多步驟的程序，以獲得數學解答	設計和實施策略，來解釋、評估和驗證情境問題中的數學解答
使用符號、正式術語、和運算 (using symbolic, formal and technical language and operations)	使用適當的變數、符號、圖表和標準化模型，並用符號或形式語言表達真實世界中的問題	了解和利用基於定義、規則和形式系統以及使用算法的形式構造	了解問題的情境脈絡與數學解答的表徵之間的關係；使用這種理解有助於解釋情境脈絡中的解答，以及評估解答的合理性和限制
使用數學工具輔助 (using mathematical tools)	使用數學工具來辨別數學結構或描繪數學關係	了解並能適當使用各種工具，有助於調整數學解答的過程和程序	使用數學工具確定數學解答的合理性及其在該脈絡下的限制和約束

而到了2021年，PISA對於數學素養的定義又有些許調整：

數學素養是個人進行數學推理以及形成(formulate)、使用(employ)和詮釋(interpret)數學的能力，以解決各種現實脈絡中的問題。其中包括描述、解釋和預測現象的概念、程序、事實和工具。數學素養幫助(helps)個人了解(know)數學在世界上扮演的角色，並且能做出有所依據的判斷與決定，而這是具建設性、參與性和

反思性的21世紀公民所需具備的（OECD，2018，p. 7）。

在這段定義中會發現，PISA2021與PISA2012的定義大致相同，但是PISA2021更加強了數學推理的重要性。

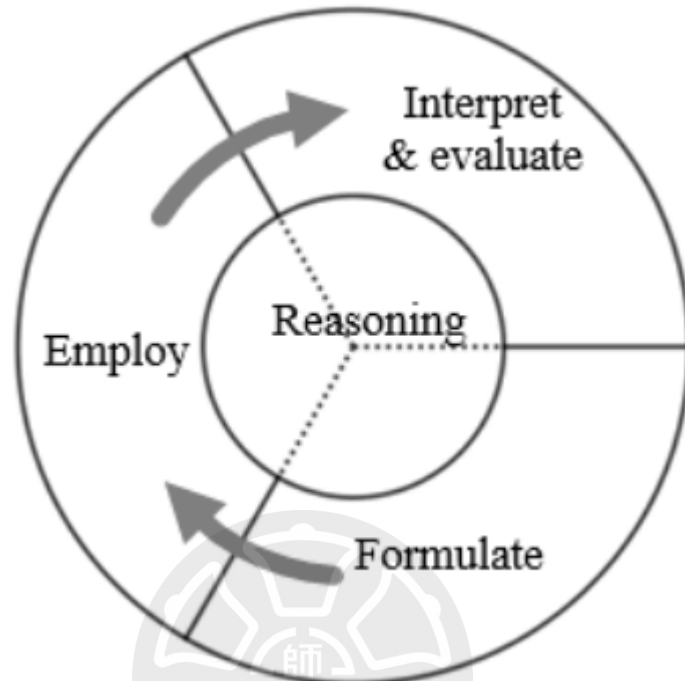


圖 2-7 數學素養中數學推理與問題解決歷程之關係

圖 2-7 描繪了數學推理（演繹和歸納）與問題解決之間的關係，當個體在進行形成(formulate)、使用(employ)和詮釋(interpret)等數學的能力時，都是以數學推理為核心，進而解決真實世界中的數學問題，這反映在 PISA 2003 和 PISA 2012 框架的數學建模週期中。

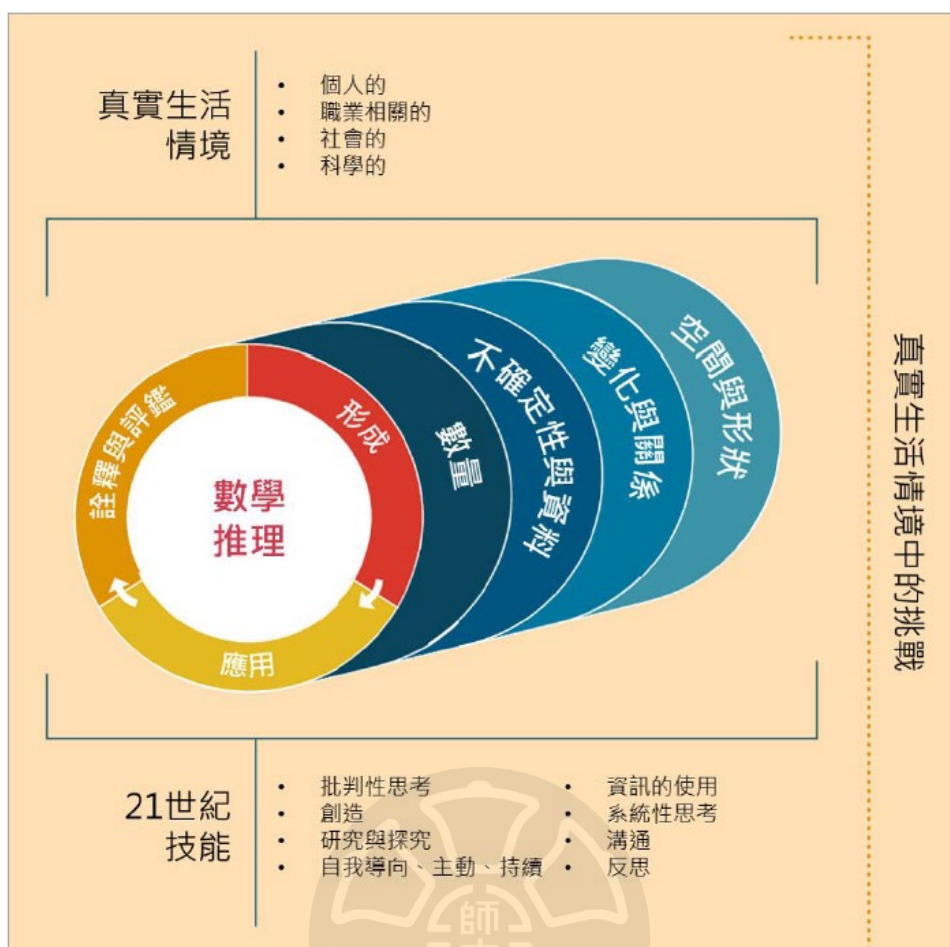


圖 2 - 8 PISA 2022 數學評量架構 (OECD, 2018a)

PISA 2022 數學評量架構由數學過程、數學內容、情境脈絡與 21 世紀技能四個部分所組成，圖 2 - 8 顯示了該架構下的主要概念以及它們之間的關聯。為了適應現在的生活與面對未來的挑戰，個體所應具備的能力，在 PISA 2022 中提出 8 項 21 世紀技能，分別為批判性思考 (Critical thinking)、創造 (Creativity)、研究與探究 (Research and Inquiry)、自我導向、主動和持續 (Self-direction, initiative, and persistence)、資訊的使用 (Information use)、系統性思考 (Systems thinking)、溝通 (Communication)、反思 (Reflection)：

### 1. 批判性思考 (Critical thinking)

批判性思考的大致定義為「對意見想法或解決方案提出質疑和進行評估」。而擁有批判性思考的人對他人想法或解決辦法能提出其質疑或評鑑；批判

性思考是一種高階的認知技能，包含歸納和演繹推理，使其進行正確的分析、推理及評估。批判性思考所涉及的内容並不僅限於數學學科，而是結合對其他領域的知識背景以及真實情境中的認知。

## 2. 創造力 (Creativity)

創造力的大致定義為「將想法和概念以新穎的方式結合後，提出有機會執行的想法和解決方案」。擁有創造力的人會以不同的面相來看待以及解決問題或情況，意即主要產生新的想法而非提取過去所學，這些結合其他概念及數學工具的想法，藉此來產出與傳統方法不同的數學推理，而用來尋找解決方案、規律及關係。

## 3. 研究與探究 (Research and Inquiry)

研究與探究的大致定義為「為了發現或修正事實真相、訊息、理論、知識、應用而認真且有系統地進行調查與探詢」。真實世界中的問題不如數學問題單純且答案單一，所以需要透過有系統的方式進行研究，並透過提出問題、尋求答案和思考複雜問題進而得到結論與解答。而進行方式可以個人或小組的形式，對學科、專業及社群等問題或議題進行研究與探究。

## 4. 自我導向、主動與持續 (Self-direction, initiative and persistence)

自我導向、主動與持續的大致定義為「即使在遇到困難、長時間、步驟繁雜或受到其他人事物反對的狀況下，仍能堅持對某項活動付出的努力或興趣所需的心境」。擁有這項技能的人能夠基於自己的意願，主動並積極地進行思考及問題解決，並且在面對困難時也能保持動力及維持自己對問題的興趣。

## 5. 資訊的使用 (Information use)

資訊的使用的大致定義為「透過具備知識、概念、技能和對的態度，隨時隨地皆能夠適當地使用數位裝置以用來解決問題，同時也能接觸、創造和交流資訊和概念、能適應不停變化的技術」。數位裝置包含手機、平板、電腦等不同電子設備。

#### 6. 系統性思考 (Systems thinking)

系統性思考的大致定義為「能在定義明確的上下文中，定位需要考慮的問題，考慮情境內各部分的關聯，為情境提供一個更廣闊的視角，並檢視各種情況與問題」。

#### 7. 溝通 (Communication)

溝通的大致定義為「不僅是自身能理解要溝通的內容，也要能了解欲傳達的對象，使對方能有效地接收到自身所要表達的內容」。良好的溝通能力除了包含能將一些「專業性」內容能讓「非專業」的聽眾理解，也接受他人不一樣的意見及以恰當符號、語言及方式表達想法並進行互動等。

#### 8. 反思 (Reflection)

反思的大致定義為「在做決定、選擇或行動前進行批判性思考的能力」。能利用過去經驗進行判斷，也能利用不同的觀點做出獨立的判斷，並在執行後思考其經驗如何與自己過去所學與所經驗作結合。

PISA 2022 雖然將以上 8 個 21 世紀技能納入數學素養的架構，但實際在評鑑學生是否具備數學素養並非根據上述技能而設計，而是依據學生在解題過程中自然表現出的 21 世紀技能而進行評鑑。

## 第四節 大學入學考試素養導向命題

2017年3月，招聯會於會員大會通過方案後發出新聞稿：「精進入學考試命題，建立新世代面對世界挑戰的能力；大學入學命題將逐漸朝向綜整與基本能力素養而非片斷的記憶性知識，強調新課綱素養及跨領域之精神。本項命題之精進由權責單位積極規劃推動，並建置該型試題題庫，逐年增加使用比率。」於當年4月，教育部又針對方案說明：「持續精進改善入學考試命題，呼應核心素養與學習內涵。」由上述可知，素養導向試題之命題重點應放在測驗學生是否具有跨領域綜合統整的能力，而素養導向試題也需呼應課綱核心素養的精神。

2019年5月，大學入學考試中心於「大學入學考試素養導向命題簡介」中，提出以下幾點思考與說明：

1. 重視素養並沒有否定知識的重要性  
知識是素養的根源，只是素養更強調知識要能被應用於解決生活與學術探究情境中的問題。
2. 108課綱與99課綱之間並沒有斷裂  
學校所教的知識本來就應該能在生活情境與終身學習中被應用，而這也反映在目前公布的大考測驗目標中。
3. 不需要將「知識題」與「素養題」對立  
知識是素養題中不可或缺的部分，大考中的素養導向試題是依照情境入題與否區分成「基本題」與「情境題」，可以用題組的方式，混合不同層次的命題。
4. 評量的限度  
大學入學考試為短時間的大規模紙筆測驗，題型與閱卷有其實際限度，目前以評量素養中相關的知識、技能面向以及整合運用為主，涉及態度、情意、價值面的評量相對不易（但非完全不涉及，如隱含性議題）。

(大學入學考試中心，2019)

由以上四點可以看出來，大學入學考試中心將知識與素養視為密不可分的，以知識作為素養的基本，而素養作為知識與生活情境的連結，學生要能夠從情境命題中使用學校所教的知識來解決問題。

基於考生應能將知識整合運用於日常與校園生活情境以及課程與學術探究情境，對於素養導向的測驗設計，大學入學考試中心在數學科目上給出的方向為：「在演算、推理、解題之外，應能以數學觀念，運用數學符號進行邏輯思考，處理現實世界的問題，並用以呈現關係，表示問題內涵等。(大學入學考試中心，2019)」由上述可知，素養導向試題應以現實世界的問題為出發點，試題必須能引導學生進行邏輯思考，並能使用數學知識解決問題。

而精進素養導向命題的重點，大學入學考試中心給出以下四個方向：

1. 情境化：試題素材引用生活情境或學術探究情境。
2. 整合運用能力：考察學生是否能夠整合運用知識與技能以處理現實世界或學術探究的問題，如閱讀理解、邏輯推論、圖表資訊判讀、批判思考、歷史解釋辨析、證據資料應用等。
3. 跨領域或跨學科：考察學生是否能夠融會貫通，善用不同領域或學科所學來處理特定主題中的相關問題。
4. 表達說明能力：研擬混合選擇題與非選擇題的題組題，允許較為結構化的設問，藉由同一題組內不同評量層次的試題，深化學生對問題（或主題）的理解，使非選擇題的命題更為彈性，以強化對於考生表達說明能力之評量。

(大學入學考試中心，2019)

根據以上四點，素養導向試題的命題者可從生活情境或不同學科領域取材，以混合題的形式，考察學生是否具備整合運用的能力。

對於從情境命題，大學入學考試中心給出以下五個可能方式：

1. 出題者在題目中直接引用現實情境訊息（如數據、資料等）作為答題者作

答所需訊息。

2. 答題者需從題目的情境陳述中擷取作答所需訊息。
3. 答題者需對於題目所引情境中的資訊進行分析推論，以獲得作答線索。
4. 答題者需對題目情境進行廣泛理解、發展解釋、或進行反思評價後，方能作答。
5. 優質的情境命題，應該要避免刻意為讓情境入題而表面情境化，卻干擾測驗目標的問題。

(大學入學考試中心，2019)

對於數學素養試題的命題，許志農教授於數學素養評量試題工作坊中提到：

「出產一道優質的素養試題，除了經驗的累積，也需要態度的轉變。經驗的累積能提升對於題幹敘述與題目設計的修題技巧，命題的態度則會直接影響整份試題的質量。(許志農，2014)」

總結以上，要命出一道優良的數學素養試題，不外乎命題者的出題經驗，以及出題的重點取材，再將學校所教的數學知識，透過生活情境為題，以混合題的方式，讓數學問題能與現實生活中的問題更貼近。

## 第五節 數學素養試題的大考中心試題舉例

了解歷屆大考試題對於素養試題的呈現，以及各單元的教學目標，可以幫助現場教師對數學素養導向試題的命題上有更多依據及參考，有助於順利命出優良的數學素養試題，以下針對歷年曾出現的數學素養導向的大考中心試題進行介紹，大考中心為了因應 108 課綱，釋出了「參考試題」以及「試辦考試」，試卷裡的素養試題很多，由於參考試題、試辦考試、學科能力測驗等，素養題很多，但是素質不一，由於學測成績是全題考生升學的依據，因此並未能提前對學生施測，所以無法事先知道題目的優劣，在此研究者僅討論素養混合題的部分進行評析並給在職教師作為參考。

### 【大考中心公布之數學 A 考科參考試卷第 18 至 19 題】

假設某經銷商進貨  $x$  台儀器的成本為  $C(x)$  (單位：萬元)，而預估可獲利的金額為  $g(x)$  (單位：萬元)，其中  $C(x)$  與  $g(x)$  分別為三次與二次的實係數多項式函數。已知當  $x=1,2,3$  時，成本與獲利滿足  $C(x)=18x-4g(x)$  的關係。又知進貨 4 台儀器的成本費用  $C(4)=51$  萬元。根據上述，試回答下列問題。

18. 設多項式函數  $f(x)=C(x)-(18x-4g(x))$ 。試選出正確的選項。(多選題，5 分)

- (1)  $f(x)$  為三次多項式函數
- (2)  $f(1)=0$
- (3)  $x^2-5x+6$  是  $f(x)$  的因式
- (4)  $f(0)f(4)<0$
- (5)  $g(4)=\frac{21}{4}$

答案：(1)(2)(3)(4)

19. 若經銷商進貨  $x$  台儀器的成本費用為  $C(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}x+5$  (萬元)，試求此

經銷商預估最多可獲利的金額是多少？(10 分)

答案：進貨 3 台儀器時，該經銷商可獲利的最大金額為 7 萬元。

素養程度評價：此題幹的情境較像一般舉例的情境，並未說明進貨成本與可獲利金額函數的關係，而一般而言，成本與獲利未必是簡單的二次或是三次函數，導致這題的素養程度並不是很高。

