摘 要

本研究旨在探討範例融入方式及數學自我效能，對國小學生等值分數彈性思考表現和數學學習態度之影響。研究對象為台北市某國小五年級學生，共 100 位。研究設計採因子設計之準實驗研究法，自變項包含範例融入方式和數學自我效能，範例融入方式分為「連續型範例一般教學」、「連續型範例資訊技融入教學」、「整合型範例資訊科技融入教學」三種方式，數學自我效能依據數學自我效能量表總得分，將學習者分為高、低數學自我效能兩組，參與者分別於教學實驗前後接受測量。依變相為「等值分數彈性思考表現」及「數學學習態度」，等值分數彈性思考表現包括(1)基本彈性思考：基本補畫能力、分割能力；(2)進階彈性思考：進階補畫能力、組合能力、運作思考能力、單位形成能力，數學學習態度為學習興趣、學習動機、數學焦慮三個面向。

研究結果發現：(1)運用整合型範例資訊科技融入教學，能促進學習者等值分數彈性思考；(2)運用虛擬教具於數學教學中，可提升學習者的學習興趣；(3)高數學自我效能學習者透過不同範例融入方式學習等值分數，均有較好的等值分數彈性思考表現及學習態度。本研究結果與建議可供國小數學科教學與未來相關研究參考。

關鍵詞：等值分數、彈性思考、資訊科技融入教學、虛擬教具、數學自我效能

ABSTRACT

The purpose of this study was to investigate the effect of type of example and mathematics self-efficacy on the five graders' flexible thinking ability and mathematical attitudes. The participants in this study were 100 fifth graders from three classes of an elementary school in Taipei, Taiwan. The quasi-experimental design with factorial design was employed in the study. The independent variables were methods of example integrated into instruction and self-efficacy toward mathematics. The methods of example integrated into instruction include general instruction of continuous example, continuous example integrated into instruction with technology, and mixed example integrated into instruction with technology. Learners were categorized into two groups, which were high self-efficacy toward mathematics and low self-efficacy toward mathematics based on the scores measured by a self-efficacy scale on mathematics. The dependent variables were flexible thinking ability on equivalent fractions and mathematical attitudes. The flexible thinking ability include (a) basic flexible thinking: basic drawing ability and division ability, (b) advanced flexible thinking: advanced drawing ability, assembly ability, operative thinking ability and unitize ability.

The results showed that (a) the application of mixed example integrated into instruction with technology promoted the flexible thinking ability on equivalent fractions, (b) the application of virtual manipulative on the mathematics teaching promoted the students' learning interest, and (c) the higher mathematical self-efficacy, the better flexible thinking ability on equivalent fractions and mathematical attitudes.

Keywords: equivalent fractions, flexible thinking, integrate technology into instruction, virtual manipulative, mathematics self-efficacy

致 謝

兩年的時間過得真快，從懵懂無知的碩一新生，到現在已順利完成論文研究，轉眼間我們已即將畢業，很榮幸我可以進入 CSL LAB 這個溫暖的大家庭，讓我碩士生涯可以過得多采多姿，一路走來要感謝許多人，有你們的幫忙我才可以順利畢業。

首先，要感謝我的指導教授—陳明溥老師，平時 meeting 報告的訓練、研討會和期刊論文的撰寫，奠定了寫論文的基礎。論文研究的過程中，老師一步一步細心的指導我們，從一開始研究架構的敲定，到最後論文撰寫的定稿，老師花了需多時間指導我們的論文，雖然老師的要求很嚴格，做研究的過程也是非常艱辛，但是最後可以順利畢業，再多的辛苦都是值得的。接著，要感謝我的論文口試委員—高震峰、游光昭教授，在百忙之中撥空審查學生的論文，並且給予我許多建議與指導，使得學生的論文可以更完善。在此要特別感謝袁媛老師，感謝您提供我研究方面的資源，以及為我解答研究上的困惑，學生才能順利畢業。

再來，要感謝實驗室的伙伴們，特別是俊儀學長、婉怡學姐、與瑋芷，提供許多想法供我參考，有任何研究上的問題你們都不吝惜的為我解答，常常給予我研究上的建議，非常謝謝你們。再來要感謝和我一起努力的伙伴們—秀如、育亭、惠嵐、韻芳、陳明，在學習的過程中大家互相切磋、互相幫忙、互相討論、互相提醒，最後才得以順利的畢業。最後，要感謝 LAB 的學妹們—貴徽、瑋芷、如詩，謝謝你們在我們最忙碌的時刻，為我們處理許多大大小小的事物，並且幫忙我們校稿論文。

最後謹將此論文獻給我最摯愛的家人，感謝你們這兩年來在心理及實際層面上支持我念書，給我最好的讀書環境，讓我心無旁騖的完成論文。這兩年除了學到如何做研究之外，還增廣了我的視野，未來還有許多事物要學習，謝謝大家的支持與幫忙，我會繼續努力的。

目 錄

附表目錄 VI

附圖目錄 VIII

第一章　緒論 1

第一節　研究背景與動機 1

第二節　研究目的與待答問題 5

第三節　研究範圍與限制 6

第四節　名詞解釋 8

第二章　文獻探討 11

第一節　等值分數 11

第二節　資訊科技融入教學 30

第三節　自我效能與數學自我效能 40

第四節　歸納與結論 45

第三章　研究方法 47

第一節　研究對象 47

第二節　研究設計 49

第三節　研究工具 51

第四節　實驗程序 68

第五節　資料分析 71

第四章 結果與討論 74

第一節　等值分數彈性思考表現分析 74

第二節　數學學習態度分析 92

第五章　結論與建議 100

第一節　結論 100

第二節　建議 103

參考文獻 106
附錄一　數學自我效能量表 115
附錄二　數學學習態度問卷 116
附錄三　等值分數成就測驗卷 117

附表目錄

表 2-1 等值分數彈性思考歸納 46
表 3-1 教學實驗之分組及各組人數分配表 48
表 3-2 數學自我效能預試量表向度、題數分配及內部一致性 52
表 3-3 數學自我效能正式量表向度、題數分配及內部一致性 52
表 3-4 等值分數單元之教學目標 52
表 3-5 等值分數單元之教學程序 53
表 3-6 等值分數成就測驗試題內容分析 64
表 3-7 等值分數成就測驗題目類型、題數分配及內部一致性 65
表 3-8 等值分數成就測驗試題難度與鑑別度摘要 65
表 3-9 數學學習態度預試問卷向度、題數分配及內部一致性 66
表 3-10 數學學習態度正式問卷向度、題數分配及內部一致性 67
表 4-1 各組在等值分數基本彈性思考整體之調整平均數、標準差及人數 75
表 4-2 各組在等值分數基本彈性思考中各能力分項之調整平均數、標準差及人數 76
表 4-3 等值分數基本彈性思考之多變量整體效果考驗摘要分析 77
表 4-4 等值分數基本彈性思考表現之共變數摘要分析 78
表 4-5 各組在等值分數進階彈性思考整體之調整平均數、標準差及人數 80
表 4-6 各組在等值分數進階彈性思考中各能力分項之調整平均數、標準差及人數 81
表 4-7 等值分數進階彈性思考之多變量整體效果考驗摘要分析 82
表 4-8 等值分數進階彈性思考表現之共變數摘要分析 85
表 4-9 等值分數彈性思考表現摘要表 87
表 4-10 各組在數學學習態度之調整平均數、標準差及人數 93

表 4-11 數學學習態度之多變量整體效果考驗摘要分析 94

表 4-12 數學學習態度之共變數摘要分析 96

表 4-13 數學學習態度分析摘要表 97

附圖目錄

圖 2-1　分數的面積模式 13
圖 2-2　分數的長度模式 14
圖 2-3　分數的群組模式 14
圖 2-4　等值分數的面積模式 15
圖 2-5　等值分數的長度模式 15
圖 2-6　等值分數的群組模式 16
圖 2-7　不等分的分數板 18
圖 2-8　等值分數彈性思考能力說明(1) 19
圖 2-9　等值分數彈性思考能力說明(2) 19
圖 2-10　等值分數彈性思考能力說明(3) 20
圖 2-11　等值分數彈性思考能力說明(4) 20
圖 2-12　等值分數運作思考能力說明(1) 23
圖 2-13 「4×3」乘法性關係概念圖 24
圖 2-14 「等值分數」乘法性關係概念圖 24
圖 2-15　等值分數運作思考能力說明(2) 25
圖 2-16　等值分數單位形成能力說明(1) 25
圖 2-17　等值分數單位形成能力說明(2) 26
圖 2-18　等值分數單位形成能力說明(3) 26
圖 2-19　圖形幾何釘板 34
圖 2-20　虛擬白板同時呈現圖形及符號 35
圖 3-1　研究架構圖 49
圖 3-2　分數棒 54
圖 3-3　長度模式之連續型等值分數範例 55

圖 3-4　面積模式之連續型等值分數範例 56
圖 3-5　群組模式之連續型等值分數範例 57
圖 3-6　長度模式之整合型等值分數範例 58
圖 3-7　面積模式之整合型等值分數範例 59
圖 3-8　群組模式之整合型等值分數範例 60
圖 3-9　等值分數單元之教學流程 62
圖 3-10　研究流程圖 68
圖 3-11　等值分數彈性思考表現分析流程圖 72
圖 3-12　數學學習態度分析流程圖 73

第一章　緒論

分數是數學中重要的概念之一，分數的學習對於國小學生是一相當難的課題，假如分數概念無法正確建立，將無法進行其他相關概念的學習。學生具備基本的分數概念後，必須先了解分數的等值意義，才能進一步發展有理數概念，但國小學生之等值分數概念相當薄弱，且學習成效不彰。資訊科技的發展創造出一個優質的教學環境，可以利用資訊科技的特性有效達成教學目標，把資訊科技當作心智學習的工具，使學生能從事有意義的學習活動。另外，數學自我效能也會影響學習者的學習成效及學習態度。本章分別就本研究的研究動機與背景、研究目的與待答問題、研究範圍與限制、及名詞釋義四個部份進行說明。

第一節　研究背景與動機

分數象徵兒童知識重大的擴展，當學生對分數概念十分理解時，便能運用這些知識去解決涉及測量、機率和統計等問題，開闊兒童對數的功用，也擴大了兒童數系的知識(NCTM, 2000)。劉秋木(2002)也曾指出：「在國小階段，分數是最高的概念，是國小數學的頂石，但也是往後學習的基石，分數有如基礎數學與高深數學間的分水嶺。」分析國內小學數學科教材可以發現，分數概念不但是數學中重要的概念，在國小數學教材中亦占有相當的份量，而且分數概念與小數、百分率、比、除法等概念關係密切(教育部, 2004)。分數的重要性可以從幾個不同的層面觀之(楊瑞智, 2000)：(1)從實際層面來看，有效地處理分數概念，可廣泛增進了解與掌握真實世界的問題之能力；(2)從心理層面來看，分數提供豐富的領域發展、學童智力、及擴展心智結構；(3)從數學層面來看，分數的了解提供爾後學習小數、比、機率及基本代數運算等基礎。由此可知，分數概念的發展是未來學習許多概念和技能的基礎和關鍵。

分數的學習對於國小學生是相當難的課題，因為分數概念是學習者第一次學習有關兩個量的相對比較關係，包含了許多分數意義，而且在不同分數意義情境

下也有非常多的變化(Behr, Wachsmuth, & Post, 1985)。分數概念有許多不同的使用情境及解釋，不同的解釋所使用的認知結構也有所不同，是一個複雜且重要的數學概念，學生需要漫長的時間來發展分數概念，學習的過程相當艱苦，若學生的分數概念無法正確建立，將無法進行其他相關概念的學習(呂玉琴, 1991a; 林碧珍, 1990; 洪素敏、楊德清, 2002; 湯錦雲, 2002; 詹志禹, 1997; 劉秋木, 2002)。由於學校的分數教材太強調程序性技能與計算的演算法，不但無法幫助學生了解數學與發展數學意義，甚至可能導致學習成效低落(Behr, Lesh, Post, ＆ Silver, 1983; Bishop, 1989)。我國國小學生學習分數概念之困難為對分數概念無法理解；分數的符號與分數的意義疏離；只會機械式的記憶分數規則來解題而不了解算則的意義等(呂玉琴, 1991a; 林福來、黃敏晃、呂玉琴, 1996; 陳靜姿, 1997; 黃馨緯, 1995; 楊壬孝, 1988)。美國的全國教育發展評估(The National Assessment of Educational Progress，簡稱 NAEP) 指出學生分數的成就低且概念也不完備，例如：不了解分數的意義、對分數缺乏數感(number sense)、不知分數是數、不知分數有大小之別、以機械式的記憶規則來完成計算、對於分數的操作、數感等認知也都有相當困難(Columba, 1989; Post, 1988)。縱使學生在計算方面的技巧非常熟練，卻往往不理解分數的真正意義，對分數概念學習有諸多困難(呂玉琴, 1998a; 林碧珍, 1990; 游自達, 1993; Behr, Wachsmuth, & Post, 1985; Hunting, 1983; Saenz-Ludlow, 1994)。

在分數的學習中，等值的概念扮演著重要的地位。學生具備基本的分數概念後，必須先了解分數的等值意義，才能進一步發展有理數概念，而且在比較兩個分數的次序關係時，必須考慮分數的等價關係，等值分數概念是異分母分數加減法、分數除法、及分數的四則運算的基礎。此外，等值分數也和許多重要的數學概念有密切的關聯性，如比、比例、機率、小數、百分率等，這些概念均是學習基礎科學知識所必須要學會的。82 年版部編本國小數學教材亦主張引入等值分數的活動，以作為發展有理數概念的基礎，提供學生學習等值分數概念的經驗，可進一步成為學生解決異分母分數合成、分解問題的基礎(呂玉琴, 1998b)。雖然等值分數概念只佔國小分數課程中的一個單元，但若能成功的學習等值分數概念，

可促進分數其它子概念之學習，更是日後基本代數運算的基礎，由此可見，等值分數概念在國小數學中的重要性。

等值分數是分數子概念中最困難的子概念，其困難處在於學生的思考必須更為彈性、更能勇於從具體操作進入形式運思來解決問題。國小學生的等值分數概念相當薄弱(Booth, 1987)，我國國小學生也有此問題，許多學生即使接受過等值分數的教學，仍然不認為二分之一等於四分之二(呂玉琴, 1991b)，分數概念殘缺不全或思考過於僵化時，皆無法正確解決等值分數問題(彭海燕, 1998)。影響學習者學習等值分數概念主要的因素有五點，分別為(1)等分概念；(2)彈性思考能力；(3)組合能力；(4)單位形成能力；(5)運作思考能力(呂玉琴, 1991a; 呂玉琴, 1991b; 呂玉琴, 1994; 林碧珍,1990; 彭海燕, 1998; Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Behr & Post, 1992; Booth, 1987; Kamii & Clark, 1995; Parrat-Dayan & Vonbche, 1992; Saenz-Ludlow, 1994, 1995)。演練範例有助於問題的解決，提供適當的演練範例可幫助學習者概念的形成，等值分數學習成效不彰的原因為學習者彈性思考能力不足，彈性思考能力為數學能力之一，提升學習者等值分數彈性思考能力即是數學能力的提升教學中，若提供可促進彈性思考的演練範例，可增進學習者的彈性思考。

國小階段的學生多處於具體運思階段，必須透過實際操作才能形成行動與形象表徵，具體物操作可以形成動作表徵與形象表徵，使所學得的知識有更多的聯結增加記憶。國小數學教學借重教具之處甚多，就是希望透過教具的操作形成正確的知識表徵，教具最重要的功能在提供學生具體與抽象思維之轉換，這種轉換可幫助兒童經由表徵形式增進抽象思考的發展。操弄教具可幫助數學概念之學習，但學習等值分數概念時，必需將物品進行不同等分的切割，實體教具很難讓學習者任意地分割物品(賴阿福, 2004)。

由於資訊科技的蓬勃發展，若能善用電腦多媒體特性，將資訊科技視為學習工具，並在教學活動中運用資訊科技，可以有效達成教學目標，使學生能從事有意義的學習活動(王世全, 2000; 何榮桂, 2002; 徐新逸、吳佩謹, 2002; 邱瓊慧,

2002; Dias, 1999)。透過資訊科技的特性，在學習等值分數概念時可將物品進行不同等分的分割，電腦多媒體具有互動的特性，並提供學習者半具體物之操作，將不易體驗之知識以影像或動畫呈現，抽象概念予以具體化、視覺化，使學童有充足地操作機會，以經驗其中的數學概念，可有效地具體呈現學習內容，幫助學童理解(賴阿福, 2004)。虛擬教具是一種放在網站上具互動特性的動態物件，和實體教具非常相似，並且加上有助於學習的特徵，幫助學習者建構數學知識(Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002; Moyer, Niezgoda, & Stanley, 2005)。虛擬教具具有可變性，學習者可針對某一物件的某一部分塗顏色，或是增加或減少某一物件的數量(Yuan, 2005)，動態、顏色、圖解、互動的特性可以持續讓學習者保持注意力(Reimer & Moyer, 2005; Suh, Moyer, & Heo, 2005; Steen, Brooks, & Lyon, 2006)。