【大考中心公布之數學 B 考科參考試卷第 18 至 19 題】

某國際服飾品牌計畫在  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  六個城市設立門市。成立之初，準備在六個城市共設立 15 間分店，每個城市至少有兩家分店；為使各家分店之間能夠迅速調貨，要求在不同城市中，任意兩家分店之間必須設置一條快遞路線；同城市的分店之間則不須設置快遞路線。假設初期規劃 15 間分店的分布如下表：

城市	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
分店數	3	3	2	2	2	3

18. 試問  $A$  城市中每家分店需要幾條快遞路線？（單選題，3 分）

- (1) 6      (2) 9      (3) 12      (4) 24      (5) 36

答案：(3)

19. 因業績良好，總公司打算展店，並計畫在六個城市共設立 21 間分店，每個城市至少有三家分店；試問最少需要幾條快遞路線？（非選擇題，12 分）

答案：180 條

素養程度評價：在分店與分店之間，會有調貨需求，會與生活事件相關，有一定的素養程度，但是題幹中的國際服飾品牌不知是否真實存在，研究者建議，若能將取材來自於便利商店的店到店寄送或是最近才興起的蝦皮店到店，或許會更貼近學生的生活一點。

【大考中心公布之試辦考試數學 B 試卷第 18 至 19 題】

有三位學者實驗發現：體重  $w$ （公克）的動物在跑動 1 公里時，若每公克體重的基礎耗氧量為  $m$ （毫升），則  $w$  與  $m$  的關係式為  $m = \frac{8.46}{w^{0.4}}$ 。

根據上述關係式，試回答下列問題。

18. 體重 1024 公克的老鼠，其每公克體重的基礎耗氧量為多少毫升？試選出最接近的選項。（單選題，3 分）

- (1)  $\frac{1}{2}$                       (2) 1                      (3) 2                      (4) 4                      (5) 8

答案：(1)

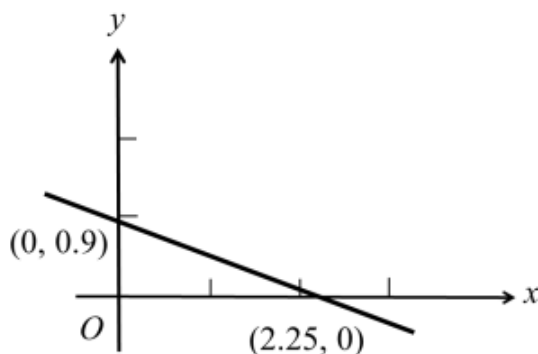
19. 體重 2.6 公斤的狗之基礎耗氧量是體重 83 公斤人的幾倍？試選出最接近的選項。（單選題，4 分）

- (1)  $\frac{1}{4}$  倍                      (2)  $\frac{1}{2}$  倍                      (3) 1 倍                      (4) 2 倍                      (5) 4 倍

答案：(5)

20. 令  $w=10^x, m=10^y$ ，且將 8.46 以近似值  $10^{0.9}$  取代，試寫出  $y$  對  $x$  的關係式，並在答題卷作圖區上以 2B 鉛筆繪製  $y$  對  $x$  的函數圖形（圖形上必須標出  $x$  軸、 $y$  軸及函數圖形與  $x$  軸、 $y$  軸的交點坐標）。（非選擇題，8 分）

答案：  $y=0.9-0.4x$



素養程度評價：此題的體重與耗氧量的關係，若符合現實世界的關係，則會有一定的素養程度。現代人越來越注重運動與健康，若能將運動、耗氧量、消耗熱量等關係結合，會更能提高素養程度。

【111 年學科能力測驗數學 A 第 18 題至第 20 題】

坐標平面上有一環狀區域由圓  $x^2 + y^2 = 3$  的外部與圓  $x^2 + y^2 = 4$  的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之  $x$  軸上方的某區域

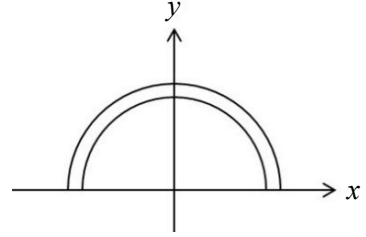
$R$ 。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓  $C_1: x^2 + y^2 = 3 (y \geq 0)$ 、

$C_2: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$  上移動。開始時掃描棒黑端在

點  $A(\sqrt{3}, 0)$ ，白端在  $C_2$  的點  $B$ 。接著黑、白兩端各

沿著  $C_1$ 、 $C_2$  逆時針移動，直至白端碰到  $C_2$  的點

$B'(-2, 0)$  便停止掃描。



18. 試問點  $B$  的坐標為下列哪一選項？（單選題，3 分）

- (1)  $(0, 2)$       (2)  $(1, \sqrt{3})$       (3)  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$       (4)  $(\sqrt{3}, 1)$       (5)  $(2, 0)$

答案：(4)，答對率：0.55

19. 令  $O$  為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為  $A', B'$ 。試在答題卷上作圖區中以斜線標示掃描棒掃過的區域  $R$ ；並於求解區內求  $\cos \angle OA'B'$  及點  $A'$  的極坐標。（非選擇題，6 分）

答案： $\cos \angle OA'B' = 0$ ， $A'[\sqrt{3}, 150^\circ]$

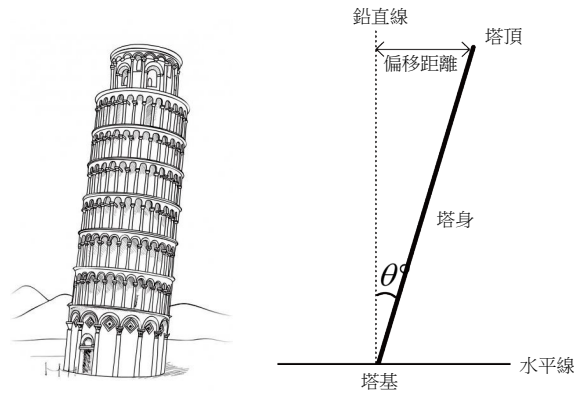
20.（承 19 題）令  $\Omega$  表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求  $\Omega$  與  $R$  的面積。（非選擇題，6 分）

答案： $\Omega$  的面積為  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$ ， $R$  的面積為  $\frac{5\pi}{12}$

素養程度評價：此題可以從題幹看出出題者用一個近似生活的情境包裝，但在題意敘述上，讓作答者難以理解題意，研究者建議，應將掃描棒一開始的位置畫於兩半圓上，且應將「黑端」、「白端」改為「 $A$  點」、「 $B$  點」。另外，一般現實生活使用掃描棒時不會如同題幹敘述掃半圓來掃描，故此題的素養程度並不是很高。

【111 年學科能力測驗數學 B 第 18 題至第 20 題】

瘦長的塔因為年代久遠，塔身容易傾斜。在下方右圖中，以粗黑線條代表塔身，而塔身的長度稱為塔高，塔身與鉛直虛線的夾角  $\theta^\circ$  稱為該塔的傾斜度 ( $0 \leq \theta < 90$ )，又塔頂至鉛直虛線的距離稱為該塔的偏移距離。



根據上述資料，試回答下列問題。

18. 已知世界上傾斜度最高的摩天大樓坐落於阿布達比，其傾斜度達到  $18^\circ$ ，此傾斜度換算成徑（或弧度）為下列哪一個選項？（單選題，5 分）

- (1)  $\frac{\pi}{36}$       (2)  $\frac{\pi}{18}$       (3)  $\frac{\pi}{20}$       (4)  $\frac{\pi}{10}$       (5)  $\frac{\pi}{8}$

答案：(4)，答對率：0.70

19. 中國虎丘塔、護珠塔與義大利的比薩斜塔是三座著名斜塔，它們的塔高分別為 48、19 與 57（公尺），偏移距離分別為 2.3、2.3 與 4（公尺），塔的傾斜度分別記為  $\theta_1^\circ$ 、 $\theta_2^\circ$  與  $\theta_3^\circ$ 。試比較  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  與  $\theta_3$  三數的大小關係。（非選擇題，4 分）

答案： $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$

20. 假設有塔高相等的兩座鐵塔，它們的傾斜度  $\alpha^\circ$ 、 $\beta^\circ$  分別滿足  $\sin \alpha^\circ = \frac{1}{5}$  與  $\sin \beta^\circ = \frac{7}{25}$ 。已知兩座鐵塔的偏移距離相差 20 公尺，試求它們的塔頂到地面之距離相差多少公尺。（非選擇題，6 分）

答案： $100\sqrt{6} - 240$  公尺

素養程度評價：此題取材自年代久遠而傾斜的大樓，以此來測驗考生對於角度與三角形對邊的關係，敘述讓人易於理解，而也令做過的考生印象深刻，小題也利用實際的斜塔來帶出三角比，素養程度較高。

## 第參章 開發研究與命題方向

本研究的主要目的在提供一些有關 108 課綱數學素養混合題的示範與命題時的取材與想法，所進行的試題開發研究。本章共分三節：研究方法與步驟、試題發展、施測結果。

### 第一節 研究方法與步驟

為了使數學素養試題優良完善，參考「大學入學考試素養導向命題簡介」以及以 111 年學測數學 A 與數學 B 的混合題為範例，做了以下步驟：

#### 壹、 相關資料蒐集與試題開發

研究者先研究 108 課綱與 99 課綱的差異性，再研讀 108 課綱中對於核心素養、素養教學與素養試題的定義及說明，並了解 108 課綱下大學入學考試的方向。參考 111 年學科能力測驗數學 A 與數學 B 的情境混合題，依照 108 課程綱要與大學入學考試素養導向命題簡介進行試題開發，以混合題的形式，開發 108 課綱下高一範圍的數學素養試題。

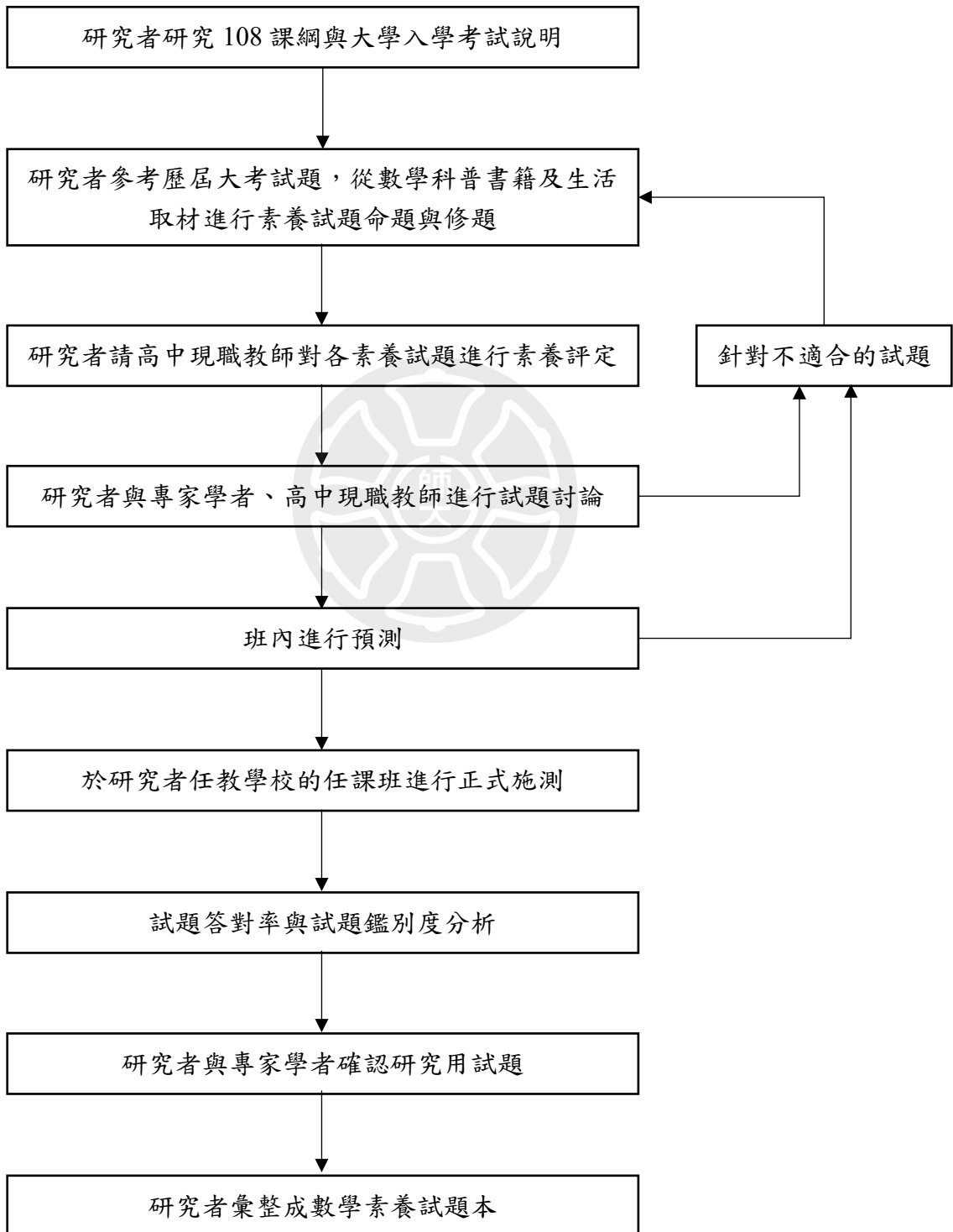
#### 貳、 預試試題審題與諮詢

針對研究者先行開發的 20 份數學素養混合試題，邀請專家學者與高中現職教師進行審題，除了檢查試題內容敘述是否清楚，也評斷各題的素養指標、題幹敘述的合理性、小題鋪陳安排恰當與否、各題的難易程度以及評斷各題分別與哪些整合運用能力相符，初步修正後，先進行預試，蒐集學生相關意見，再進行修題或改題。

#### 參、 正式施測

於研究者任職學校的班級進行施測，研究者以方便取樣選取高一的任課班級共三個班級的學生進行正式施測，施測完畢後進行試題答對率與試題鑑別度分析。

綜合以上研究程序，將研究流程圖表列如下：



## 第二節 試題發展

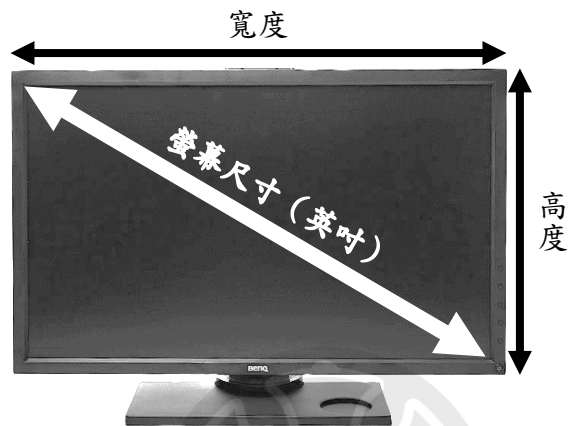
本節研究者將呈現依照 108 課綱與大學入學考試素養導向命題簡介所開發的數學素養試題，並將命題想法與施測結果列於所發展的各試題之後。依照 108 課綱龍騰版課本第一冊及第二冊的單元主題來分類。



## 試題1：顯示器的尺寸

第一冊 第1單元 實數

顯示器是一種輸出裝置，用於顯示影像及色彩，常見的顯示器如電腦，電視或大樓監視器等螢幕，而「螢幕尺寸」指的是螢幕的對角線長度，常以英吋為單位，如下圖所示。



顯示器螢幕的「寬高比」有六種常見比例，分別為「3：2」、「4：3」、「5：4」、「16：9」、「16：10」、「21：9」。根據以上資訊，試回答下列問題。

- （填充題）一台 24 英吋顯示器，若以「4：3」為其寬高比，則此螢幕的寬為 \_\_\_\_\_ 英吋。
- （單選題）一台 24 英吋顯示器，在下列五種常見比例中，寬高比為多少時，其寬度最寬？（ $\sqrt{13} \approx 3.6$ ， $\sqrt{41} \approx 6.4$ ， $\sqrt{337} \approx 18.4$ ， $\sqrt{89} \approx 9.4$ ）  
(1) 3：2      (2) 4：3      (3) 5：4      (4) 16：9      (5) 16：10
- 現今市面上的電視機皆為 16：9 的寬螢幕電視機。某人家中的電視櫃寬度為 160 公分，為了美觀考量，希望電視機的寬度不要超過電視櫃的寬度，則某人可以購買的電視機螢幕最大為幾英吋？（四捨五入取到整數位，1 英吋為 2.54 公分）