等值分數概念對國小學生來說是較困難的學習內容，自我效能的高低會影響學習的表現。學習者的自我效能高低會影響嘗試解決任務時的動機、願意付出努力的程度、當面臨困難時堅毅的程度、以及面對失敗挫折的反應方式，在學習的過程中會持續影響學習者的表現(Bandura, 1986; Schunk, 2000; Zimmerman, 2000)，在數學學習中亦是如此，當學習者的數學自我效能較高時，會有較高的數學自信，數學作業的表現也會較好，並有較低的數學焦慮，因此會有較佳的學業表現(陳玉玲, 1995; 魏麗敏, 1996; Hackett & Betz, 1989; Schunk, 2000)。因此，數學自我效能的高低對學習成就及學習態度之影響是值得探討的議題。

綜合上述，教學中若提供適當的範例可促進學習者對概念的了解，在等值分數概念學習的過程中，必需將物品進行不同等分的切割，實體教具很難讓學習者任意地分割物品，導致學習者等值分數彈性思考能力不足，虛擬教具具有可變、互動的特性，並且將抽象概念視覺化、具體化，可以彌補實體教具的不足，數學自我效能的高低也會影響學習表現與學習態度。本研究期能藉由不同的範例融入方式進行等值分數教學，以提升學習者的等值分數彈性思考表現，並探討數學自我效能與範例融入方式是否有交互作用，以及高、低數學自我效能者接受不同範例融入方式之教學後，對等值分數彈性思考能力表現及數學學習態度之影響。

第二節　研究目的與待答問題

本研究旨在探討不同的範例融入方式(連續型範例一般教學 v.s 連續型範例資訊科技融入教學 v.s 整合型範例資訊科技融入教學)及數學自我效能(高數學自我效能 v.s 低數學自我效能)，對國小學生學習等值分數彈性思考表現與數學學習態度之影響，未來以提供國小數學教師等值分數概念教學之參考。希望透過可促進學習者彈性思考之演練範例及虛擬教具增進學習者對等值分數內容的理解。本研究主要目的如下：

一、探討不同的範例融入方式之教學對高、低數學自我效能學習者，在「等值分數彈性思考」上表現之情形。

二、探討不同的範例融入方式之教學對高、低數學自我效能學習者，在「數學學習態度」上表現之情形。

針對以上研究目的，提出下列待答問題：

一、在學習等值分數時，不同的範例融入方式(連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、整合型範例資訊科技融入教學)與數學自我效能(高數學自我效能、低數學自我效能)是否對學習者基本彈性思考表現(基本補畫能力、分割能力)產生不同的影響？

二、在學習等值分數時，不同的範例融入方式(連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、整合型範例資訊科技融入教學)與數學自我效能(高數學自我效能、低數學自我效能)是否對學習者進階彈性思考表現(進階補畫能力、組合能力、運作思考能力、單位形成能力)產生不同的影響？

三、在學習等值分數時，不同的範例融入方式(連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、整合型範例資訊科技融入教學)與數學自我效能(高數學自我效能、低數學自我效能)是否對學習者之數學學習態度(學習興趣、學習動機、數學焦慮)產生不同的影響？

第三節　研究範圍與限制

本研究為配合教學活動之設計與進行，在研究對象、教材內容及實驗設計有以下之研究範圍與限制：

一、教學環境

本教學研究進行之教學環境為原班級上課之普通教室(非電腦教室)，教室中提供投影機、投影幕、及一台電腦。為配合原班級課程安排，在五年級中隨機抽取三個班，隨機分派為「連續型範例一般教學組」、「連續型範例資訊科技融入教學組」、「整合型範例資訊科技融入教學組」。受限於教學環境的影響，教學老師為各班原本數學老師，資訊科技融入教學組均是將虛擬教具投影至布幕上的方式進行教學，學習者有機會操作虛擬教具，各組學習者均搭配學習單進行學習。

二、研究對象

本研究以台北市某國小五年級三個班級學習者為研究對象，為配合受試者原課程之規劃與教學需要，以班級為單位分組進行教學實驗，各班教學者為該班級原來之數學老師。進行教學實驗前均已修習過等分概念、簡單分數概念、單位量概念等分數基本概念，但尚未學習等值分數，已具備學習等值分數先備知識，因此研究結果只能推論於類似研究對象。

三、教學時間

本教學實驗為配合原本學校所規劃之課程進度，實驗教學時間為兩節課，共 80 分鐘，各組學習者有相同的學習時間。

四、教學內容

本研究為等值分數單元之實驗教學，此單元課程內容除了等值分數概念之

外，還包括分數的約分、擴分概念，但本研究之教學內容與成就測驗未牽涉分數的約分、擴分概念，只與等值分數觀念有關。課程內容分為「等分概念」、「認識和 1 相等的分數」、「在整體 1 的具體情境中，找出真分數的等值分數」等三個教學重點，每個教學重點皆包含連續量與離散量情境之等值分數問題。

五、教學方法

本研究基於教學環境和學校教師授課方式為考量，教師以講述方式進行教學，並適當的引導學生思考，依據不同的教學實驗介入，採用不同的範例及教具。依據不同範例融入方式分為「連續型範例一般教學」、「連續型範例資訊科技融入教學」、及「整合型範例資訊科技融入教學」，連續型範例一般教學所提供之演練範例為連續型等值分數，並操作實體教具進行等值分數概念之教學；連續型範例資訊科技融入教學所提供之演練範例為連續型等值分數，並操作虛擬教具進行等值分數概念之教學；整合型範例資訊科技融入教學所提供之演練範例為整合型等值分數，並操作虛擬教具進行等值分數概念之教學。由於教學環境的限制，無法讓每位學習者均有電腦可以操作虛擬教具。

第四節　名詞解釋

一、虛擬教具

Moyer、Bolyard、和 Spikell (2002)定義虛擬教具(virtual manipulatives)為一個動態物體透過可互動、網路的虛擬圖像來呈現，是一種動態物件的具體表徵，讓學習者有機會建構數學知識。本研究之虛擬教具為將等值分數問題用圖形表徵的方式呈現，且像實體教具一樣具有操弄的功能，並具有可變性，可以改變物件的屬性，如顏色、數量、分割方式之功能。

二、範例融入方式

本研究依據不同範例分成「連續型範例」與「整合型範例」兩種。連續型範例即是連續型等值分數問題，在連續量情境下連續型範例指的是分數圖形塗色區塊皆是連續不分散的等值分數問題；在離散量情境下連續型範例指的是一群相同的物品中，進行重新分割或合併之等值分數問題。整合型範例指的是除了提供學習者連續型範例之外，還提供能促進彈性思考之範例，在連續量情境下整合型範例指的是分數圖形塗色區塊除了是連續不分散的範例之外，還有塗色區塊是不連續的等值分數問題；在離散量情境下整合型範例指的是兩種以上不同物品，需先進行重新排列並找出適當分割之等值分數問題。

又依據教學融入方式分成「一般教學」與「資訊科技融入教學」兩種，一般教學指的是教師講解等值分數概念時，輔以實體教具操作講解說明，並給予學生適當的操作機會以驗證其中之數學概念；資訊科技融入教學指的是教師講解等值分數概念時，輔以虛擬教具操作講解說明，並給予學生適當的操作機會以驗證其中之數學概念。因此，本研究將範例融入方式分為「連續型範例一般教學」、「連續型範例資訊科技融入教學」、「整合型範例資訊科技融入教學」三種。

三、數學自我效能

數學自我效能為在特定情境或問題中學習者認為自己可以成功的完成或解決某一特定任務的信心程度(Hackett & Betz, 1989)。本研究數學自我效能為學生對於自己數學能力的知覺，也就是說學生認為自己是否可以了解以及有效的執行數學學習活動的一種信念，分為主動嘗試、努力堅持、自我信心三個面向，「主動嘗試」指的是學習者面對新的數學學習活動，或較困難的數學任務時，主動學習之信心程度；「努力堅持」指的是學習者學習數學時，面臨挫折或對學習目標努力堅持學習之信心程度；「自我信心」指的是學習者學習數學時，對於完成任務之信心程度。各組數學自我效能量表所得總分前50%為高數學自我效能者，後50%為低數學自我效能者。

四、等值分數彈性思考表現

本研究以等值分數彈性思考表現作為等值分數概念學習成效之評定，依據學習者解決等值分數問題所運用彈性思考的程度，將等值分數彈性思考分為「基本彈性思考」及「進階彈性思考」兩種彈性思考表現，各種彈性思考所包含之能力分項茲分別說明如下：

1、等值分數之「基本彈性思考」表現

基本彈性思考是指學習者解決連續型等值分數問題之能力，解題的過程中運用較少彈性思考，包含「基本補畫能力」及「分割能力」兩個能力分項。「基本補畫能力」為學習者在連續量情境下，解決連續型等值分數問題之能力，即學習者是否有想像或忽視分割線之彈性思考能力；「分割能力」為學習者在離散量情境下，解決連續型等值分數問題之能力，即學習者將一群相同的物品，進行重新分割或合併理解等值分數之彈性思考能力。

2、等值分數之「進階彈性思考」表現

進階彈性思考是指學習者解決非連續型等值分數問題，解題時需要運用較多

的彈性思考，包括「進階補畫能力」、「組合能力」、「運作思考能力」、及「單位形成能力」四個能力分項。「進階補畫能力」為學習者在連續量情境下，解決非連續型等值分數問題之能力，即學習者是否能先將不連續的區塊集中在一起，並且有忽視或想像分割線之彈性思考能力;「組合能力」為學習者在離散量情境下，解決非連續型等值分數問題之能力，即學習者將兩種以上不同物品重新排列後，再重新分割或合併，呈現切割與拼湊之彈性思考能力;「運作思考能力」是指同一塊圖形上使用不同的分割方式，涉及部分整體的保留概念和乘法性思考兩個運作思考層面，即等積異形的情形下，學習者能夠不被視覺的影響，判斷兩個一樣圖形以不同的分割方式呈現，其分數為等值之能力;「單位形成能力」為學生將全部以適當的單位分畫後，再利用這個單位重組成全部或集合的可逆轉能力，能否在圖形中找到適當的單位，將指定的部分量畫之能力。

五、數學學習態度

本研究之數學學習態度是指學習者經由不同範例融入方式後在數學「學習興趣」、「學習動機」、及「數學焦慮」的看法。「學習興趣」是指透過不同的範例與教學融入方式是否可以引起學習者學習興趣，進而幫助學習;「學習動機」是指透過不同的範例與教學融入方式是否可以引起學習者學習動機，進而讓學習者持續投入學習活動;「數學焦慮」是指透過不同的範例與教學融入方式是否可以改善學習者學習數學時的焦慮程度。

六、先備知識

先備知識指的是學習者參與教學活動前，已具備的數學知識，本研究以學習者該學期教學實驗前的期中考數學成績作為先備知識之依據，分數愈高代表先備知識愈高，反之則愈低。

第二章　文獻探討

本研究以數學教學及資訊科技融入教學的觀點，探討範例融入方式與數學自我效能，對學習者等值分數彈性思考表現及數學學習態度之影響。本文首先析論等值分數的意義和等值分數學習上之困難，繼而探討資訊科技及數學自我效能對學習之影響，探究不同範例融入方式和數學自我效能對等值分數彈性思考表現及數學學習態度之影響。以下分別對等值分數、資訊科技融入教學、數學自我效能相關文獻進行歸納與整理，提供數學科領域教師規劃教學活動時，面對高、低數學自我效能之學習者如何設計適切的教學活動，以促進等值分數彈性思考及提升數學學習態度。

第一節　等值分數

學生具備基本的分數概念後，必須先了解分數的等值意義，才能進一步發展有理數概念，等值分數概念是五種分數子概念中最困難的子概念，其困難處在於學生的思考必須更為彈性、更能勇於從具體操作進入形式運思來解決問題。許多學生即使接受過等值分數的教學，仍然不認為二分之一等於四分之二(呂玉琴, 1991b)，可見學生等值分數概念相當薄弱，等值分數概念的學習上有困難(Booth, 1987)。在以下就等值分數的意義、等值分數教學策略、影響學習者學習等值分數概念之因素、及等值分數相關實徵研究分別進行探討。

一、等值分數的意義

由數學定義的觀點來看，等值分數為分數的不同名稱，在符號上形成一定的規則，即所謂的擴分或約分，由任意一個分數開始，將分子分母各乘以兩倍、各三倍，…就可以構成一系列的等值分數(數學學習心理學, 1995)。數學上則有下列公式代表等值分數的產生：若 a、b、K 代表任意自然數，則 $\frac{a}{b}=\frac{Ka}{Kb}$ 為分數的擴分，反之亦然，$\frac{Ka}{Kb}=\frac{a}{b}$ 為分數的約分，即是分子分母同乘零之外的數，或同除

零之外的數例如$\frac{2}{5}=\frac{2\times 2}{5\times 2}=\frac{4}{10}$(數學學習心理學, 1995; Vance,1992)。等值分數概念也可以從單位量轉換的觀點來解釋，單位量轉換係指將非 1 的單位量，轉化成以 1 為單位量之活動，以$\frac{2}{4}$和$\frac{4}{8}$為例，$\frac{2}{4}$可以視為 2 個$\frac{1}{4}$，而$\frac{4}{8}$可以視為 4 個$\frac{1}{8}$，因此可將分數的等值意義解釋為單位量減少，而單位數增加。在分數學習活動中，「等值」的意義為當兩個分數選取相同單位量的情境時，由於等分割的份數與合成份數不同，以致於分數的數值不相同，但兩分數的量卻是一樣多的(黃敏晃、周筱亭, 2001)。分數是透過分割與聚集活動來確定一個量與一個單位量的數值關係，所以分數可以代表量的數值，由於同一個量與其單位量之分割及聚集活動並非唯一，因而產生構成分數的等價集，是一個類，也表示一個有理數，即所謂的「等值分數」，例如$\frac{1}{2}$是一個分數，$\frac{2}{4}$也是一個分數，這兩個分數的等價集相同，都是{$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{6}$，……}這個有理數。

甯自強(1997)認為等值分數的意義有兩種，一種是去比較分數值所指的內容物是否相等，由於等分割的份數與合成份數不同，以致於分數的數值表面上看起來不相同，但事實上兩分數所代表的量卻是一樣多的，另一種等值分數的意義指的是去比較兩分數的分子與分母的比值是否相等以決定兩分數的等值。等值分數的特性包含(1)很多個名字；(2)重新命名一個分數，並不會改變它的本質，包括量和大小；(3)一個分數的最好的名字，須依其情況而定(Vance, 1992)。學習等值分數概念就像任何一個數學概念的發展一樣，需要隨著時間慢慢由具體的實物感逐漸脫離實徵的狀態，進而形成抽象的表徵，學生需要許多的時間與機會去發展及應證等值分數的特性。

二、等值分數教學策略

中小學數學科教材教法(2005)一書中將分數的表徵方式分為面積模式、長度模式、及群組模式。「面積模式」為將平面或面積之連續量物體分割成較小的部

分，每一個部分可以和整體比較，面積模式是小學課本中介紹分數之最早的表示方法，可利用正方形、矩形、或圓形來說明等值分數，如圖 2-1 所示，樣式積木(pattern blocks)、幾何釘板(geoboards)、方格紙、和摺紙皆是面積模式可靈活運用的模型。「長度模式」是以長度對照來代替面積，也屬於連續量情境的一種，如圖 2-2 所示，常以分數長條的形式出現，是以長條或棒型的最小測量單位所組成的。「群組模式」則是把一集合的物體看做是一整體，整體中部分群組就產生了分數的部分，屬於離散量情境的一種，如圖 2-3 所示，群組模式幫助孩童建立許多使用分數的真實世界和有理數概念的重要連結。