〔答案〕 1. 19.2 2. (4) 3. 72

〔解答〕

1. 由寬高比「4:3」可推得寬與對角線的比為  $4:\sqrt{4^2+3^2}=4:5$ 。令顯示器寬為  $x$  英吋，可列出比例式

$$4:5 = x:24$$

推得  $x = \frac{4 \times 24}{5} = \frac{96}{5} = 19.2$  (英吋)。

2. 因為吋數為對角線的長度，先算出寬與對角線的比值，分別為

「3:2」的寬與對角線的比值為  $\frac{3}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0.83$ ，

「4:3」的寬與對角線的比值為  $\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = 0.8$ ，

「5:4」的寬與對角線的比值為  $\frac{5}{\sqrt{5^2+4^2}} = \frac{5}{\sqrt{41}} \approx 0.79$ ，

「16:9」的寬與對角線的比值為  $\frac{16}{\sqrt{16^2+9^2}} = \frac{16}{\sqrt{337}} \approx 0.87$ ，

「16:10」的寬與對角線的比值為  $\frac{16}{\sqrt{16^2+10^2}} = \frac{16}{\sqrt{356}} \approx 0.85$ ，

可知在相同吋數下，「16:9」的寬為最長，故選(4)。

3. 令電視機的對角線長度為  $x$  公分，由電視櫃寬度為 160 公分可知，電視機寬度最大值為 160 公分，又電視機寬高比為 16:9，則電視機的寬與對角線比為  $16:\sqrt{337}$ ，可列出比例式

$$160:x = 16:\sqrt{337}$$

推得  $x = 10\sqrt{337} \approx 184$  (公分)，則對角線長度最大值為 184 公分，換算為英吋為 72.44 英吋，四捨五入取到整數位為 72 英吋。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.57
題幹敘述合理（1分－5分）	4.57
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.57
此題的難易度（1分－5分）	2.71

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	62.50
第2題	46.67
第3題	略

綜合以上：

難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第一冊 第1單元 實數		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input checked="" type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：購買電視螢幕時所看到的尺寸單位與其他電器不同，而為了配合家中的電視櫃的寬度，則需要去了解英吋與公分的單位換算，以及現在電視機的寬高比，進而選擇適合家中的電視機尺寸。未來設計此類題型可以考慮結合觀看電視的適當距離來進行命題。

## 試題2： 印度速算法

第一冊 第2單元 式的運算

某生看完二位數平方的速算法（俗稱印度速算法）後，自己想了一種二位數立方的速算法，我們以 $52^3$ 為例，說明如下：

<p>步驟一：先將原數拆成十位數字及個位數字來看，並將十位數字及個位數字分別三次方。即<math>5^3 = 125</math>與<math>2^3 = 8</math>。</p> <p>步驟二：把個位數字三次方後得到的數字看成三位數，與十位數字的三次方合併，寫在右圖的第一列。</p> <p>即 125008 寫在第一列。</p> <p>步驟三：將原數乘以十位數字及個位數字，最後再乘以3。</p> <p>即<math>52 \times 5 \times 2 \times 3 = 1560</math>。</p> <p>步驟四：將步驟三得到的數字其個位數對齊十位後，寫在右圖的第二列。</p> <p>步驟五：將第一列的數字與第二列的數字相加，可求得答案。</p> <p>即<math>52^3 = 140608</math>。</p>	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td></td> <td>萬</td> <td>千</td> <td>百</td> <td>十</td> <td>個</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="6" style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>4</td> <td>0</td> <td>6</td> <td>0</td> <td>8</td> </tr> </table>		萬	千	百	十	個	1	2	5	0	0	8		1	5	6	0								1	4	0	6	0	8
	萬	千	百	十	個																										
1	2	5	0	0	8																										
	1	5	6	0																											
1	4	0	6	0	8																										

根據以上資訊，試回答下列問題。

1. （填充題）試著用上述方法計算 $24^3$ 的值，並將過程填入下方的直式空格中。

	萬	千	百	十	個
	□	□	□	□	□
		□	□	□	
□	□	□	□	□	□

2. （填充題）有一個二位數的個位為7，其三次方的值為50653，試求此二位數為\_\_\_\_\_。

3. 試寫出 $(10a+b)^3$ 的展開式，並利用此展開式說明此生二位數立方速算法的正確性。

〔答案〕 1. 見詳解 2. 37 3. 見詳解

〔解答〕

1.  $2^3 = 8$ ， $4^3 = 64$ ， $24 \times 2 \times 4 \times 3 = 576$ ，則 $24^3 = 8064 + 5760 = 13824$ 。(如下圖所示)

萬	千	百	十	個
	8	0	6	4
	5	7	6	
	1	3	8	2
			4	

2. 令此二位數形如「 $a7$ 」，因為50653千位數以上的數字為50，則可知 $a^3 < 50$ ， $a=1$ 或2或3。當 $a=1$ 時， $17^3 = 4913$ ；當 $a=2$ 時， $27^3 = 19683$ ；當 $a=3$ 時， $37^3 = 50653$ ，可推得此二位數為37。

3.  $(10a+b)^3 = (10a)^3 + b^3 + 3 \cdot (10a) \cdot b \cdot (10a+b) = 1000a^3 + b^3 + 3 \cdot a \cdot b \cdot (10a+b) \cdot 10$ ，

若二位數十位數字為 $a$ ，個位數字為 $b$ ，則展開式

$$(10a+b)^3 = 1000a^3 + b^3 + 3 \cdot a \cdot b \cdot (10a+b) \cdot 10 \text{ 中：}$$

(1)  $1000a^3 + b^3$  意即將 $a$ 的三次方寫在千位，且 $b$ 的三次方寫在個位。

(2)  $3 \cdot a \cdot b \cdot (10a+b) \cdot 10$  意即用原數 $10a+b$ 乘以十位數字 $a$ 及個位數字 $b$ ，最後再乘以3，並將此結果的個位數字對齊直式的十位。

最後將上述兩者相加，可求得二位數的三次方。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.00
題幹敘述合理（1分－5分）	4.29
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.00
此題的難易度（1分－5分）	3.86

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	70.97
第2題	51.61
第3題	略

綜合以上：

難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★☆
章節內容	第一冊 第2單元 式的運算		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input checked="" type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：印度速算法一直是非常有名的速算方法，運用一些特別的技巧能夠輕鬆算出答案，而其原理跟乘法原理密不可分，也呼籲學生使用新穎的公式或是方法時，不應忽視其方法的正確性。

### 試題3： 位元組

第一冊 第4單元 指數

位元組（英語：Byte），通常用作電腦資訊計量單位，不分資料型態，是通信和資料儲存的概念，一般而言，位元組（Byte）可縮寫成 B。以下是常用位元組的兩種次方單位。

名稱	縮寫	換算為位元組 (Byte)	名稱	縮寫	換算為位元組 (Byte)
Kilobyte	KB	$10^3$	Kibibyte	KiB	$2^{10}$
Megabyte	MB	$10^6$	Mebibyte	MiB	$2^{20}$
Gigabyte	GB	$10^9$	Gibibyte	GiB	$2^{30}$
Terabyte	TB	$10^{12}$	Tebibyte	TiB	$2^{40}$

根據以上資訊，試回答下列問題。

- （單選題）蘋果創辦人賈伯斯在 2001 年首度發布其數位音樂播放器 iPod 時，這樣介紹：「這款 iPod 可以把 1000 首歌放進口袋裡。」已知平均一首歌的大小約為 5MB，試問這台首度發布的 iPod 的容量至少為多少 GB？  
(1) 2 GB    (2) 3 GB    (3) 4 GB    (4) 5 GB    (5) 6 GB。
- （填空題）某生買了一顆 1TB 的隨身硬碟，若一部兩小時的電影平均大小為 1.2GB，則 1TB 的硬碟最多能存進\_\_\_\_\_部兩小時的電影。（四捨五入取至整數位）
- 因為 Windows 對 GB 這個資訊計量單位的誤用，因此在 Windows 中顯示的「1GB」，其實應是指「1GiB」，但 Windows 卻顯示為「1GB」，而造成誤解。已知 1GiB 的容量約為  $1.073 \times 10^9$  Byte，試求一個 128GB 的硬碟，在 Windows 的電腦會顯示成多少 GB。（四捨五入取至整數位）

〔答案〕 1. (4) 2. 833 3. 119

〔解答〕

1. 由敘述可知 1000 首歌的大小約為  $5\text{MB} \times 1000 = 5000\text{MB} = 5 \times 10^9 \text{B} = 5\text{GB}$ ，故選 (4)。

2. 因為  $1\text{TB} = 1000\text{GB}$ ，則  $1\text{TB}$  能容納 2 小時的電影數量約為

$$1000 \div 1.2 = 833.\bar{3} \approx 833 \text{ 部}。$$

3. 由於 Windows 中顯示的「1GB」，其實應是指「1GiB」，所以將 128G 換算成「GiB」，可得

$$128\text{G} = \frac{128}{1.073} \text{GiB} \approx 119.29 \text{GiB} \approx 119 \text{GiB}$$

則一顆 128GB 的硬碟在 Windows 的電腦會顯示成 119GB。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.57
題幹敘述合理（1分－5分）	4.43
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.57
此題的難易度（1分－5分）	3.00

學生施測：

小題	得分率(%)
第 1 題	83.33
第 2 題	80.00
第 3 題	略

綜合以上：

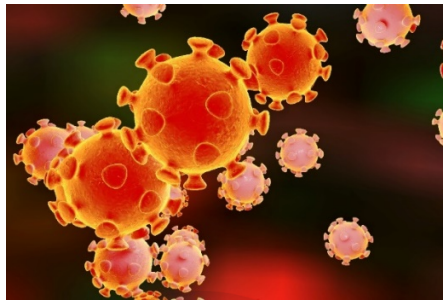
難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第一冊 第 4 單元 指數		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input checked="" type="checkbox"/> 解釋辨析 <input checked="" type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：此題為研究者在點開電腦的檔案總管後，看到 128GB 的 C 槽容量顯示為 119GB 時想到的，經過查找資料後發現 Windows 計算容量的單位，與一般市面上販售的硬碟容量單位有所不同，但因為都顯示為 GB，而對一般消費者造成誤解。

## 試題4： 新冠肺炎 PCR 檢驗

第一冊 第5單元 常用對數

2019年底，新冠肺炎（COVID-19）於中國武漢市首次被發現，隨後在2020年初迅速擴散至全球多國，變成一場全球性大瘟疫。對於檢測個體是否罹患新冠肺炎的技術，目前普遍使用的是以「RT-PCR」檢測出的「CT值」大小來判斷個體是否確診。



RT-PCR 簡單來說，就是將人體內非常少量的病毒檢體，以幾何級數 2 倍增的方式增加為原來的數百萬甚至百億倍。增加後的產物，經由儀器檢測後，會被偵測到。

其中，將病毒檢體 2 倍增的次數，就是 CT 值。以 CT 值 18 為例，就是將病毒檢體 2 倍增 18 次，也就是 2 的 18 次方倍之後，才可被儀器偵測到。因此，若病人的 CT 值較低，則此受檢者體內病毒檢體濃度較高，傳染力也較強。

根據以上資訊，試回答下列問題。

1. （填充題）某位受檢者的病毒檢體經過 RT-PCR 檢測 2 倍增 20 次之後，檢體才可以被儀器偵測到，試問此受檢者的 CT 值為\_\_\_\_\_。
2. （單選題）已知台灣將確診的 CT 值訂在 35，美國將確診的 CT 值訂在 40，則一位 CT 值為 38 的受檢者，在台灣及美國的篩檢結果分別為何？
  - (1) 在台灣篩檢為陽性（確診），在美國篩檢為陽性（確診）。
  - (2) 在台灣篩檢為陽性（確診），在美國篩檢為陰性（未確診）。

(3) 在台灣篩檢為陰性（未確診），在美國篩檢為陽性（確診）。

(4) 在台灣篩檢為陰性（未確診），在美國篩檢為陰性（未確診）。

3. 若有某儀器每次檢測後都能將病毒檢體 10 倍增，則 CT 值 30 的患者，其採集檢體需用此儀器約 10 倍增幾次後，檢體才能被儀器檢測到？（ $\log 2 \approx 0.3$ ）

〔答案〕 1. 20    2. (3)    3. 9

〔解答〕

1. 由於每將病毒檢體放大 1 次就是 1 單位的 CT 值，則放大 20 次即為  $2^{20}$ ，則 CT 值為 20。
2. 依文中敘述「若病人的 CT 值較低，則此受檢者體內病毒檢體濃度較高，傳染力也較強。」可知在台灣，CT 值低於 35 會顯示陽性（確診）；在美國，CT 值低於 40 會顯示陽性（確診），故答案應選 (3)。
3. CT 值為 30，亦即須將檢體放大  $2^{30}$  倍，又因為  $\log 2 \approx 0.3$ ，可知

$$2^{30} = (10^{\log 2})^{30} \approx (10^{0.3})^{30} = 10^9$$

即需用此儀器放大約 9 次才能檢測到螢光反應。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.57
題幹敘述合理（1分－5分）	4.43
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.29
此題的難易度（1分－5分）	2.43

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	85.94
第2題	67.86
第3題	略

綜合以上：

難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/> 中 <input checked="" type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第一冊 第5單元 常用對數		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input checked="" type="checkbox"/> 資料應用		

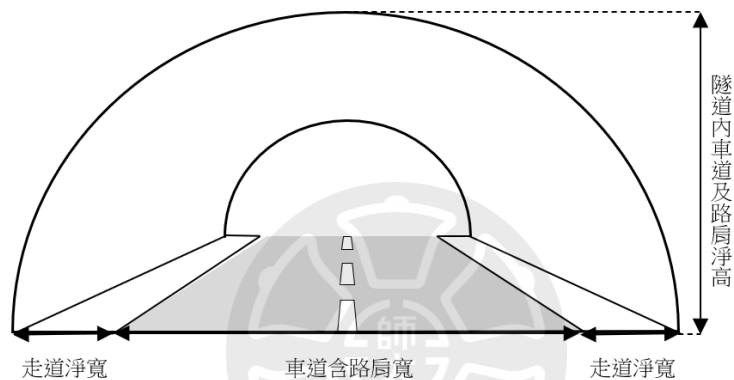
出題想法：此題為現今疫情猖狂的時期下，在電視及網路開始介紹 CT 值時想到的，而一般大眾也都需要了解 CT 值所代表的含意，才能更了解確診者的傳染程度。

## 試題5： 雙車道隧道的行車限制

第一冊 第07單元 圓方程式

根據內政部營建署《市區道路及附屬工程設計規範》，雙車道隧道之設計需符合以下規定：

- 車道含路肩寬最小 7 公尺。
- 單側走道淨寬最小 0.9 公尺。
- 隧道內車道及路肩淨高應 4.6 公尺以上。



今有一圓弧造形的雙車道隧道，如上圖所示，其車道含路肩寬為 7 公尺，單側走道淨寬為 1.1 公尺，隧道內車道及路肩淨高為 4.6 公尺。根據以上資訊，試回答下列問題。

1. (填充題) 隧道圓弧所在的圓形，其半徑為\_\_\_\_\_公尺。
2. 根據規定，消防車的全寬不得超過 2.6 公尺。試問在此限制底下，若有一消防車欲行駛通過此隧道，則其高度不得超過多少公尺？(四捨五入取至小數點以下第一位， $\sqrt{10} \approx 3.16$ )

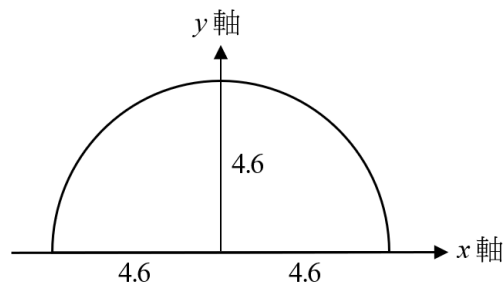
〔答案〕 1. 4.6 2. 3.8

〔解答〕

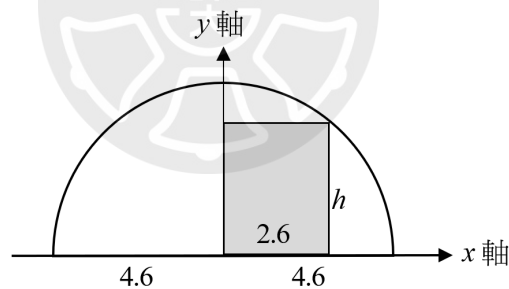
1. 此隧道最大寬度為

$$7+1.1+1.1=9.2 \text{ 公尺,}$$

寬度的一半為 4.6 公尺，將圓弧隧道置於一坐標平面上，如下圖所示，可知車道中心即為圓弧的圓心，則圓弧的半徑即為 4.6 公尺。



2. 設消防車最大高度不超過  $h$  公尺，已知隧道圓弧其圓心為  $(0,0)$ ，半徑為 4.6，如下圖所示。



則圓弧的方程式為

$$x^2 + y^2 = 4.6^2$$

將臨界點  $(2.6, h)$  帶入可得

$$2.6^2 + h^2 = 4.6^2$$

則可求得

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{4.6^2 - 2.6^2} = \sqrt{(4.6+2.6)(4.6-2.6)} = \sqrt{7.2 \times 2} \\ &= \sqrt{14.4} = 1.2\sqrt{10} \approx 1.2 \times 3.16 = 3.792 \approx 3.8 \end{aligned}$$