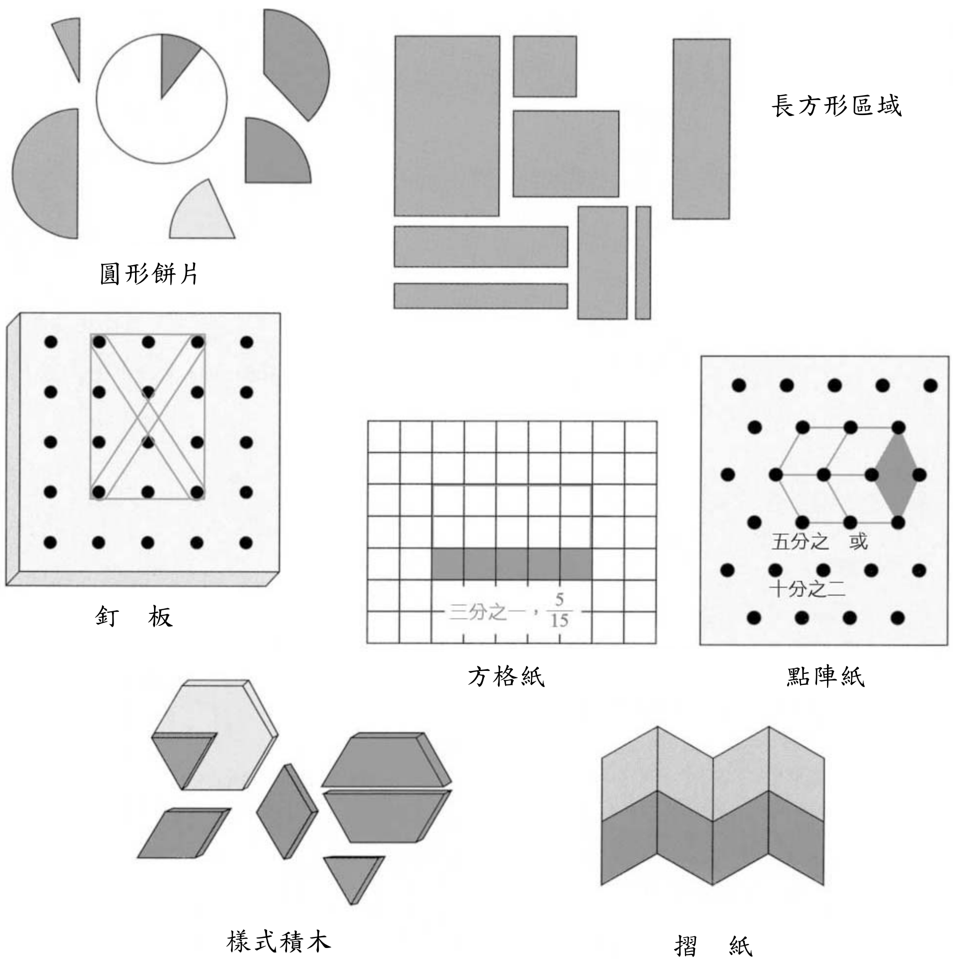


圖 2-1　分數的面積模式

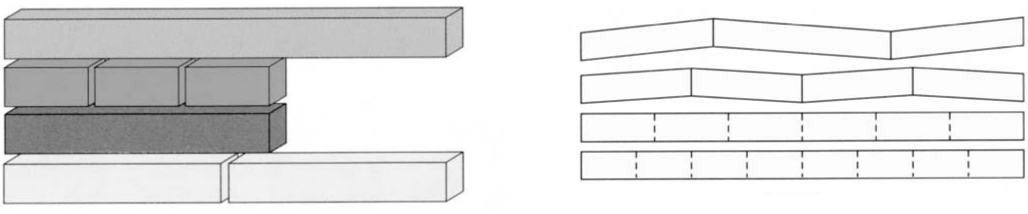


圖 2-2　分數的長度模式

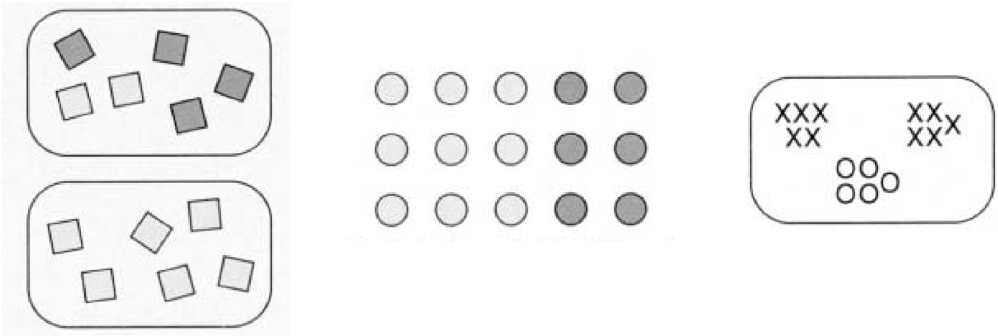


圖 2-3　分數的群組模式

等值分數概念的教學，一般的處理方式是要求學生使用模型產生分數模型的不同名稱(中小學數學科教材教法, 2005)。「等值分數的面積模式」為要求學生試著用不同的單位分數小塊來填滿，以決定這個區域要多少簡單的分數構成，如圖 2-4 所示，在教學上常利用摺紙的方式，要求學生把紙張摺成一半或三份，展開並把紙上的分數著色，寫下分數再摺疊，並且再摺一次，討論分數的不同名稱，或使用方格紙或點陣紙以便區域容易細分成許多較小的部分，要求學生畫出一個整體的模式，並在紙的線或點決定的分數上著色，討論陰影部分的不同分數名稱。「等值分數的長度模式」與面積模式有許多相同的方法，不同的是用長度來決定分數其他名稱，在教學上常用分數長條或分數拼盤進行教學，如圖 2-5 所示，將分數長條或分數拼盤的一端對齊，比較其中哪幾塊合起來的長度是否相等，藉由此方式證實等值分數，並推想出等值分數的規則。「等值分數的群組模式」則是利用不同的分割方式找出分數的不同名稱，在分數如何被分割上有較多的限制，如圖 2-6 所示，一個已知的兩色計數物可以安排在不同的小群中來描述等值

分數，12 個計數物中的 8 個是全部的$\frac{2}{3}$，這個特殊的表徵也可以視為$\frac{4}{6}$和$\frac{8}{12}$，但不能視為$\frac{6}{9}$或$\frac{10}{15}$。

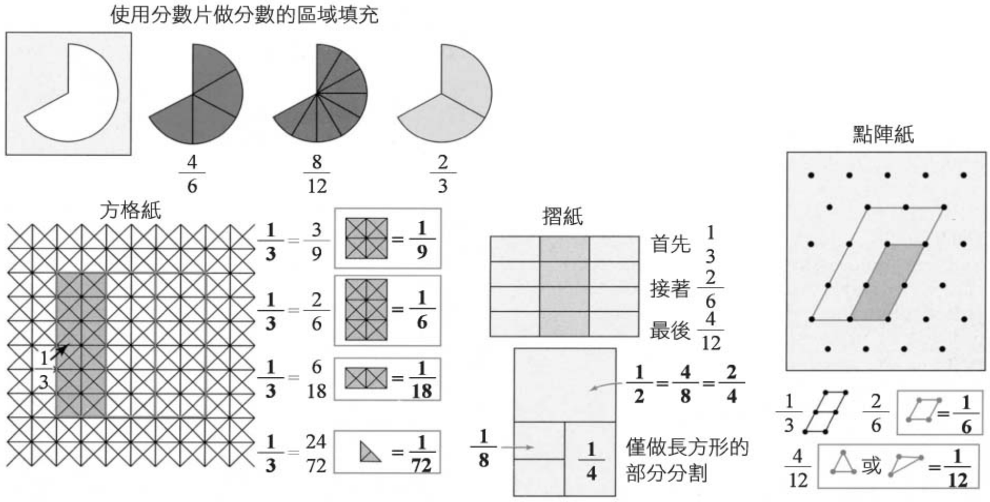


圖 2-4　等值分數的面積模式

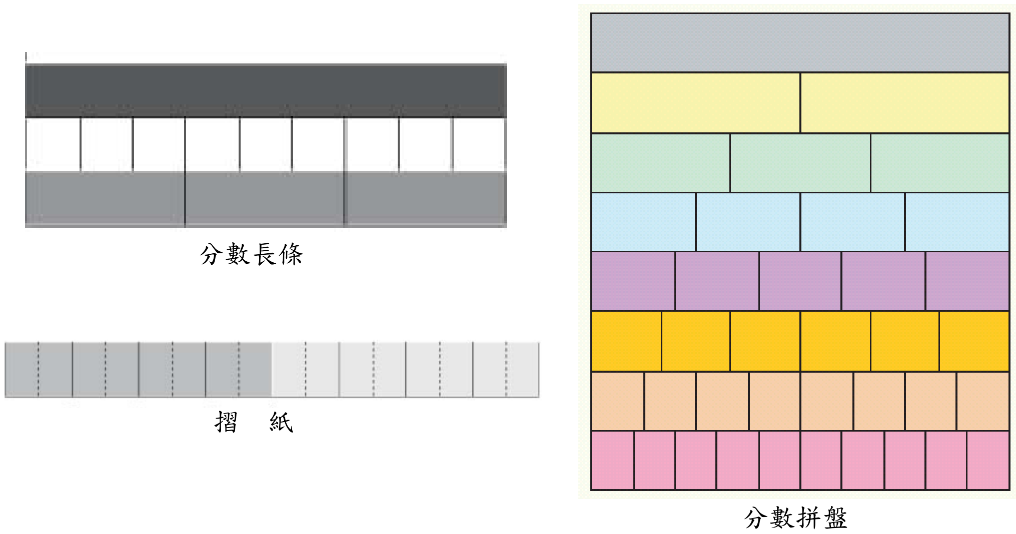


圖 2-5　等值分數的長度模式

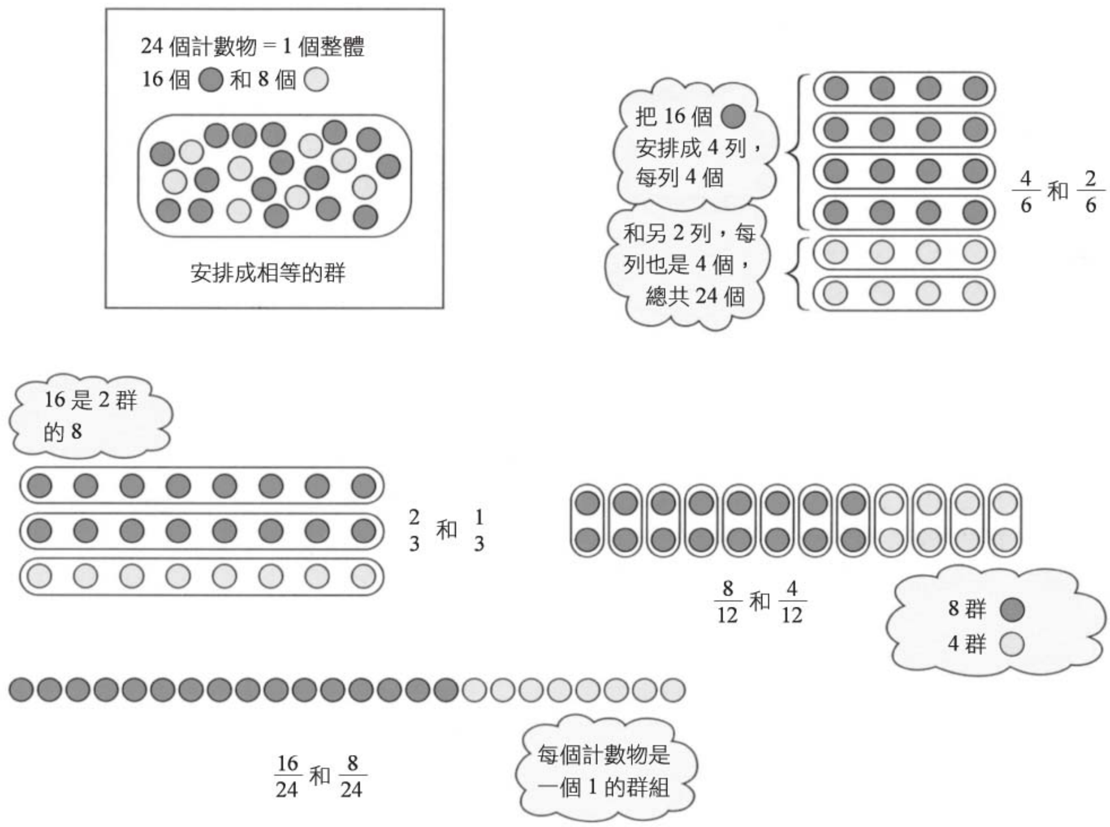


圖 2-6　等值分數的群組模式

若單以連續量情境或離散量情境說明等值分數概念會造成日後學習許多困擾。使用面積模式教導等值分數會使學生受到數字的影響而混淆分數的概念，例如學生會認為$\frac{1}{4}$比$\frac{5}{20}$大，是因為直接從圖形觀察發現,$\frac{1}{4}$只需要再 3 塊面積就能成為 1，而$\frac{5}{20}$需要再 15 塊才會湊成 1(Kerslake, 1986)；使用群組模式說明等值分數時，學生易產生以分子個數來判斷等值分數的大小，例如「◆◆◆◆◆◆◇◇◇◇◇◇」代表$\frac{6}{12}$，「◆◆◆◆◆◆◇◇◇◇」代表$\frac{6}{10}$，學生會直接從圖形表示的結果，點數兩邊分子個數，而認為$\frac{6}{12}$等於$\frac{6}{10}$(Hart, 1989)。因此，等值分數概念教學時，教師應提供多樣化的情境以利學生學習，本研究所提供之演練範例包含連續量情境及離散量情境的等值分數問題。

三、影響學習者學習等值分數概念之因素

國小學生等值分數概念相當薄弱(Booth, 1987)，許多學生即使接受過等值分數的教學，仍然不認為二分之一等於四分之二(呂玉琴, 1991b)，等值分數概念學習成效不彰的原因為學生思考過於僵化，等值分數的彈性思考能力不足所造成的(彭海燕, 1998)。影響學習者學習等值分數的因素有很多，分別為(1)等分概念、(2)彈性思考能力、(3)組合能力、(4)運作思考能力、(5)單位形成能力，茲分別說明如下：

1、 等分概念

等分概念是學習分數概念的基礎，若兒童的等分概念不完備，非但影響分數的學習，對於解決等值分數的問題，恐怕也是只知其然，而不知其所以然。在連續量情境等分概念指的是是將全部分成相等的部份，在離散量情境則是將一整群，分成等量的子集合。在等分概念學生常犯的錯誤為(呂玉琴, 1991b)：在連續量的情境下，將連續量分成所要求之份數，但每份大小不一樣大；在離散量的情境下，將離散量分成所要求之份數，但每份的個數不一樣多，或者是把不同大小的離散量分成個數相同的份數，但每份的總量不一樣多，例如：給學生四塊正方形積木、兩塊長方形積木、兩塊三角形積木，請學生拿出所有積木的二分之一，有學生拿了四塊正方形積木，只注意到分成的兩堆個數要一樣多，而忽略這兩堆的量也要一樣多。學習者在判斷分割後的部份是否相等時，也會以視覺的約估及對折或折成三份、四份等直觀的方式來判斷是否等分(林福來、黃敏晃、呂玉琴、譚寧君, 1991)。當學習者等分概念不完備，處理分數板的問題時， 只注意到分數板分割成幾塊， 而沒有注意到分割的每一塊是否相等，如圖 2-7 所示，學生將每一塊視為六分之一，而沒注意到每一塊大小是否相等(Bergeron ＆ Herscovics, 1987)。且在林碧珍(1990)的研究結果顯示有 22%的高年級學生認為等分就是分割後面積和形狀都要相同。

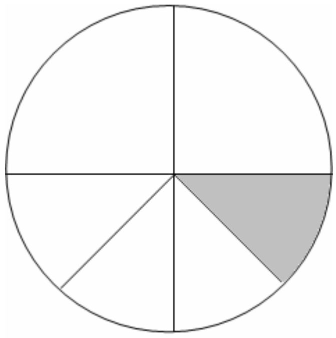
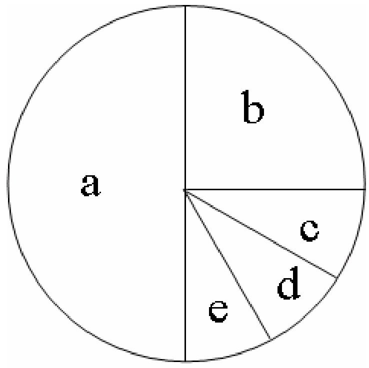


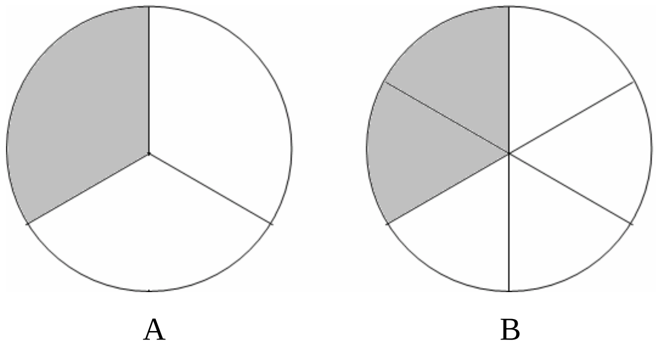
圖 2-7　不等分的分數板

2、 彈性思考能力

在連續量的圖形表徵中，彈性思考能力指的是學習者能以不同名稱稱呼同一個分數，且有想像或忽略分割線之能力(Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Behr & Post, 1992)。Behr、Lesh、Post、和 Silver (1983)以面談四年級學童的方式，呈現圖 2-8 之圖形，要求學生以不同的名稱來稱呼 b 或 cde，也就是說，對 cde 這個部份，學生能不能忽視 cde 的分割線，將之視為四分之一？而在 b 這個部份，學童能不能憑空想像出兩條分割線，並將之命名為十二分之三呢？在面談者逐步的指引後，學生認為如果在 b 加上分割線的話，b 和 cde 三塊加起來就會一樣大，可以把 b 稱作為「十二分之三」，但是仍無法將「未分割」的 b 視為十二分之三。Booth(1987)訪談英國 11 歲學童的等值概念，發現有 95% 的學童認為圖 2-9 中的 A 圖是$\frac{1}{3}$，73% 的學童認為 B 圖是$\frac{1}{3}$，中間有 22%的差異，造成差異的原因是這些學童認為 B 圖是$\frac{2}{6}$，與$\frac{1}{3}$不一樣。由此可知，如果學習者可以在圖形上想像或忽視分割線，就可以產生等值分數其他名稱。

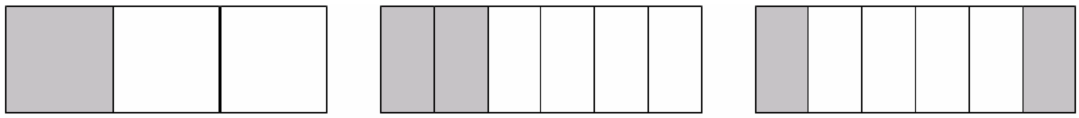


<u>圖 2-8</u>　等值分數彈性思考能力說明(1)



<u>圖 2-9</u>　等值分數彈性思考能力說明(2)