故消防車高度不得超過 3.8 公尺。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.57
題幹敘述合理（1分－5分）	4.43
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.57
此題的難易度（1分－5分）	3.00

學生施測：

小題	得分率(%)
第 1 題	73.24
第 2 題	略

綜合以上：

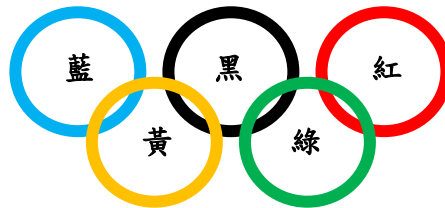
難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第一冊 第 07 單元 圓方程式		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input checked="" type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：此題為研究者在每周搭乘客運從宜蘭來回台北時，經過雪山隧道時所想到的，經過資料查證後發現大部分隧道的挖掘皆是以圓形開挖，並將下半圓的部分鋪成隧道的路面，隧道口也會告示行車高度的限制。

## 試題6： 奧林匹克五環

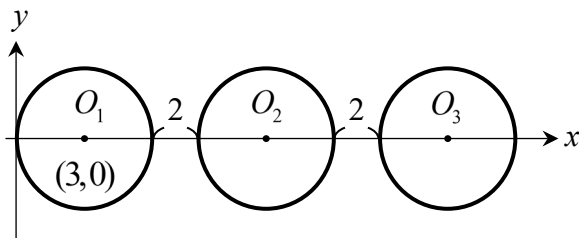
第一冊 第08單元 圓與直線

奧林匹克五環，是由五個互扣的圓環所組成，由左而右依序為藍色、黃色、黑色、綠色、紅色，如下圖所示。

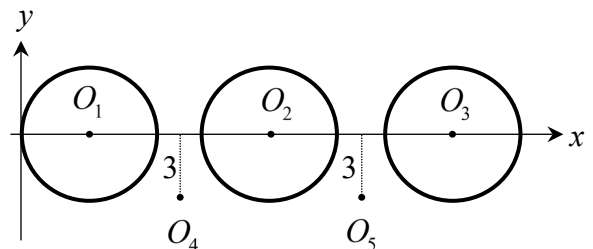


某生想試著設計一款奧林匹克五環的紀念品，並貼上緞帶來裝飾。他在坐標平面上畫出五環的標誌，並標示出需要貼上緞帶的位置，最後在圓環內的標示處貼上該圓環顏色的緞帶，其中兩圓環重疊區域內的線段，兩個顏色的緞帶都需貼上，步驟如下：

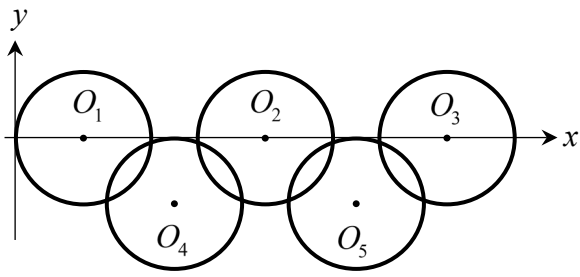
- (1) 如圖(一)所示，先畫出一個以 $(3,0)$ 為圓心，半徑為3的圓 $O_1$ ，並分別作出圓心在 $x$ 軸，半徑皆為3的圓 $O_2$ 與圓 $O_3$ ，且其中圓 $O_2$ 與圓 $O_1$ 及圓 $O_3$ 最近距離皆為2。
- (2) 如圖(二)所示，分別從 $\overline{O_1O_2}$ 的中點及 $\overline{O_2O_3}$ 的中點往下3單位，點出 $O_4$ 及 $O_5$ 。
- (3) 如圖(三)所示，分別以 $O_4$ 及 $O_5$ 為圓心，3為半徑，作出圓 $O_4$ 及圓 $O_5$ 。
- (4) 如圖(四)所示，在圓 $O_2$ 與圓 $O_4$ 的內部，過圓心 $O_2$ ，畫出斜率為1的有色線段 $\overline{AB}$ ，接著以 $\overline{AB}$ 為基準，在五個圓內畫滿平行 $\overline{AB}$ 的虛線線段，且相鄰兩平行線段間的距離皆為 $\sqrt{2}$ 。



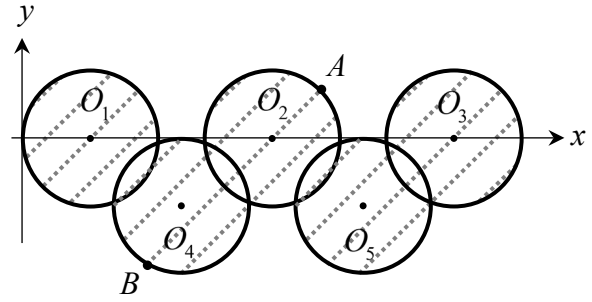
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

根據以上資訊，試回答下列問題。

1. (填充題) 圓  $O_5$  的方程式為\_\_\_\_\_。
2. 該生至少需準備多長的綠色緞帶來貼在綠色的圓環中。



〔答案〕 1.  $(x-15)^2 + (y+3)^2 = 3^2$     2.  $6\sqrt{2} + 2\sqrt{34}$

〔解答〕

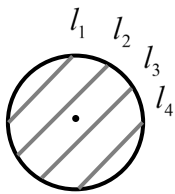
1. 由敘述可知，圓  $O_5$  的圓心位於  $O_1(3,0)$  向右 12 單位，再向下 3 單位，可知圓  $O_5$  圓心坐標為  $(15,0)$ ，又圓的半徑為 3，可求得圓  $O_5$  的方程式為

$$(x-15)^2 + (y+3)^2 = 3^2 \circ$$

2. 已知圓  $O_5$  的圓心  $O_5(15,-3)$ ，半徑為 3，且直線  $\overline{AB} : x-y=11$ ，則圓心  $O_5$  到直線  $\overline{AB}$  的距離為

$$d(O_5, \overline{AB}) = \frac{|15 - (-3) - 11|}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

令  $O_5$  內的弦為  $l_1, l_2, l_3, l_4$ ，



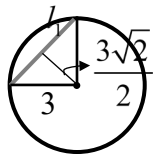
$$d(O_5, l_1) = \frac{7\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}; \quad d(O_5, l_2) = \frac{7\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$d(O_5, l_3) = 4\sqrt{2} - \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad d(O_5, l_4) = 5\sqrt{2} - \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \circ$$

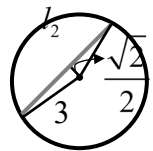
可知弦長總和

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 2l_1 + 2l_2$$

分別求出弦長  $l_1$  及  $l_2$  如下所示：



$$l_1 = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$$



$$l_2 = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{34}$$

則圓  $O_5$  內部弦長總和為

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 2l_1 + 2l_2 = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{34}$$

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.29
題幹敘述合理（1分－5分）	4.29
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.43
此題的難易度（1分－5分）	4.71

學生施測：

小題	得分率(%)
第 1 題	61.29
第 2 題	略

綜合以上：

難易程度	<input checked="" type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第一冊 第 08 單元 圓與直線		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input checked="" type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：研究者在命題期間剛好碰到 2021 年的奧運舉辦時間，結合奧運五圓環的圖形，設計成作圖應用的情境題。

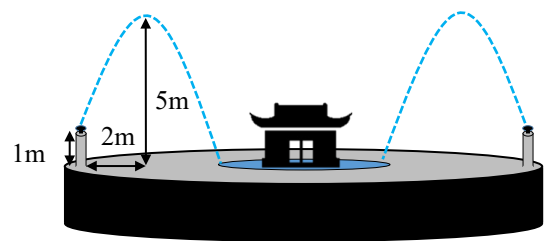
## 試題7： 水舞

第一冊 第 10 單元 一次與二次函數

水舞是一項以人工噴泉造景為主題的表演，搭配音樂及五顏六色的燈光，有時會有表演者一同進行演出，而噴泉的水柱在半空中因為受到萬有引力的影響，水柱的軌跡會形成「二次函數」的部分圖形。如下圖（一）所示。



圖（一）



圖（二）

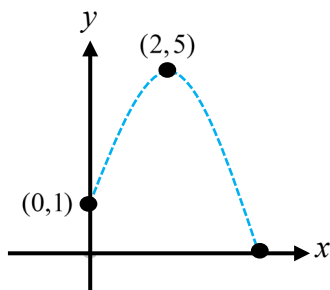
已知某舞台場地的噴水器距離地面高度為 1 公尺，水柱會在與噴水器水平距離為 2 公尺的時候，達到最大高度 5 公尺，如上圖（二）所示。根據以上資訊，試回答下列問題。

1. （填充題）如上圖（二）所示，此場地中央有一個圓形水池，若設計師希望噴水器的水柱能落入此圓形水池中，試問噴水器最遠可以建置在離圓形水池\_\_\_\_\_公尺的距離。
2. 承上題，有一位身高 176 公分的演出者欲在此舞台上演出，試求此演出者在距離噴水器多遠的範圍內，不會被水柱淋到。

〔答案〕 1.  $2+\sqrt{5}$  2. 距離噴水器 0.2 公尺至 3.8 公尺的範圍內

〔解答〕

依題意坐標化，如下圖所示。



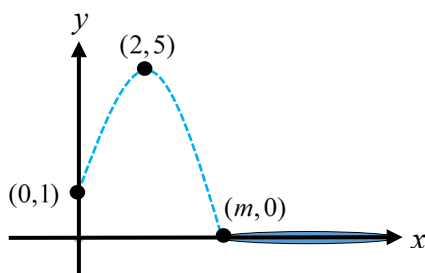
因為水柱會在與噴水器水平距離為 2 公尺的時候，達到最大高度 5 公尺，故二次函數的頂點為  $(2,5)$ ，則可設二次函數為

$$y = a(x-2)^2 + 5, \quad a < 0。$$

又因為圖形通過  $(0,1)$ ，所以  $1 = a \cdot (0-2)^2 + 5$ ，解得  $a = -1$ ，則此二次函數為

$$y = -(x-2)^2 + 5。$$

1. 設水柱的落入點為  $(m,0)$ ，如下圖所示。



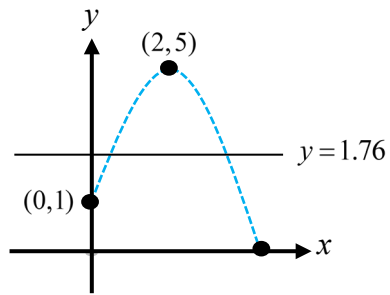
因為落入點也在此二次函數上，所以將  $(m,0)$  代入  $(m, 0)$  可得

$$0 = -(m-2)^2 + 5$$

解得  $m = 2 \pm \sqrt{5}$ 。 $(2 - \sqrt{5})$  不合)

故最遠可以建置在離圓形水池  $2 + \sqrt{5}$  公尺的距離。

2. 此表演者移動時，其頭頂移動的軌跡為一常數函數  $y = 1.76$ ，如下圖所示。



解聯立方程式

$$\begin{cases} y = -(x-2)^2 + 5 \\ y = 1.76 \end{cases}$$

解得  $y = 0.2$  或  $3.8$ ，即表演者距離噴水器  $0.2$  公尺或  $3.8$  公尺時，頭頂會被水柱噴濕，故表演者應距離噴水器  $0.2$  公尺至  $3.8$  公尺的範圍內。



教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.43
題幹敘述合理（1分－5分）	4.71
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.71
此題的難易度（1分－5分）	3.57

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	56.67
第2題	略

綜合以上：

難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第一冊 第10單元 一次與二次函數		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input checked="" type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：此題為研究者看到花園的自動灑水器時想到的，查找相關資料後發現水舞也為類似的題材，而水舞還需考慮表演人員的身高與進退距離，因而設計成此題的形式。

## 試題8： 區間測速的判定

第一冊 第 12 單元 多項式不等式

區間測速利用車牌辨識，拍下車輛通過測速起點與終點的時間，自動計算通行時間跟速率，一旦通過時間比速限所需時間少，就可判定超速，下方的圖中為某一路段的區間測速資訊。



根據以上資訊，試回答下列問題。

1. (填充題) 圖中的④表示速限為時速 40 公里，試問：駕駛人通過此路段時，全程時間不得低於 \_\_\_\_\_ 分鐘，才不會被判定為超速。
2. 某駕駛人以時速 50 公里的車速通過此路段前半段路程，突然想到此路段的區間測速速限為時速 40 公里，若後半路程的平均時速為  $x$  公里，在不被判定為超速的前提下，試求  $x$  的範圍。

〔答案〕 1. 18    2.  $0 < x < \frac{100}{3}$

〔解答〕

1. (法一)

設行駛時間為  $t$  分鐘，即為  $\frac{t}{60}$  小時，全程長 12 公里，因為速限為時速 40 公里，則

$$\begin{aligned}\text{平均時速} &= \frac{12}{\frac{t}{60}} \leq 40 \\ &\Rightarrow \frac{t}{60} \times 40 \geq 12 \\ &\Rightarrow t \geq 18\end{aligned}$$

故駕駛人於此段路程中行駛時間不得低於 18 分鐘，否則會被判定為超速。

(法二)

全程距離為 12 公里，若以時速 40 公里行駛，則需要花費  $12 \div 40 = 0.3$  小時，即 18 分鐘，故全程時間不得低於 18 分鐘，才不會被判定為超速。

2. (法一)

駕駛人以時速 50 公里行駛前半路程 6 公里，以平均時速  $x$  公里行駛後半路程 6 公里，因全程 12 公里速限為時速 40 公里，則可以列式

$$\begin{aligned}\frac{12}{\frac{6}{50} + \frac{6}{x}} \leq 40 &\Rightarrow 12 \leq 40 \left( \frac{6}{50} + \frac{6}{x} \right) \Rightarrow \frac{6}{50} + \frac{6}{x} \geq \frac{12}{40} \\ &\Rightarrow \frac{1}{50} + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{20} - \frac{1}{50} = \frac{3}{100} \Rightarrow x \leq \frac{100}{3}\end{aligned}$$

又行駛速度必為正，則  $0 < x < \frac{100}{3}$ 。

(法二)

由第 1 題可知，全程通過時間不得低於 0.3 小時，已知前半路程以時速 50 公里行駛，費時  $\frac{6}{50} = 0.12$  小時，意即後半路段行駛時間不得低於  $0.3 - 0.12 = 0.18$  小時，則可列式

$$\frac{6}{x} > 0.18$$

推得

$$x < \frac{6}{0.18} = \frac{100}{3}$$

又行駛速度必為正，則

$$0 < x < \frac{100}{3}$$



教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.43
題幹敘述合理（1分－5分）	4.43
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.29
此題的難易度（1分－5分）	2.43

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	76.67
第2題	略

綜合以上：

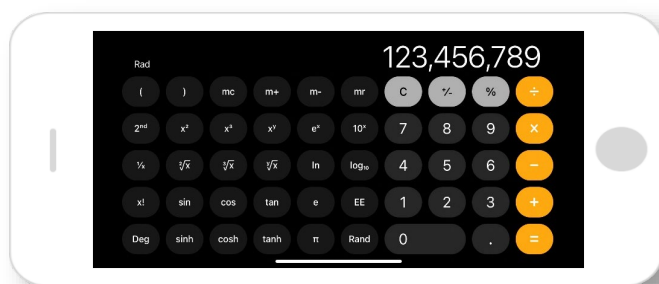
難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/> 中 <input checked="" type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第一冊 第12單元 多項式不等式		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input checked="" type="checkbox"/> 解釋辨析 <input checked="" type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：2021年1月1日起，公路的區間測速正式實施，剛推行時許多一般大眾並不是非常清楚理解區間測速的開罰模式，搭配多項式的不等式單元，測驗學生能否從行駛速限連結到列出多項式不等式，呈現如此題所示。

## 試題9： 計算機的運用

第二冊 第1單元 數列與遞迴關係

計算機的歷史悠久，從最古早的算盤，演變到電子計算機，甚至現在各種行動載具也都附加計算機的功能，如下圖所示。



在計算機中，一個有用的功能是：

按「=」能夠記憶上一次輸入的運算，並重複計算。

例如，依序輸入「5」→「+」→「3」→「=」可得到結果為  $5+3=8$ ；而依序輸入「5」→「+」→「3」→「=」→「=」，則可得  $5+3+3=11$ 。

根據以上資訊，試回答下列問題。

1. 若依序輸入「123」→「-」→「4」，則再按下9次「=」後的值為下列何者？  
(1) 83            (2) 85            (3) 87            (4) 89            (5) 91
2. 若依序輸入「1536」→「×」→「3.5」，則再按下幾次「=」後的值會開始有小數點？  
(1) 8            (2) 9            (3) 10            (4) 11            (5) 12
3. 計算機上有一個功能按鍵是「 $x^2$ 」，點擊後會將螢幕上的數變成平方數。某生用計算機正在計算一組資料的答案，突然被弟弟拿走計算機多按了3次「=」，

結果螢幕上的數接近  $81^3$ ，該生記得他剛剛最後的步驟是輸入「 $x^2$ 」及「=」，  
試幫該生算出原本的答案。



〔答案〕 1. (3)    2. (3)    3.  $3\sqrt{3}$

〔解答〕

1. 依序輸入「123」→「-」→「4」，則連續按下「=」時出現的數字為等差數列，已知首項  $a_1=123$ ，公差  $d=-4$ ，則按下 9 次「=」即求第 10 項

$$a_{10} = a_1 + 9d = 123 + 9 \times (-4) = 123 - 36 = 87。$$

2. 依序輸入「1536」→「×」→「3.5」，則連續按下「=」時出現的數字為等比數列，已知首項  $a_1=1536$ ，公比  $r=3.5=\frac{7}{2}$ ，設再按下  $n$  次「=」後的值會開始有小數點，即  $a_{n+1}=1536 \times \left(\frac{7}{2}\right)^n = 3 \times 2^9 \times \left(\frac{7}{2}\right)^n = 3 \times 7^n \times 2^{9-n}$  會開始有小數點，

可知  $9-n < 0$ ， $n > 9$ ，可知當  $n=10$  時，數值會開始有小數點。

3. 設該生原本的答案為  $a$ ，被弟弟在計算機多按下三次「=」，則螢幕上的數值則為

$$\left(\left(a^2\right)^2\right)^2 = 81^3$$

化簡可得

$$a^8 = 3^{12}$$

則

$$a = 3^{\frac{12}{8}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}。$$

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.00
題幹敘述合理（1分－5分）	4.60
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.60
此題的難易度（1分－5分）	2.60

學生施測：

小題	得分率(%)
第 1 題	48.39
第 2 題	20.97
第 3 題	略

綜合以上：

難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/> 中 <input checked="" type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★☆
章節內容	第二冊 第 1 單元 數列與遞迴關係		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input checked="" type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：由於 108 課綱推廣計算機融入教學，計算機有一些快速的功能按鍵也是大家所需知道的，而在多次按下等號時可發現，每次的數值可為等差、等比數列，或是有規律的數列。

## 試題10：撲克牌金字塔

第二冊 第2單元 級數

一則新聞報導指出，有網友擁有超狂疊撲克牌絕技，6小時疊20層，如下圖（一）所示。

超狂疊撲克牌絕技 6小時疊20層



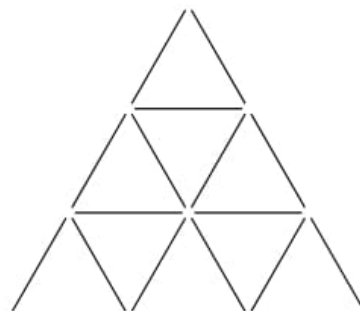
圖（一）：20層金字塔



圖（二）：1層金字塔



圖（三）：2層金字塔



圖（四）：3層金字塔

已知1層金字塔到3層金字塔的堆疊方式如圖（二）、圖（三）、圖（四）所示。根據以上資訊，試回答下列問題。

1. （填充題）若以這種方式堆疊，則4層的金字塔需要\_\_\_\_\_張撲克牌來堆疊。
2. （填充題）一副全新的撲克牌連同鬼牌共有54張紙牌，若用以上的方式堆疊，則用一副撲克牌最多可以堆疊出\_\_\_\_\_層的撲克牌金字塔。
3. 若想要堆疊出圖中20層高的金字塔，試問至少需要多少副撲克牌？

[ 答案 ] 1. 26      2. 5      3. 12

[ 解答 ]

1. 若將金字塔的「底層」都加上去的話：

    疊 1 層金字塔會需要 3 張撲克牌

    疊 2 層金字塔會需要 (3+6) 張撲克牌；

    疊 3 層金字塔會需要 (3+6+9) 張撲克牌。

可推知：

    疊 4 層含有「底層」的金字塔需要 (3+6+9+12) 張撲克牌。

最後再扣掉「底層」的 4 張撲克牌，可得知 4 層金字塔需要

(3+6+9+12)-4=26 張撲克牌。

2. 由第 1 題可推得，疊  $n$  層金字塔需用的撲克牌張數為

$$\begin{aligned}(3+6+9+\dots+3n)-n &= 3\times(1+2+3+\dots+n)-n \\ &= 3\times\frac{n(n+1)}{2}-n \\ &= \frac{3n^2+n}{2} \text{ (張)}\end{aligned}$$

可列出 5 層金字塔需用  $\frac{3\times 5^2+5}{2}=40$  張撲克牌；6 層金字塔需用  $\frac{3\times 6^2+6}{2}=57$  張

撲克牌，則一副撲克牌 54 張最多可以堆出 5 層金字塔。

3. 疊 20 層金字塔需用的撲克牌張數為  $\frac{3\times 20^2+20}{2}=610$  張，又  $610\div 54\approx 11.3$ ，

則堆疊 20 層金字塔最少需用 12 副撲克牌。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.20
題幹敘述合理（1分－5分）	4.60
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.60
此題的難易度（1分－5分）	3.40

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	90.00
第2題	87.50
第3題	略

綜合以上：

難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第2單元 級數		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：常見國小生會拿撲克牌疊起撲克牌金字塔，而疊撲克牌時通常會先決定要疊幾層的撲克牌金字塔，之後才會開始疊，若如新聞中要疊起 20 層的撲克牌金字塔，則至少要先準備 12 副撲克牌才可以完成。

## 試題11： 振興券

第二冊 第3單元 計數原理

西元 2020 年，因應新冠肺炎疫情嚴重造成經濟衰弱，為了重振經濟，政府發放每人等值新臺幣 3000 元的「振興券」來振興國內經濟。



如上圖所示，振興券中共有 200 元面額 5 張，500 元面額 4 張。根據以上資訊，試回答下列問題。

1. (填充題) 若只使用振興券付款，付款金額不能為 0 元，試問 5 張 200 元的振興券與 4 張 500 元的振興券，共有\_\_\_\_\_種不同的付款金額。
2. (填充題) 承上題，共有\_\_\_\_\_種付款方式。(例：五張 200 元與兩張 500 元算兩種付款方式。)
3. 某人身上帶有 4 張 500 元的振興券、5 張 200 元的振興券及 5 張 100 元現金。由於使用振興券消費不能找錢，某人希望振興券效益最大化，也就是說不會用 500 元的振興券購買 10 元的東西，一定會把 500 元剛好花完。若他想要購買一雙 2800 元的球鞋，試列出所有的付款方式。

〔答案〕 1. 26      2. 29      3. 5

〔解答〕

1. 若直接列出所有情況，則可能的付款金額為：200、400、500、600、700、800、900、1000、1100、1200、1300、1400、1500、1600、1700、1800、1900、2000、2100、2200、2300、2400、2500、2600、2800、3000 元。共有 26 種。

2. 因為 200 元的付款方式有 0 張、1 張、2 張、3 張、4 張、5 張，共有 6 種選擇，而 500 元的付款方式有 0 張、1 張、2 張、3 張、4 張，共有 5 種選擇，所以利用乘法原理，付款方式共有  $6 \times 5 = 30$  種，又因為付款金額不能為 0 元，所以共有  $30 - 1 = 29$  種。

（第 1 題另解）

由上題得知付款方式共有 29 種，而其中重複的金額有以下 3 種情況：

(1) 1000 元：5 張 200 元及 0 張 500 元，等同於 2 張 500 元。

(2) 1500 元：5 張 200 元及 1 張 500 元，等同於 3 張 500 元。

(3) 2000 元：5 張 200 元及 2 張 500 元，等同於 4 張 500 元。

所以共有  $29 - 3 = 26$  種不同的付款金額。

3. 設最後付款為 500 元  $x$  張、200 元  $y$  張、100 元  $z$  張，則依題意可列出方程式：

$$500x + 200y + 100z = 2800$$

化簡後可得  $5x + 2y + z = 28$ ，又因為  $0 \leq x \leq 4$ ， $0 \leq y \leq 5$ ， $0 \leq z \leq 5$ ，則我們可以列出符合條件的正整數數對  $(x, y, z)$  有  $(4, 4, 0)$ 、 $(4, 3, 2)$ 、 $(4, 2, 4)$ 、 $(3, 5, 3)$ 、 $(3, 4, 5)$ ，共 5 種，意即付款方式有：

「4 張 500 元、4 張 200 元、0 張 100 元」

「4 張 500 元、3 張 200 元、2 張 100 元」

「4 張 500 元、2 張 200 元、4 張 100 元」

「3 張 500 元、5 張 200 元、3 張 100 元」

「3 張 500 元、4 張 200 元、5 張 100 元」

共 5 種付款方式。

(另解)

因為身上的振興券及新台幣共有 3500 元，付完球鞋款項 2800 元後，身上會剩下 700 元，所以可令最後身上留有 500 元  $x$  張、200 元  $y$  張、100 元  $z$  張，則依題意可列出方程式：

$$500x + 200y + 100z = 700$$

化簡後可得  $5x + 2y + z = 7$ ，又因為  $0 \leq x \leq 4$ ， $0 \leq y \leq 5$ ， $0 \leq z \leq 5$ ，則我們可以列出符合條件的正整數數對  $(x, y, z)$  有  $(1, 1, 0)$ 、 $(1, 0, 2)$ 、 $(0, 3, 1)$ 、 $(0, 2, 3)$ 、 $(0, 1, 5)$ ，共 5 種，意即付款方式有：

「3 張 500 元、4 張 200 元、5 張 100 元」

「3 張 500 元、5 張 200 元、3 張 100 元」

「4 張 500 元、2 張 200 元、4 張 100 元」

「4 張 500 元、3 張 200 元、2 張 100 元」

「4 張 500 元、4 張 200 元、0 張 100 元」

共 5 種付款方式。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.40
題幹敘述合理（1分－5分）	4.40
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.00
此題的難易度（1分－5分）	3.40

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	46.43
第2題	64.29
第3題	略

綜合以上：

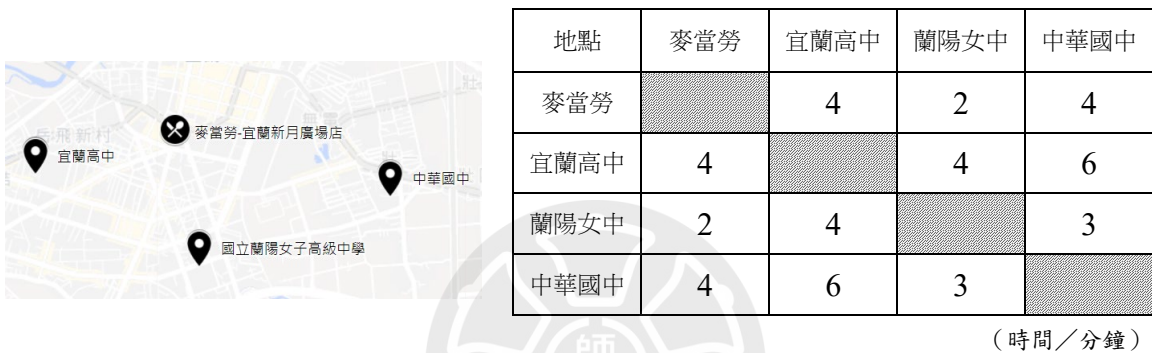
難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第3單元 計數原理		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input checked="" type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：2020年，政府為了振興經濟發放振興券，由於面額固定，而且付款不能找零，這時會考慮所需帶的現金為多少，以便能跟振興券湊成付款金額。

## 試題12： 外送送餐最佳路徑

第二冊 第4單元 排列

由於人們飲食習慣改變，食物外送越來越盛行，經常見到不同外送平台的外送員在大街小巷穿梭送單。有一外送員某天同時接到宜蘭高中、蘭陽女中、中華國中三所學校的麥當勞訂單。下方的圖（一）為「麥當勞新月店」、「宜蘭高中」、「蘭陽女中」、「中華國中」在地圖中的相對位置，圖（二）為「Google地圖」上此四個地點中任意兩地點移動的最快時間。



圖（一）

圖（二）

根據以上資訊，試回答下列問題。

- （單選題）若外送員從麥當勞新月店出發，則送往三所學校的排序共有\_\_\_\_\_種排序。
- （非選擇題）使用「Google地圖」來估計兩地移動所需的時間，如圖（二）所示，試幫外送員規劃出從麥當勞出發送餐最省時間的所有路線。（可能不止一種路線）

〔答案〕 1.6    2.3

〔解答〕

1. 若從麥當勞出發，則之後的路線為「宜蘭高中」、「蘭陽女中」、「中華國中」的直線排列，故為  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  種路線。

2. 將第 1 題 6 種路線逐一列出如下

路線 1：麥當勞  $\xrightarrow{4\text{分鐘}}$  宜蘭高中  $\xrightarrow{6\text{分鐘}}$  中華國中  $\xrightarrow{3\text{分鐘}}$  蘭陽女中，共 13 分鐘。

路線 2：麥當勞  $\xrightarrow{4\text{分鐘}}$  宜蘭高中  $\xrightarrow{4\text{分鐘}}$  蘭陽女中  $\xrightarrow{3\text{分鐘}}$  中華國中，共 11 分鐘。

路線 3：麥當勞  $\xrightarrow{2\text{分鐘}}$  蘭陽女中  $\xrightarrow{4\text{分鐘}}$  宜蘭高中  $\xrightarrow{6\text{分鐘}}$  中華國中，共 12 分鐘。

路線 4：麥當勞  $\xrightarrow{2\text{分鐘}}$  蘭陽女中  $\xrightarrow{3\text{分鐘}}$  中華國中  $\xrightarrow{6\text{分鐘}}$  宜蘭高中，共 11 分鐘。

路線 5：麥當勞  $\xrightarrow{4\text{分鐘}}$  中華國中  $\xrightarrow{3\text{分鐘}}$  蘭陽女中  $\xrightarrow{4\text{分鐘}}$  宜蘭高中，共 11 分鐘。

路線 6：麥當勞  $\xrightarrow{4\text{分鐘}}$  中華國中  $\xrightarrow{6\text{分鐘}}$  宜蘭高中  $\xrightarrow{4\text{分鐘}}$  蘭陽女中，共 14 分鐘。

故路線 2、路線 4、路線 5 為最節省時間的送餐路線，總共為 3 種。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.80
題幹敘述合理（1分－5分）	4.60
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.40
此題的難易度（1分－5分）	4.20

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	55.00
第2題	略

綜合以上：

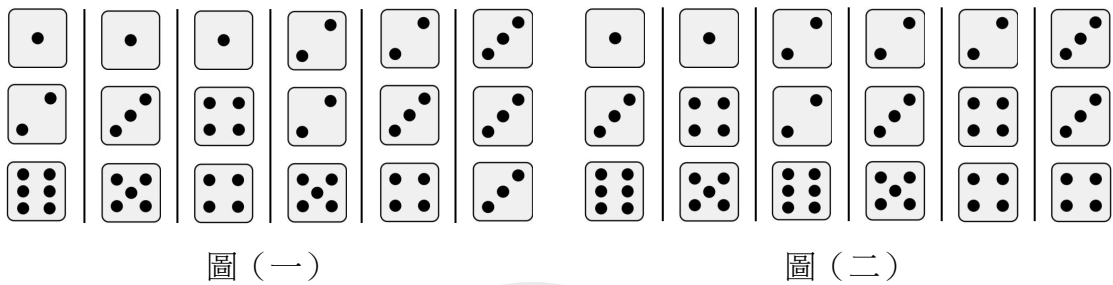
難易程度	<input checked="" type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第4單元 排列		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input checked="" type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：因為外送平台興起，學生之間也會使用外送平台訂餐，而平台上的路線規劃也會與路程時間有關，探討如此問題能引發學生思考排列組合在生活中的使用情況。