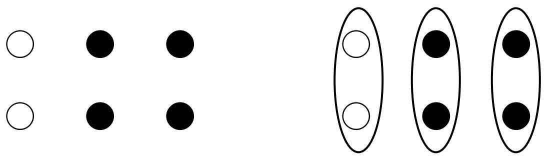
在連續量情境之等值分數概念學習中，分割線的多寡及分割區塊是否連在一起，也常會影響學習的結果，有些學生堅持分數符號的分母必須與分割塊數一樣多外，還堅持分割區塊必須結合在一起，才能接受以另一種等價的名稱稱呼。以圖 2-10 為例，所有四年級學生都認為 A 圖為三分之一，仍有 25%的學生不認為 B 圖、C 圖是三分之一，而且許多學生認為三分之一和六分之二是不一樣的(Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984)。由此可知，如果學習者可以把不相鄰分割區塊想像是連在一起的，並且在圖形上想像或忽視分割線，就可以產生等值分數其他名稱。



A　　　　B　　　　C

圖 2-10　等值分數彈性思考能力說明(3)

在離散量的圖形表徵中，彈性思考能力指的是學習者需要以實際的操作物或在心靈上想像，進行重新分割或合併才能解題。例如：以小圓圈來解決$\frac{?}{3}=\frac{4}{6}$的問題時，學習者首先要做的是把圖形轉換，先將小圓圈兩個兩個合併視為一份，如圖 2-11 所示，六個就成了三份，六個圓圈中有四個是黑的，將圖形轉換成符號$\frac{4}{6}$；三份圓圈中有兩份是黑的，轉換成符號$\frac{2}{3}$，觀察兩邊黑的地方有同樣的個數，推論出結果$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$(Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984)。



$\frac{(4)}{6}$　　　　$\frac{(2)}{3}$

圖 2-11　等值分數彈性思考能力說明(4)

「圖形表徵」所提供的「知覺線索」，常是干擾學生概念表現的重要因素，圖形表徵的「知覺線索」分為四類，如下(Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983)：

(1)完全的線索：分數分母與圖形中單位量分割的塊數相等，即單位量分割等於分母。

(2)不完全的線索：分數的分母與圖形中圖形中單位量分割的塊數不相等，而此時學生必須自行「增加分割線」以符合題目中的分母部分，即單位量分割份數等於分母的倍數。

(3)不相干的線索：分母與圖形中單位量分割塊數不相等，兒童必須「忽視」圖形上提供的某些分割線，以符合題目中的分母部分，即單位量分割份數等於分母的因數。

(4)不一致的線索：兒童必須將圖形上所有的分割線視為不存在，並對單位量製作一些新的分割線，即單位量分割數與分母無關。

「單位量分割數等於分母」是最容易被學生接受的，而「單位量分割數與分母無關」似乎都是最困難的類型，「單位量分割數等於分母的倍數」和「單位量分割數等於分母的因數」對學生的困難度研究有不同順序呈現的結果呈現(林碧珍, 1990; Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Bright, Behr, Lesh, & Wachsmuth, 1988)。因此，學習等值分數概念學習者必須具備「想像或忽視圖形中的分割線」之能力，教學中藉由自由的心智操作，進行想像、忽視、增加或刪除分割線之活動，是影響學生等值分數概念是否成形的重要因素(Behr & Post, 1992; Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983)。

3、 組合能力

「組合能力」指的是學生在做等值分數問題或餘量再分的問題時，使用一種特定解題策略的能力，即學童將單位量分成數部份，每部份都正確處理後，能否再將處理後的各部份合併成單位量的指定分數之能力(呂玉琴, 1994; 彭海燕, 1998)。呂玉琴(1991c)在研究中發現：

塗上顏色的小雞（以圓圈代表）是全部的$\frac{1}{2}$。○○○○

I：你為什麼塗●○●○這兩隻小雞呢？

S：因為我想在這裡（指●○｜●○）弄一個界線，然後 2 隻塗一隻，就是$\frac{1}{2}$。

I：那麼這二隻（塗顏色的小雞）有沒有佔全部的$\frac{1}{2}$？

S：沒有。

I：那這兩隻佔全部的多少？

S：$\frac{2}{4}$。

上述研究指出，該學童將四隻小雞的$\frac{1}{2}$塗上顏色時，先將單位量分為兩部份，每部份有兩隻小雞，以符合$\frac{1}{2}$的分母 2，再每兩個塗一個，以符合$\frac{1}{2}$的那個 1，但是該學童不會把那兩個塗黑的小雞再合併成一份、並將四隻小雞視為全部，所以他會回答塗黑的那兩隻小雞不是全部的$\frac{1}{2}$，而是$\frac{2}{4}$。可見學童在處理$\frac{n}{m}$的等值分數問題時，若使用將單位量分成 m 個一堆，再分別從 m 個中取 n 個的解題策略，如果學生不會再將個別的$\frac{n}{m}$合併為整體的$\frac{n}{m}$，則學生缺乏組合能力。在處理等值分數的過程中，學生若能主動的呈現切割、拼湊的能力，將有助於解決等值分數之問題(呂玉琴, 1994)。

4、 運作思考能力

運作思考能力是指同一塊圖形上使用不同的分割方式，即等積異形的情形(Kamii & Clark, 1995)。知識可區分為圖形面(figurative aspect)知識與運作面(operative aspect)知識，圖形面知識是基於知識的「形狀」，是可觀察的；運作面知識則是基於知識的「關係」，是觀察不到的(Piaget, 1987)。例如，將長方形分成兩半，有不同的分割方法，結果可能是長方形、也可能是三角形，如果由圖形面知識來看，長方形和三角形兩個形狀不同，看起來是不一樣大的；但從運作面知識來看，了解切割後的三角形、長方形和原來那個長方形的關係，可以不受視覺的誘導，推論出三角形和長方形其實是一樣大的，兩者都是原本長方形的二分之一。

Kammi 和 Clark(1995)探討學生等值分數概念之運作思考能力，問學生圖 2-12 中 a 和 c 是否代表一樣的數量。研究結果顯示，學過等值分數概念的四年級學生，答對率為 50%，而五年級學生則是 44%，六年級學生是 51%。分析造成學生答對率不高的原因為大部分學生覺得這種圖形是一種「衝突」，他們的內心運

作思考告訴他們 a 和 c 兩量是相同的，但是他們自己的知覺、視覺感受卻使他們認為三角形所佔的量比較多，如果學生等值分數的概念夠穩固，這樣的「衝突」就會消失，因為他們會看出即使等值分數的圖形是不同形狀，但代表的量會是相同的。

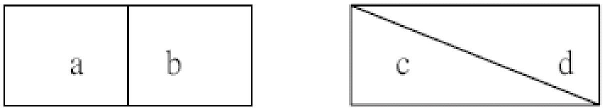


圖 2-12　等值分數運作思考能力說明(1)

解決等值分數的問題，涉及兩個運作思考的層面：(1)部分/整體的保留概念(Parrat-Dayan & Vonbche, 1992; Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960)；(2)乘法性思考(multiplicative thinking)(Piaget, 1987)。乘法性思考是一種階層式的思考模式，以圖2-13來說明，對於4x3 的題目，學生如果以3+3＝6、6+3＝9、9+3＝12 來作答，這種只涉及一個層次的思考，若學生能以4x3＝12 來解題，這則涉及了兩種階層式的思考，因為學生會同時去想「一個3、兩個3、三個3、四個3」。如果透過這種階層式的乘法關係去看等值分數，則會得到如圖2-14的思考層次，並進而理解等值分數的概念，圖2-14中，最底層是12個物品，取其中的3個來代表分數 $\frac{3}{12}$，若再將這些物品3個一數，則會進入到第二層次，得到共有「4個3」，也就是3 有4份的意義，當去取4個3中的一份，這一份不但可代表最底層次的 $\frac{3}{12}$，亦可代表第二層次中4份中的一份，也就是 $\frac{1}{4}$ 的意義，因此學生藉由這種層次間的思考，而得到 $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$ 的等值意義。