### 試題13：三顆骰子的點數和

第二冊 第06單元 古典機率

十七世紀時期，伽利略有一篇短文〈關於骰子遊戲的思考〉，以處理骰子點數和的問題而聞名。當時的賭客對於同時投擲三顆公正骰子所出現的點數和產生疑惑，如下圖所示。圖（一）為三顆骰子點數和為9點的組合，圖（二）為三顆骰子點數和為10點的組合。



以上點數和為9點與點數和為10點的組合皆為6種，但是賭客們憑著多次賭局的經驗認為：「點數和為10點的情況，比點數和為9點的情況更常出現。」根據以上資訊，試回答下列問題。

- （單選題）同時投擲三顆公正骰子，擲出3點、3點、3點的機率為下列何者？
  - $\frac{1}{6}$
  - $\frac{1}{36}$
  - $\frac{1}{72}$
  - $\frac{1}{108}$
  - $\frac{1}{216}$
- （多選題）關於同時投擲三顆公正骰子的擲骰結果，下列敘述哪些是正確的？
  - 擲出1點、2點、6點的機率大於擲出3點、3點、3點的機率
  - 擲出1點、2點、6點的機率大於擲出1點、3點、5點的機率
  - 擲出1點、4點、4點的機率為  $\frac{1}{72}$
  - 同時投擲三顆公正骰子36次，恰有1次的擲骰結果為1點、2點、6點
  - 投擲三顆公正骰子點數和為9點的機率為  $\frac{25}{216}$

3. 試求出投擲三顆公正骰子點數和為 10 點的機率，並分析賭客們的賭局經驗是否正確。(即點數和為 10 點的情況，比點數和為 9 點的情況更常出現)

[答案] 1. (5) 2. (1)(3)(5) 3.  $\frac{27}{216}$ ，賭客們的賭局經驗是正確的

[解答]

$$1. P(3 \text{ 點}, 3 \text{ 點}, 3 \text{ 點}) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}。$$

故答案選 (5)。

2. 設同時投擲三顆公正骰子的樣本空間為  $S$ ，擲出 1 點、2 點、6 點的事件為  $A$ ，擲出 3 點、3 點、3 點的事件為  $B$ ，擲出 1 點、3 點、5 點的事件為  $C$ ，擲出 1 點、4 點、4 點的事件為  $D$ ，則可推得  $n(S) = 6^3 = 216$ ， $n(A) = 3! = 6$ ，

$$n(B) = \frac{3!}{3!} = 1，n(C) = 3! = 6，n(D) = \frac{3!}{2!} = 3。$$

(1) ○：因為  $n(A) = 6$ ， $n(B) = 1$ ，所以  $n(A) > n(B)$ ，可推得  $P(A) > P(B)$ 。

(2) ×：因為  $n(A) = 6 = n(C)$ ，所以  $P(A) = P(C)$ 。

$$(3) ○：P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}。$$

(4) ×：不一定。

(5) ○： $P$  (三顆骰子點數和為 9 點)

$$\begin{aligned} &= P(1 \text{ 點}, 2 \text{ 點}, 6 \text{ 點}) + P(1 \text{ 點}, 3 \text{ 點}, 5 \text{ 點}) + P(1 \text{ 點}, 4 \text{ 點}, 4 \text{ 點}) \\ &+ P(2 \text{ 點}, 2 \text{ 點}, 5 \text{ 點}) + P(2 \text{ 點}, 3 \text{ 點}, 4 \text{ 點}) + P(3 \text{ 點}, 3 \text{ 點}, 3 \text{ 點}) \\ &= \frac{3!}{6^3} + \frac{3!}{6^3} + \frac{3}{6^3} + \frac{3}{6^3} + \frac{3!}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{25}{216}。 \end{aligned}$$

故答案選 (1)(3)(5)。

3. 分別求出三顆公正骰子點數和為 9 點的機率與點數和為 10 點的機率如下所示：

$P$  (三顆骰子點數和為 9 點)

$$\begin{aligned}
&= P(1 \text{ 點}, 2 \text{ 點}, 6 \text{ 點}) + P(1 \text{ 點}, 3 \text{ 點}, 5 \text{ 點}) + P(1 \text{ 點}, 4 \text{ 點}, 4 \text{ 點}) \\
&+ P(2 \text{ 點}, 2 \text{ 點}, 5 \text{ 點}) + P(2 \text{ 點}, 3 \text{ 點}, 4 \text{ 點}) + P(3 \text{ 點}, 3 \text{ 點}, 3 \text{ 點}) \\
&= \frac{3!}{6^3} + \frac{3!}{6^3} + \frac{3}{6^3} + \frac{3}{6^3} + \frac{3!}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{25}{216}。
\end{aligned}$$

$P$  (三顆骰子點數和為 10 點)

$$\begin{aligned}
&= P(1 \text{ 點}, 3 \text{ 點}, 6 \text{ 點}) + P(1 \text{ 點}, 4 \text{ 點}, 5 \text{ 點}) + P(2 \text{ 點}, 2 \text{ 點}, 6 \text{ 點}) \\
&+ P(2 \text{ 點}, 3 \text{ 點}, 5 \text{ 點}) + P(3 \text{ 點}, 4 \text{ 點}, 4 \text{ 點}) + P(3 \text{ 點}, 3 \text{ 點}, 4 \text{ 點}) \\
&= \frac{3!}{6^3} + \frac{3!}{6^3} + \frac{3}{6^3} + \frac{3!}{6^3} + \frac{3}{6^3} + \frac{3}{6^3} = \frac{27}{216}。
\end{aligned}$$

可知三顆骰子點數和為 10 點的機率大於點數和為 9 點的機率，故賭客們的賭局經驗是正確的。



教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.20
題幹敘述合理（1分－5分）	4.40
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.20
此題的難易度（1分－5分）	3.40

學生施測：

小題	得分率(%)
第 1 題	77.18
第 2 題	28.86
第 3 題	略

綜合以上：

難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第 06 單元 古典機率		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input checked="" type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：此題參考自數學的科普書籍，書中提到在過去尚未有機率概念的時期，大多數的人不理解點數和為九與十點，組合方法同為六種卻有不同的出現機會。可以從此題引導學生用學過的機率概念解決過去的問題，從而解決現今或是未來的問題。

## 試題14：賭金分配問題

第二冊 第07單元 數學期望值

在西元 1654 年，米爾向數學家巴斯卡提出了賭金分配的問題。當時米爾提出的問題如下：

「甲、乙兩人約定好，每人出 32 枚金幣作為賭金，甲、乙贏得一回賭局的機率均為  $\frac{1}{2}$ ，若誰先贏得三回，就可以拿走全部 64 枚金幣。在甲贏得了第一回，勝局比為 (1:0) 後，賭局因故中止。此時應如何分配這 64 枚金幣較公平？」

根據以上資訊，試回答下列問題。

4. (單選題) 甲、乙兩人最多需再比幾回能分出勝負？  
(1) 2                      (2) 3                      (3) 4                      (4) 5                      (5) 6
5. (多選題) 若從勝局比 (1:0) 的情況讓賭局繼續進行，下列敘述哪些是正確的？
- (1) 若甲最後贏得 64 枚金幣，此時勝局比可能為 (3:0)、(3:1)、(3:2)
- (2) 若乙最後贏得 64 枚金幣，此時勝局比可能為 (0:3)、(1:3)、(2:3)
- (3) 甲以勝局比 (3:0) 贏得賭局的機率等於乙連贏兩回的機率
- (4) 甲以勝局比 (3:1) 贏得賭局的機率等於乙以勝局比 (1:3) 贏得賭局的機率
- (5) 甲以勝局比 (3:2) 贏得賭局的機率為  $\frac{3}{16}$
6. 費馬在當時利用期望值的概念，給出的賭金分配為：甲應得  $a$  枚金幣，乙應得  $b$  枚金幣。已知  $a$  為甲贏得賭金的期望值，且  $b$  為乙贏得賭金的期望值，試求數對  $(a,b)$ 。

[ 答案 ] 1. (3) 2. (1)(3)(5) 3. (44,20)

[ 解答 ]

1. 比最多回的情況為勝局比 (3 : 2) 或 (2 : 3)，皆需再比 4 回，故答案選 (3)。

2. (1) ○。

(2) ×：因為甲先贏一局了，所以勝局比不可能為 (0 : 3)。

(3) ○：勝局比為 (3 : 0) 意即甲連贏兩回，又因為題幹敘述「甲、乙贏得一回賭局的機率均為  $\frac{1}{2}$ 」，所以甲、乙兩人連贏兩局的機率皆相同。

(4) ×：勝局比為 (3 : 1) 意即甲再贏 2 回，乙再贏 1 回；勝局比為 (1 : 3) 意即乙連贏 3 回。由於甲再贏 2 回，乙再贏 1 回需考慮甲、乙順序的排列，故兩種勝局比的機率不同。

(5) ○：甲以勝局比為 (3 : 2) 的情況贏得賭局，意即甲再贏 2 回賭局，乙再贏 2 回賭局，同時最後 1 回必須是甲贏，則排列的方法數為  $C_2^3 = 3$ ，故機率為  $\frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}$ 。

故答案選 (1)(3)(5)。

3. 甲贏得全部賭金的機率為  $\frac{11}{16}$ ，乙贏得全部賭金的機率為  $\frac{5}{16}$ ，故可得

甲贏得賭金的期望值為  $64 \times \frac{11}{16} + 0 \times \frac{5}{16} = 44$  枚金幣，

乙贏得賭金的期望值為  $64 \times \frac{5}{16} + 0 \times \frac{11}{16} = 20$  枚金幣。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.20
題幹敘述合理（1分－5分）	4.40
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.60
此題的難易度（1分－5分）	4.20

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	100.00
第2題	28.57
第3題	略

綜合以上：

難易程度	<input checked="" type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第07單元 數學期望值		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：賭金分配問題一直是很有名的機率、期望值的問題，而分配賭金在現實生活上也有許多類似的情況，如：一棟大樓每層樓分配電梯的維修費用、同住的室友分配電費等，若能從此題的觀點，利用機率與期望值的概念進行分配，或許更容易達成公平又不失和的結果。

## 試題15： 111 年學科能力測驗分析

第二冊 第 08 單元 一維數據分析

111 年學科能力測驗首次將數學分為數學 A 與數學 B 兩考科進行測驗，測驗科目除了數學以外，還包括國文、英文、社會、自然等共 6 科，下表為 111 年學科能力測驗各科成績標準一覽表。

標準 項目	頂標	前標	均標	後標	底標	五項標準之計算方式（不含缺考生的成績）
國文	13	12	10	9	7	頂標：成績位於第 88 百分位數之考生級分。 前標：成績位於第 75 百分位數之考生級分。 均標：成績位於第 50 百分位數之考生級分。 後標：成績位於第 25 百分位數之考生級分。 底標：成績位於第 12 百分位數之考生級分。
英文	13	12	8	5	4	
數學 A	10	8	6	4	3	
數學 B	13	11	8	4	3	
社會	13	12	11	9	7	
自然	14	12	10	7	5	

某生的 111 年學科能力測驗成績如下表所示。

項目	國文	英文	數學 A	數學 B	社會	自然
級分	11	8	9	12	12	8

根據以上資訊，試回答下列問題。

- （單選題）下列的科目中，哪一個科目級分的四分位距是最大的？  
 (1) 國文      (2) 英文      (3) 數學 A      (4) 社會      (5) 自然
- （多選題）下列敘述哪些是正確的？  
 (1) 至少有 88% 的考生，國文成績大於等於 13 級分  
 (2) 至少有 75% 的考生，英文成績小於等於 12 級分  
 (3) 應考數學 A 的考生有 79834 人，則數學 A 排名第 19959 名的考生成績為 8 級分  
 (4) 英文成績位於第 63 百分位數之考生級分為 10 級分

(5) 相對於全體考生，該生在英文科的表現比在自然科的表現還要好

3. 已知該生的高中全校同學數學 A 的平均為 6.97 級分，標準差為 2.92 級分；數學 B 的平均為 8.01 級分，標準差為 3.75 級分。試將該生數學 A 與數學 B 的級分標準化，並判斷相對於全校，該生在數學 A 與數學 B 中，哪一科表現比較好？  
(四捨五入取至小數點以下第二位)

〔答案〕 1. (2)    2. (2)(3)(5)    3. 數學 A：0.70，數學 B：1.06，數學 B 較好

〔解答〕

1. 四分位距為第 3 四分位數與第 1 四分位數的差，即第 75 百分位數與第 25 百分位數的差，由題幹所附的各科成績標準一覽表可知為前標與後標的差距，而在國文、英文、數學 A、社會、自然中，前標與後標差距分別為 3、7、4、3、5，其中前標與後標差距最大的科目為英文，故選 (2)。
2. 百分位數的定義為：「用  $P_k$  表示第  $k$  百分位數 ( $k=1,2,\dots,99$ )，其中至少有  $k\%$  的數據小於或等於  $P_k$ ，且至少有  $(100-k)\%$  的數據大於或等於  $P_k$ 。」
- (1) ×：應改為「至少有 88% 的考生，國文成績小於等於 13 級分。」
- (2) ○
- (3) ○：數學 A 的前標為 8 級分，意即成績位於第 75 百分位數之考生級分為 8 級分，根據百分位數的計算方法，先將 79834 名考生分數由小到大排序為  $x_1, x_2, \dots, x_{79834}$ ，因為  $79834 \times \frac{75}{100} = 59875.5$  不為整數，所以第 75 百分位數  $P_{75} = x_{59876}$ ，可求得名次為  $79834 - 59876 + 1 = 19959$  名。
- (4) ×：無從得知。

(5) ○：該生的英文成績與自然成績皆為 8 級分，而英文成績達到均標，但自然成績只有達到後標，故該生在英文科的表現比在自然科的表現還要好。

故答案應選(2)(3)(5)。

3. 分別將該生的數學 A 與數學 B 的級分標準化如下：

數學 A： $\frac{9-6.97}{2.92} \approx 0.70$ ，表示數學 A 的級分較全校的平均高出 0.7 個標準差。

數學 B： $\frac{12-8.01}{3.75} \approx 1.06$ ，表示數學 B 的級分較全校的平均高出 1.07 個標準差。

故相對於全校，該生在數學 B 的表現比較好。

(此題數據來自該年度宜蘭高中全校考生數學 A 與數學 B 的級分統計)



教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.40
題幹敘述合理（1分－5分）	4.40
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.40
此題的難易度（1分－5分）	3.00

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	90.00
第2題	30.00
第3題	略

綜合以上：

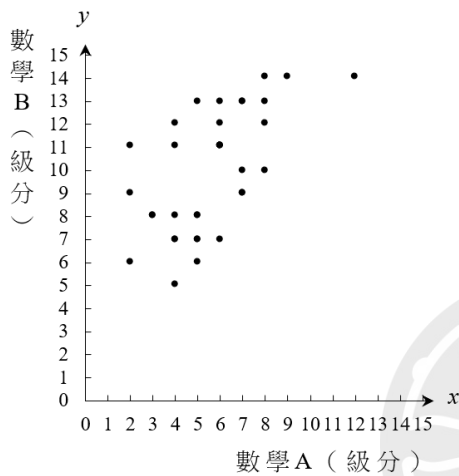
難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第08單元 一維數據分析		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input checked="" type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input checked="" type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：2022年是108課綱第一屆學測，也是首次於學測將數學分成數學A與數學B兩考科進行，學生可以兩科目皆報考，但是在考量申請入學時便需要分析自己的數學A與數學B哪個考科表現較好，以作為申請校系選擇時的考量。

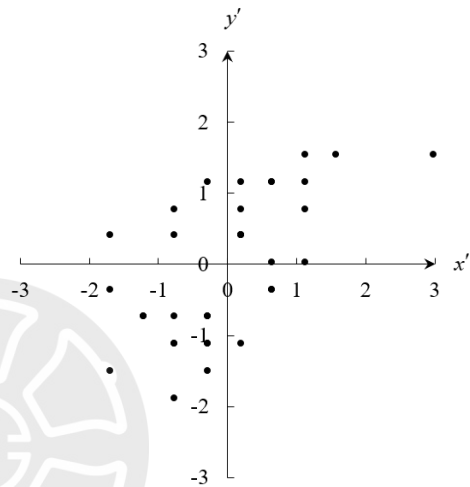
## 試題16：學測數學 A 與數學 B 的散布圖

第二冊 第 09 單元 二維數據分析

某一班級中，同時報考學測數學 A 與數學 B 的學生共有 26 位。這些學生數學 A 的級分  $x$  與數學 B 的級分  $y$  的散布圖如下圖（一）所示。假設數學 A 級分  $x$  的標準化數據為  $x'$ ，數學 B 級分  $y$  的標準化數據為  $y'$ ，圖（二）為標準化數據  $x'$  與  $y'$  的散布圖。



圖（一）



圖（二）

令  $L_1$  為  $y$  對  $x$  的迴歸直線， $L_2$  為  $y'$  對  $x'$  的迴歸直線，根據以上資訊，試回答下列問題。

- 如圖（一）所示，若數學 A 的級分  $x$  與數學 B 的級分  $y$  的相關係數為  $r$ ，則  $r$  應在下列哪一個範圍？
  - $r = -1$
  - $-1 < r < 0$
  - $r = 0$
  - $0 < r < 1$
  - $r = 1$
- （多選題）下列敘述哪些是正確的？
  - 「數學 B 考的比數學 A 高的人」多於「數學 A 考的比數學 B 高的人」
  - 直線  $L_1$  的斜率大於 0

(3) 直線  $L_2$  必通過點  $(0,0)$

(4) 直線  $L_2$  的斜率小於 1

(5) 若將圖 (二) 的這 26 筆數據  $(x'_1, y'_1), \dots, (x'_{26}, y'_{26})$  變更為

$(y'_1, x'_1), \dots, (y'_{26}, x'_{26})$ ，則變更後的迴歸直線斜率會大於 1

3. 此次學測數學 A 考完後，考生哀鴻遍野，號稱史上最難。在這個班級中有一位學生只有報考數學 A，分數為 10 級分，他想要知道若當初有報考數學 B，分數可以考到多少級分。已知這 26 位學生的數學 A 與數學 B 級分的平均數  $\mu_x = 5.6$ ， $\mu_y = 9.9$ ，標準差  $\sigma_x = 2.2$ ， $\sigma_y = 2.6$ ，相關係數  $r = 0.6$ 。試求出  $y$  對  $x$  的迴歸直線，並利用此直線預測：若該生當初有報考數學 B，其成績為多少級分？（四捨五入取至整數位）

〔答案〕 1. (4) 2. (1)(2)(3)(4) 3. 13

〔解答〕

1. 由圖 (一) 可知，散步圖呈現正相關，但所有數據並未在同一條直線上，非完全正相關，相關係數應落在  $0 < r < 1$  的範圍中，故選 (4)。
2. 設數學 A 的分數  $x$  與數學 B 的分數  $y$  的相關係數為  $r$ 。
- (1) ○：由圖 (一) 可知，大多數的點都分布在  $y = x$  的左上方，意即「數學 B 考的比數學 A 高的人」多於「數學 A 考的比數學 B 高的人」。
- (2) ○：由圖 (一) 可知，數學 A 與數學 B 級分呈現正相關的趨勢，故其迴歸直線  $L_1$  的斜率大於 0。
- (3) ○：因為  $y'$  對  $x'$  的迴歸直線會通過點  $(\mu_{x'}, \mu_{y'})$ ，又因為  $x'$  與  $y'$  分別為  $x$  與

$y$  的標準化數據，所以  $\mu_{x'} = 0, \mu_{y'} = 0$ ，故直線  $L_2$  必定會通過點  $(0,0)$ 。

(4) ○：圖（二）標準化數據的迴歸直線  $L_2$  的方程式為  $y' = rx'$ ， $-1 \leq r \leq 1$ 。

又從圖（二）中可發現，此 26 筆數據不為完全正相關，所以相關係數  $r < 1$ ，可得直線  $L_2$  的斜率小於 1。

(5) ×：因為數據的變量  $x$  與  $y$  互換後相關係數  $r$  不改變，故斜率仍小於 1。  
故選(1)(2)(3)(4)。

3. 因為迴歸直線的斜率為  $r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.6 \times \frac{2.6}{2.2} = \frac{39}{55}$ ，且必過點  $(\mu_x, \mu_y) = (5.6, 9.9)$ ，

所以利用點斜式，得

$$y - 9.9 = \frac{39}{55}(x - 5.6)$$

整理得迴歸直線方程式為

$$y = \frac{39}{55}(x - 5.6) + 9.9$$

再將該生數學 A 的成績 9 級分代入  $y = \frac{39}{55}(x - 5.6) + 9.9$ ，得

$$y = \frac{39}{55}(10 - 5.6) + 9.9 = 13.02 \approx 13$$

故若該生當初有報考數學 B，預測的成績為 13 級分。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.40
題幹敘述合理（1分－5分）	4.20
小題鋪陳安排（1分－5分）	3.60
此題的難易度（1分－5分）	4.60

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	73.70
第2題	5.90
第3題	略

綜合以上：

難易程度	<input checked="" type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第09單元 二維數據分析		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input checked="" type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：此題希望學生能從 111 年學測的數學 A 與數學 B 的級分散布圖推論，  
 考生對於數學 A 與數學 B 的表現好壞，也能從回歸直線預測自己未考  
 科目的級分。

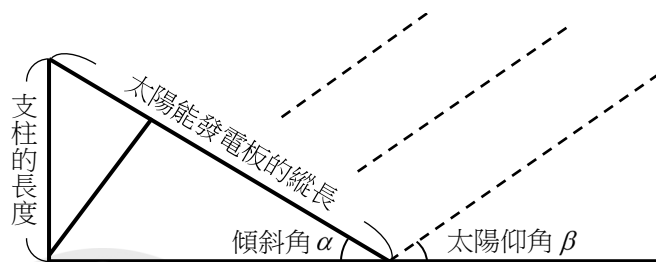
## 試題17： 太陽能發電板的裝設

第二冊 第 10 單元 直角三角形的三角比

裝設太陽能發電板的時候，為了能讓發電板的正面接收到較多的陽光，在裝設時需要傾斜一個角度，如圖（一）所示。在下方圖（二）中，以直角三角形的斜邊代表**太陽能發電板的縱長**，直角三角形的高代表**支柱的長度**，太陽能發電板與地面的銳夾角  $\alpha$  稱為**太陽能發電板的傾斜角**，虛線為陽光的照射方向，陽光與地面的銳夾角  $\beta$  稱為**太陽仰角**。



圖（一）



圖（二）

通常太陽仰角  $\beta$  會隨著緯度越高而越小，緯度越低則越大。因此在裝設太陽能發電板時，一般會依據地區的緯度，來決定傾斜角  $\alpha$  的大小，使太陽能發電板垂直於入射的陽光。根據上述資料，試回答下列問題。

- （多選題）下列敘述哪些是正確的？
  - 傾斜角  $\alpha$  與太陽仰角  $\beta$  互餘。
  - 太陽仰角  $\beta$  越大，傾斜角  $\alpha$  越大。
  - 地區的緯度越高，裝設太陽能發電板的傾斜角  $\alpha$  越大。
  - 同樣的太陽能發電板，在太陽仰角  $\beta$  越大的地點，裝設所需的支柱越長。
  - 同樣的太陽能發電板，在東京（北緯  $36^\circ$ ）裝設所需的支柱長度，比在臺北（北緯  $25^\circ$ ）裝設所需的支柱長度還長。
- 在日本的札幌，經長時間觀測，其太陽仰角的平均值為  $55^\circ$ 。如果想裝設縱長 2

公尺的太陽能發電板，使其垂直於入射的陽光，試問太陽能發電板背面上方垂直於地面的支柱，需要多少公尺？（四捨五入取至小數點以下第二位，

$$\sin 55^\circ \approx 0.819, \cos 55^\circ \approx 0.574)$$

〔答案〕 1. (1)(3)(5) 2. 1.15

〔解答〕

1. 根據題幹「太陽能發電板垂直於入射的陽光」，可得知傾斜角  $\alpha$  與太陽仰角  $\beta$  的關係為

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

- (1) ○：由  $\alpha + \beta = 90^\circ$  可知，傾斜角  $\alpha$  與太陽仰角  $\beta$  互餘。
- (2) ×：由  $\alpha + \beta = 90^\circ$  可知，太陽仰角  $\beta$  越大，則傾斜角  $\alpha$  越小。
- (3) ○：由題幹可知，地區的緯度越高，太陽仰角  $\beta$  越小，則傾斜角  $\alpha$  越大。
- (4) ×：由選項 (2) 可知太陽仰角  $\beta$  越大，傾斜角  $\alpha$  越小，則所需的支柱長度越短。
- (5) ○：由選項 (3) 可知地區的緯度越高，傾斜角  $\alpha$  越大，則所需的支柱長度越長。

故答案選(1)(3)(5)。

2. 由圖（二）可知，支柱的長度 = 太陽能發電板的縱長  $\times \sin \alpha$ 。又因為傾斜角  $\alpha$  與太陽仰角  $\beta$  互餘，可求得傾斜角為

$$\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ。$$

則支柱的長度為

$$2 \times \sin 35^\circ = 2 \times \sin(90^\circ - 55^\circ) = 2 \times \cos 55^\circ = 2 \times 0.574 = 1.148 \approx 1.15 \text{ (公尺)}$$

故需要 1.15 公尺的支柱。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.60
題幹敘述合理（1分－5分）	4.40
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.60
此題的難易度（1分－5分）	4.20

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	35.29
第2題	略

綜合以上：

難易程度	<input checked="" type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第10單元 直角三角形的三角比		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：此題參考自數學的科普書籍之中，在架設太陽能板時會需參考當地的緯度與太陽仰角以便決定架設角度，進而得知所需支架長度。出題用意在於讓學生能從已知的三角函數定義轉換解決現實生活中三角形角度與邊長的實際問題。

## 試題18： 埃及金字塔

第二冊 第 10 單元 直角三角形的三角比

希臘數學家泰勒斯曾到埃及，並被要求算出金字塔的高度，便留有以下廣為傳頌的故事：

「埃及的某個艷陽天，泰勒斯在地上垂直插了一根桿子，等到桿子的影子與桿子的高度等長時，他測量了金字塔影子的長度，此長度即為金字塔的高度。」

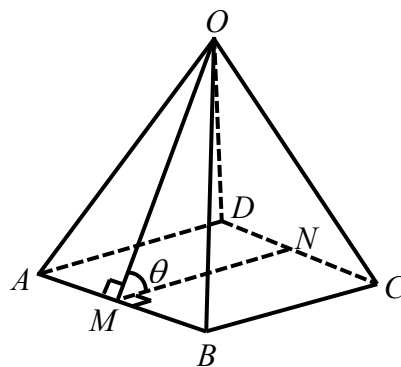


知道如何量測金字塔的塔高之後，後人也發現一個驚人的事實：

「金字塔的底面周長與金字塔的塔高比值為圓周率的兩倍（ $2\pi$ ）。」

根據以上資訊，試回答下列問題。

1. （填充題）某生想用此方式推得學校旗竿的高度，他先在旗竿附近的地上插了一枝 15 公分的竹筴，並量測竹筴的影長為 10 公分，同時也量測旗竿的影長為 8 公尺，則旗竿的高度為\_\_\_\_\_公尺。
2. 下圖中的四角錐  $O-ABCD$  為金字塔的示意圖。



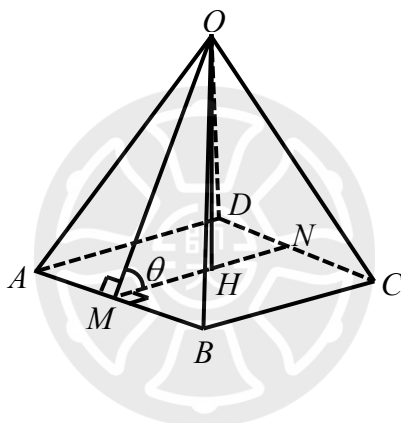
其中  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ ，已知金字塔底面  $ABCD$  為正方形，且  $M$ 、 $N$  分別為

$\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點，試求金字塔塔面與地面的夾角 $\theta$ 的正切值 $\tan \theta$ 。(即求圖中 $\tan \angle OMN$ )

[答案] 1. 12    2.  $\frac{4}{\pi}$

[解答]

1. 設旗竿高度為 $x$ 公尺。由於太陽光的入射角相同，故可知物體高度與影長比值為定值，即 $\frac{15}{10} = \frac{x}{8}$ ，則 $x = 12$ 。故旗竿高度為12公尺。
2. 從塔頂 $O$ 作出金字塔的塔高 $\overline{OH}$ ，如下圖所示。



則由正切值的定義可知

$$\tan \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{MH}}$$

又因為金字塔的底面周長與金字塔的塔高比值為圓周率的兩倍（ $2\pi$ ），且金字塔底面為正方形，則可列式

$$\begin{aligned} \frac{4\overline{BC}}{\overline{OH}} &= 2\pi \\ \Rightarrow \pi\overline{OH} &= 2\overline{BC} = 2 \times (2\overline{MH}) = 4\overline{MH} \\ \Rightarrow \frac{\overline{OH}}{\overline{MH}} &= \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

故可推得

$$\tan \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{MH}} = \frac{4}{\pi}。$$

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.80
題幹敘述合理（1分－5分）	4.60
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.40
此題的難易度（1分－5分）	3.40

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	100.00
第2題	83.33

綜合以上：

難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第10單元 直角三角形的三角比		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：此題為簡易的三角測量，出題用意在於讓學生能從數學故事中汲取古人推測建築物高度的經驗，並將其實際應用於生活中，而金字塔的比例也是數學史中很重要的成分之一。

## 試題19：方位的標示方法

第二冊 第 11 單元 廣義角三角比與極坐標

地圖上表示地理現象的方位關係，可運用羅盤方位法、方位角法、象限角法等標示方式。

(1) 羅盤方位法：

以文字描述方位。如：四方位的東、西、南、北，八方位的西北、西南等，十六方位的北北西、東北東等。

(2) 象限角法：

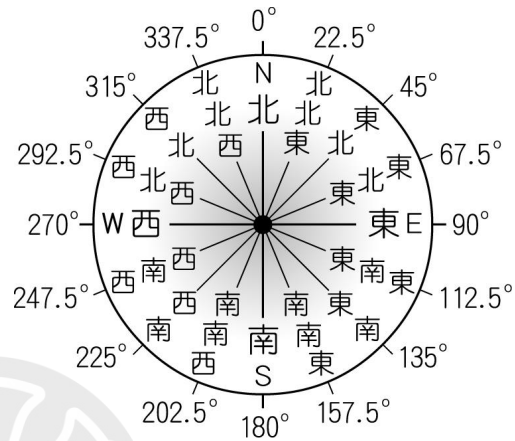
以正北方或正南方開始，往東或往西量測目標物與正北、正南間的夾角。角度的前方要註明 N 或 S 開始，角度的後方也要註明是往 E 或往 W，且角度介於  $0^\circ$  到  $90^\circ$  之間。

例如：東北方即為  $N 45^\circ E$ 。

(3) 方位角法：

由正北方開始，順時針量測目標物與正北之間的夾角，用一個介於  $0^\circ$  到  $360^\circ$  的角度來標示目標物的方位。

例如：西南方即為方位角  $225^\circ$ 。



圖（一）

根據以上資訊，試回答下列問題。

1. （多選題）在坐標平面上，定義  $y$  軸的正方向為正北方，且  $x$  軸的正方向為正東方。有一間學校位於原點  $(0,0)$ ，若有一間便利商店位於距離學校 8 單位，且方位角為  $202.5^\circ$  的位置，則此便利商店的坐標可表示為下列哪些選項？

- (1)  $[8, 202.5^\circ]$
- (2)  $[8, 247.5^\circ]$
- (3)  $(-8 \cos 22.5^\circ, -8 \sin 22.5^\circ)$
- (4)  $(-8 \cos 67.5^\circ, -8 \sin 67.5^\circ)$
- (5)  $(8 \sin 202.5^\circ, 8 \cos 202.5^\circ)$

2. 有一艘漁船位於海平面上，船上的雷達偵測顯示出距離漁船 10 公里處，且  $S 60^\circ E$  的位置為暗礁海域。此時在漁船的西南方  $16\sqrt{2}$  公里處，有一艘時速 300

公里的快艇正朝此暗礁海域行駛，試問為了避免快艇會撞上暗礁，漁船必須在幾分鐘內通知快艇的駕駛？（四捨五入取至整數位， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）

〔答案〕 1. (2)(4)(5) 2. 5分鐘

〔解答〕

1. 方位角  $202.5^\circ$ ，其對應的廣義角為  $247.5^\circ$ ，則便利商店的極坐標為  $[8, 247.5^\circ]$ ，

轉換為直角坐標則為  $(8 \cos 247.5^\circ, 8 \sin 247.5^\circ)$ ，利用廣義角換算可得

$$\begin{aligned} (8 \cos 247.5^\circ, 8 \sin 247.5^\circ) &= (8 \cos(180^\circ + 67.5^\circ), 8 \sin(180^\circ + 67.5^\circ)) \\ &= (-8 \cos 67.5^\circ, -8 \sin 67.5^\circ) \end{aligned}$$

(1)  $\times$ ：極坐標為  $[8, 247.5^\circ]$ 。

(2)  $\circ$ 。

(3)  $\times$ ： $(-8 \cos 67.5^\circ, -8 \sin 67.5^\circ)$ 。

(4)  $\circ$ 。

(5)  $\circ$ ： $(8 \sin 202.5^\circ, 8 \cos 202.5^\circ) = (8 \sin(180^\circ + 22.5^\circ), 8 \cos(180^\circ + 22.5^\circ))$

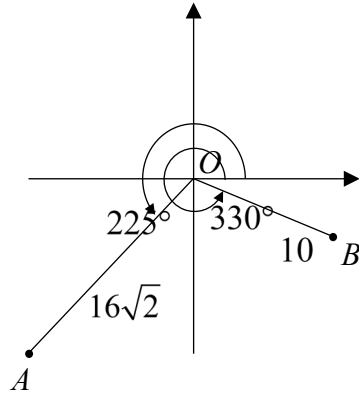
$$= (-8 \sin 22.5^\circ, -8 \cos 22.5^\circ)$$

$$= (-8 \sin(90^\circ - 67.5^\circ), -8 \cos(90^\circ - 67.5^\circ))$$

$$= (-8 \cos 67.5^\circ, -8 \sin 67.5^\circ)。$$

故選(2)(4)(5)。

2. 設漁船位於原點  $O(0,0)$ ，快艇位於點  $A$ ，暗礁海域位於點  $B$ ，如下圖所示。



由廣義角與極坐標的定義可知

$A$  點的極坐標為  $[16\sqrt{2}, 225^\circ]$ ， $B$  點的極坐標為  $[10, 330^\circ]$ ，

則可算出  $A$ 、 $B$  兩點的直角坐標為

$$A(16\sqrt{2} \cos 225^\circ, 16\sqrt{2} \sin 225^\circ) = \left( 16\sqrt{2} \times \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), 16\sqrt{2} \times \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\ = (-16, -16)$$

$$B(10 \cos 330^\circ, 10 \sin 330^\circ) = \left( 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}, 10 \times \left( -\frac{1}{2} \right) \right) = (5\sqrt{3}, -5)$$

再計算  $A$  與  $B$  的距離

$$\overline{AB} = \sqrt{(-16 - 5\sqrt{3})^2 + (-16 - (-5))^2} = \sqrt{256 + 160\sqrt{3} + 75 + 121} \\ = \sqrt{452 + 160\sqrt{3}} \approx \sqrt{452 + 160 \times 1.732} = \sqrt{729.12} \approx 27$$

又因為快艇的時速為 300 公里，即每分鐘的速度為 5 公里，由距離除以時間可得

$$27 \div 5 = 5.4 \approx 5,$$

則漁船必須在 5 分鐘內通知快艇的駕駛。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.40
題幹敘述合理（1分－5分）	4.60
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.60
此題的難易度（1分－5分）	4.20

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	10.00
第2題	23.33

綜合以上：

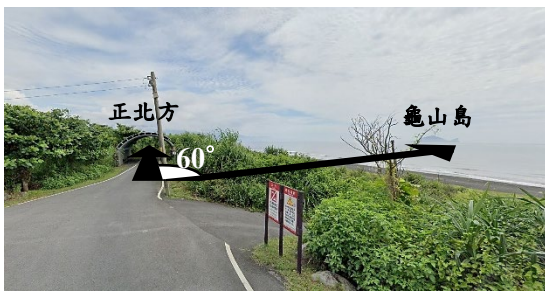
難易程度	<input checked="" type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第11單元 廣義角三角比與極坐標		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input checked="" type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：在地理學上用方位角表示方位時，與三角比中的廣義角定義不同，故學生在地理上用方位角判別位置時，需特別注意角度的轉換。

## 試題20：宜蘭濱海自行車道

第二冊 第12單元 三角比的性質

某生利用假日前往宜蘭濱海體驗單車之旅，他在行進的路途中，視線的正前方一直可以看到遠方的龜山島。他在經過過嶺村時記錄了第一張照片，如圖（一）所示，此時他量測龜山島位於其北 $60^\circ$ 東的方向。接著，他又以時速20公里的速率筆直向北騎了15分鐘到達大福村，此時他又記錄了第二張照片，如圖（二）所示，這時龜山島位於其北 $75^\circ$ 東的方向。



圖（一）位於過嶺村



圖（二）位於大福村

根據以上資訊，試回答下列問題。

1. (多選題) 下列敘述哪些是正確的？ $(\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$

- (1) 過嶺村與大福村的距離為5公里。
- (2) 在地圖上，若將過嶺村、大福村與龜山島三地兩兩相連，則會形成一個銳角三角形。
- (3) 從龜山島望向過嶺村與大福村兩地間的水平視角為 $15^\circ$ 。
- (4) 大福村與龜山島的距離為 $\frac{5\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{2}$ 公里。
- (5) 過嶺村與龜山島的距離為 $10+5\sqrt{3}$ 公里。

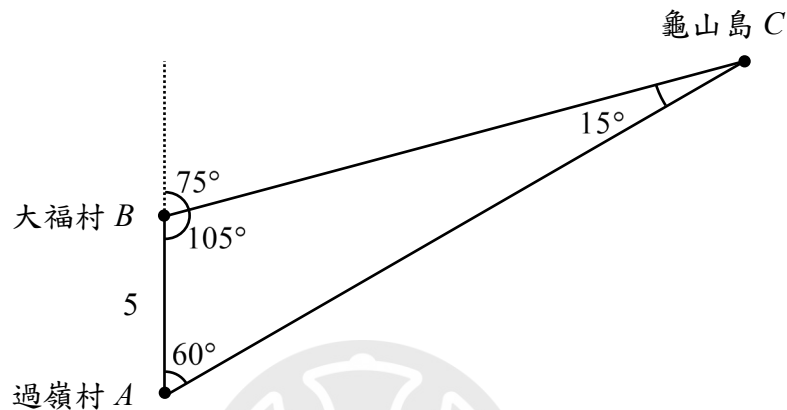
2. 若該生從大福村以時速20公里的速率筆直向北繼續騎乘，則當龜山島在他的正東方時，騎乘時間經過了多少分鐘？（四捨五入取至整數位， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）

〔答案〕 1. (1)(3)(5) 2. 13 分鐘

〔解答〕

1. (1) ○：過嶺村與大福村的南北距離為  $20 \times \frac{15}{60} = 5$  公里。

(2) ×：令過嶺村為點  $A$ 、大福村為點  $B$ 、龜山島為點  $C$ ，將三點相對位置標示如下圖所示：



可知所圍成的  $\triangle ABC$  為鈍角三角形。

(3) ○：由上圖可知，從龜山島 ( $C$ ) 望向過嶺村 ( $A$ ) 與大福村 ( $B$ ) 兩地間的水平視角為  $\angle ACB = 15^\circ$ 。

(4) ×：由正弦定理知

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sin 15^\circ}$$

可推得大福村與龜山島的距離為

$$\overline{BC} = \frac{5}{\sin 15^\circ} \times \sin 60^\circ = 5 \times \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{2} + 5\sqrt{6}}{2}$$

公里。

(5) ○：由正弦定理知

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 105^\circ} = \frac{5}{\sin 15^\circ}$$

可推得過嶺村與龜山島的距離為

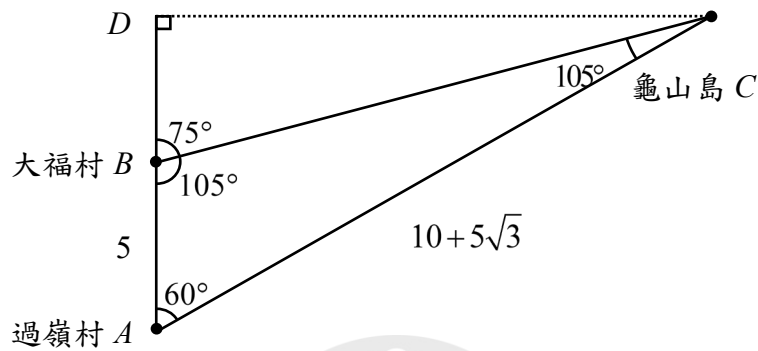
$$\overline{AC} = \frac{5}{\sin 15^\circ} \times \sin 105^\circ = 5 \times \frac{1}{\sin 15^\circ} \times \cos 15^\circ = 5 \times \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$= 5 \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{5(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{4} = \frac{5(8 + 4\sqrt{3})}{4} = 10 + 5\sqrt{3} \text{ 公$$

里。

故答案應選 (1)(3)(5)。

2. 設該生到達  $D$  點時，龜山島會在該生的正東方，如下圖所示。



則該生需再騎乘的距離為

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= \overline{AD} - \overline{AB} = \overline{AC} \cos 60^\circ - \overline{AB} \\ &= (10 + 5\sqrt{3}) \times \frac{1}{2} - 5 \\ &= \frac{10 + 5\sqrt{3}}{2} - 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ 公里。} \end{aligned}$$

換算時間（分鐘）為

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} \div \frac{20}{60} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{60}{20} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx \frac{15 \times 1.732}{2} = 12.99 \approx 13 \text{ 分鐘。}$$

故該生騎乘 13 分鐘後，龜山島會在他的正東方。

教師評定：

評定項目	平均分數
此題素養指標（1分－5分）	4.40
題幹敘述合理（1分－5分）	4.40
小題鋪陳安排（1分－5分）	4.40
此題的難易度（1分－5分）	3.40

學生施測：

小題	得分率(%)
第1題	53.33
第2題	36.67

綜合以上：

難易程度	<input type="checkbox"/> 難 <input checked="" type="checkbox"/> 中 <input type="checkbox"/> 易	素養指標	★★★★★
章節內容	第二冊 第12單元 三角比的性質		
整合運用	<input checked="" type="checkbox"/> 閱讀理解 <input checked="" type="checkbox"/> 邏輯推論 <input type="checkbox"/> 圖表判讀 <input type="checkbox"/> 批判思考 <input type="checkbox"/> 解釋辨析 <input type="checkbox"/> 資料應用		

出題想法：此題為研究者在來往宜蘭與台北的路上看到龜山島時想到的，由於無法直接量測龜山島與本島的直線距離，所以需使用三角測量的概念來推算與本島的距離，此題用意在於讓學生能利用時速推估南北距離，再利用視角的角度差來估算龜山到與自身的距離。

## 第肆章 總結與建議

本章共分兩節：總結、建議。

### 第一節 總結

本節主要在探討開發數學素養試題的結論。由於 108 課綱，素養試題的重要性開始被正視，並開始在會考及學測中被拿來當作命題的方式，了解素養導向試題，以及能開發出適切的素養導向試題成為現職教育者必須有的能力。

開發出的試題要符合課綱的範圍與精神，配合所使用的教材內容與每個章節的教學目標，試題內容應該要涵蓋到章節內的重要觀念。而在開發素養導向試題前，除了熟知課綱內容以外，也須知悉各版本的課本與講義，以及市面上的參考書與補習班講義也會有常見的類似題，開發試題時，應避免與已有的題目重複，才能保證題目的創新性。

而在開發試題時應要注意出題的小細節，包括題目敘述的正確性、情境的合理性，以及難易度是否符合應試學生的程度。

對於自身素養導向試題之開發的成果，研究者認為，試題與現行大考素養試題密切有一定的相符程度，雖然可能尚未達到目前大考素養試題的水平，但仍有一定的水平，對於正在準備大考的學生練習素養試題而言，也應有良好的效果。

### 第二節 建議

數學素養導向的出題形式是國家的升學考試的新面向，在過去的出題上，往往只在虛擬假設的條件下出題，或是命題的情境與現實不相符，現行課綱在推行素養導性試題上強調題目情境與現實生活經驗需連結，並希望學生能從所學應用在生活上。

而在開發素養導向的試題上，時常遇到的困難有以下幾點：

1. 出題者在以往出題的經驗不足，題目的敘述、選項的設計以及試題的提問不適等。
2. 出題者本身接觸的領域以及不同的生活經驗較少。
3. 出題者本身未能將生活經驗與學科知識做連結。
4. 現實生活中的問題常常不是只有單一數學知識就可以解決。
5. 現實生活中的實際數值常常並不方便學生計算。
6. 出題者敘述真實情境的能力不足，例如語意不清或是題幹提到太多不相關的資訊。
7. 除了各界對數學素養的定義不一致，還有出題者本身鑑定素養試題的能力不足，未必能區分真素養題與偽素養題，以至於會命出素養指標不高的素養試題。

關於以上幾點困難，研究者以自身開發素養試題的心路歷程給欲開發素養試題的教育者以下幾點建議：

1. 出題者除了須累積出題的經驗以外，也需熟知教科書及大考試題的題目敘述方式，來增進自身出題的基本能力，以避免學生有看不懂題目之情形。
2. 出題者平時應多閱讀科普書籍，或是用網路影片及新聞廣泛接觸科學新知，進而增加自身對於題目的取材來源。
3. 時不時觀察生活中的現象與數學的關係，並加以思考其中數學內容是否符合中學生所學的數學知識，以作為出題的來源。
4. 出題者須完全釐清欲取材的生活問題，了解其涉及到的各個知識點，考量難易度及複雜程度，斟酌出題。若問題內容過於複雜，則不建議呈現在素

養試題中；若問題內容稍難，可從中加以簡化，將超出所學範圍的知識內容在題幹中明確列出，讓答題者能順利作答。

5. 出題者應對現實生活的數值加以簡化，但仍注意簡化後的數據不能與實際數值有太大落差，以及儀器量測生活中的數據時，甚少會有根號、分數等形式，出題者在命題時應將其一併考量，才能符合真實情境。
6. 現實生活問題往往較一般教科書所列的問題複雜，建議出題者在出題前，應多參考教科書與科普書對於生活問題的敘述方式，再將生活問題深入淺出呈現於題幹敘述，最後將命題成果與幾位同科教師或專家學者討論及詢問題幹敘述是否清楚表達所問之問題。
7. 建議出題者要先看過大量的素養試題，也與同科教師討論各市面上素養試題的優劣，較能區分素養試題的好壞，以作為日後素養試題出題之參考。



## 參考文獻

### 一、中文部分

大考入學考試中心(2019)。大學入學考試素養導向命題簡介。取自：大學入學考試

<https://www.ceec.edu.tw/xmdoc/cont?xsmsid=0J177009711460336585&sid=0J254619650314603833>

林永豐(2018)。延續或斷裂？從能力到素養的課程改革意涵。《課程研究》，13(2)。

國家教育研究院(2020)。十二年國民基本教育課程綱要-國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域課程手冊。

教育部國民及學前教育署。(2018年6月)。12年國教 / 課程綱要-108課綱重點。取

自：108課綱資訊網 | 十二年國民基本教育

<https://12basic.edu.tw/12about-3-1.php>

許志農(2014)。數學素養評量試題工作坊。取自：非想非非想數學網

<http://pisa.math.ntnu.edu.tw/math-history/2013-10-07-02-34-10/2014-01-13-02-14-39/984-sulianggongzuofang>

陳億穎 & 徐蔚萱。(2016)。從新加坡數學課程綱要反思臺灣數學教學設計。《臺灣教育評論月刊》，5(9)，頁 94-100。

劉柏宏(2016)。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵——理論與案例分析。

《臺灣數學教育期刊》，3(1)。

劉祥通、周立勳 & 黃國勳(2008年12月)。從鄔瑞香老師的數學教學前瞻開放式教

學。《科學教育月刊》(315)。

## 二、外文部分

Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., & council, N. r. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (Vol. 2101): Citeseer.

Niss, M. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project*. Paper presented at the 3rd Mediterranean conference on mathematical education.

PISA 國際學生能力評量計畫. (無日期). 評量架構. 擷取自 臺灣 PISA 國家研究中心及國際學生能力評量計畫: <https://pisa.irels.ntnu.edu.tw/project.html>

Pugalee, D. K. (1999). *Constructing a model of mathematical literacy*. The Clearing House, 73(1),19-22. doi: 10.1080/00098659909599632

Rychen, D. S., & Salganik, L. H. (2001). *Defining and selecting key competencies*. Hogrefe & Huber.

Steen, L. A. (Ed.). (2001). *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy*. New Jersey: The Woodrow Wilson National Fellowship Foundation.