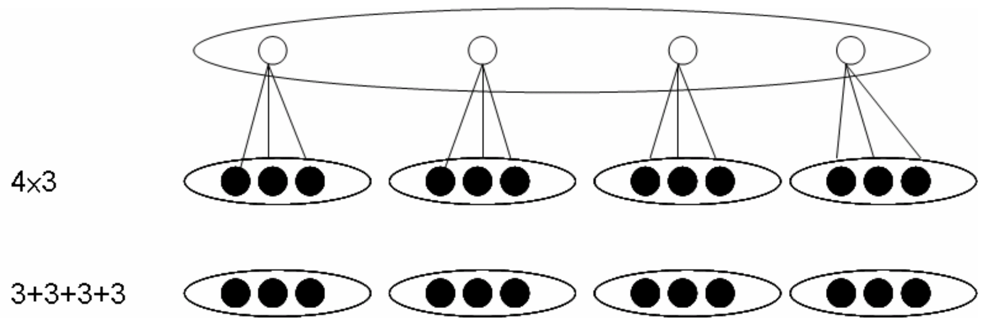


圖 2-13 「4×3」乘法性關係概念圖

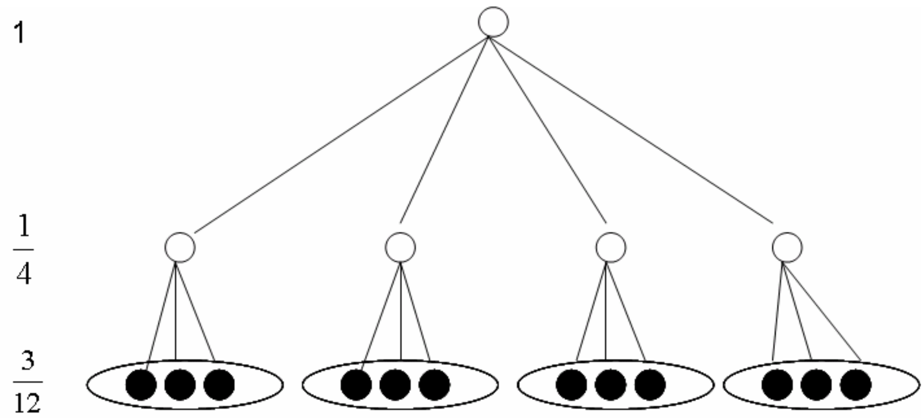


圖 2-14 「等值分數」乘法性關係概念圖

Kammi 和 Clark(1995)探討學生處理等值分數時的部分/整體的保留概念和乘法性思考。問學生圖 2-15 中 B 圖多少個$\frac{1}{8}$才會和 A 圖的$\frac{3}{4}$一樣多呢？研究結果顯示，未學習過等值分數概念的學生答對率是 11％，學習過等值分數概念的四年級學生答對率是 27％，而後經過八個月再去檢驗這些從四年級升上五年級的學生，發現答對率反而降到 13％。Kammi 和 Clark 認為因為學習者部分/整體的保留概念和乘法性思考不足，才會導致這樣的結果，因此，推論學習者等值分數概念學習成效不佳其中一個原因應是缺乏「運作思考能力」。運作思考能力著重的是兒童對知識的關係之了解，這種能力不僅牽涉到部分整體的保留概念，而且要配合乘法性思考，才能在視覺或無法操作的情況下，能做正確的判斷。

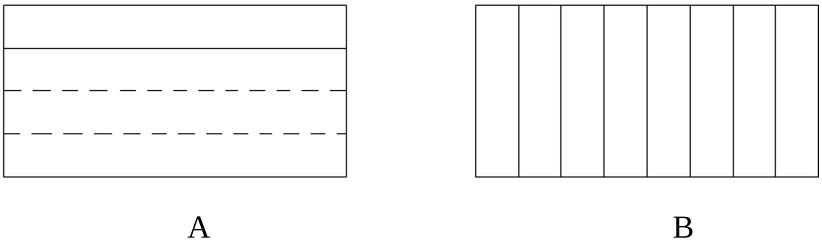


圖 2-15　等值分數運作思考能力說明(2)

5、 單位形成能力

處理分數問題最重要的一個概念是指認單位量(呂玉琴, 1991a)。「能否在圖形中找到適當的單位，將指定的部分量盡」是學習者能否解決等值分數問題的關鍵，將全部以適當的「單位」分盡後，再利用這個單位重組成全部或集合的可逆轉能力，稱為「單位形成能力」(Saenz-Ludlow, 1994, 1995)。

Saenz-Ludlow(1994, 1995)將題目導向分數的形式時，提供圖 2-16 之圖片給三年級學生，包含 b1、b2、b3 各有好幾塊：

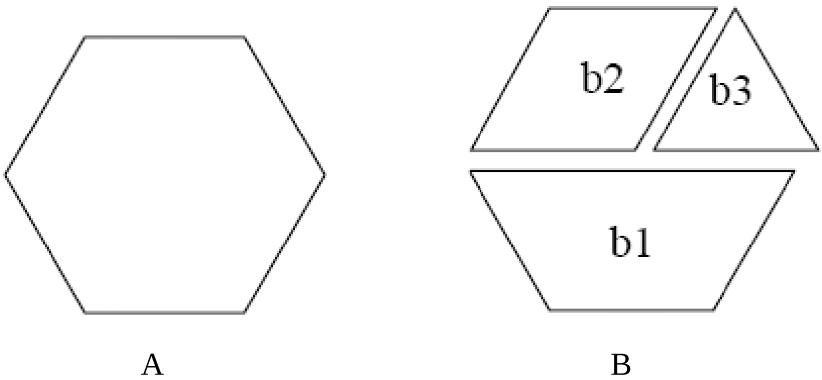


圖 2-16　等值分數單位形成能力說明(1)

先讓學生比較 b1 和全部，再分別比較 b2、b3 和全部，這三塊相對於全部(A 圖)都是可以分盡的，例如 b2 是 A 圖的三分之一。該研究要兒童比對 b1 和 b2，學生一時之間無法找到兩者的關係，但給了 b3 的提示後，學生很快的就說出 b2 是 b1 的三分之二。從研究結果的分析中指出，學生知道分割後的小單位，每一塊都要相等，主動調整小單位，以滿足題目需求；給他 b3，他會說出以 b3 為小單

位測量 b2 的結果是「半片的三分之二」，半片顯示了 b1 與全部的關係，而三分之二則顯示 b2 和 b1 的關係。

學習者如果能熟練的運用單位形成能力，就會發現等值分數的不同名稱(Saenz-Ludlow, 1994, 1995)。Saenz-Ludlow(1995)以圖 2-17 之圖形引導學生 Ann 說出 $\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$。Ann 能夠很快的說出圖形中 A 佔全部的十六分之一，而圖形中的四分之一可以是 B 這一塊，但是卻無法認同 B 這一塊也可以說成十六分之四。

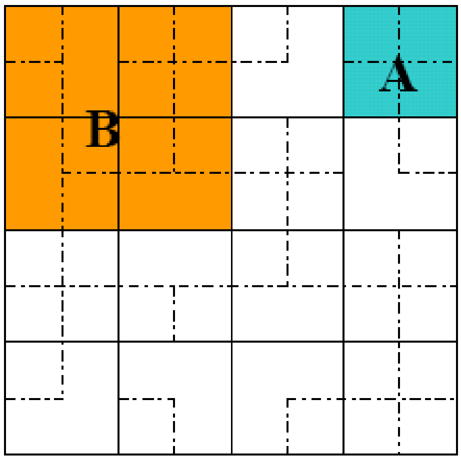


圖 2-17　等值分數單位形成能力說明(2)

Saenz-Ludlow(1994)的研究中，給學生 Michael 看圖 2-18 之圖形，並告訴 Michael 圖 2-18 是一列火車，有大小不同的車廂。Michael 利用這些紙片的重覆比對，在幾個提示之下，發現「A」是全部的 $\frac{1}{4}$，「B」是全部的 $\frac{1}{8}$，C 是全部的 $\frac{1}{16}$，同時，他也發現「$\frac{1}{2}$」和 $\frac{2}{4}$、$\frac{4}{8}$、$\frac{8}{16}$ 都一樣大。研究結果指出，學童會利用不同的小部份為單位去測量全部，而自發的說出等於一半的其他等值分數名稱。

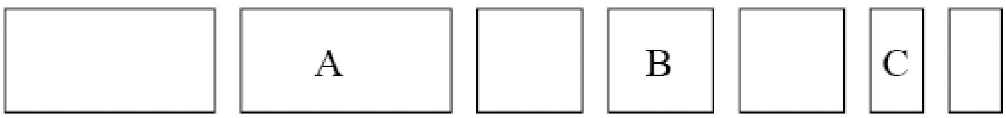


圖 2-18　等值分數單位形成能力說明(3)

綜合觀之，影響等值分數概念之因素為彈性思考能力、組合能力、運作思考能力、及單位形成能力，分割線的多寡、分割區塊是否連在一起、及圖形表徵所提供的知覺線索，也常是干擾學生概念表現的重要因素。學習者學習等值分數概念表現的先後發展次序為(彭海燕, 1998)：(1)兒童會作分數的分母等於分割塊數或個數的題目。(2)兒童具備彈性思考能力，可接受分母是分割塊數或個數的因數、倍數之等值分數，會在圖形上自行增加、忽視分割線，或是把數塊、數個物品合併為一份以說明約擴分的概念。(3)兒童具備組合能力，將全部分成幾個部份，每個部份分別正確處理以後，再將各部份合併成全部來看，並正確的說明其結果。(4)兒童具備單位形成能力。會依題目需要找到適當的小單位，將部份、全部分別量盡以後，再以分數符號表示出來。(5)兒童具備運作思考能力，可以不受視覺的干擾而判斷等積異形的相等關係。(6)兒童具備同時使用想像與忽視分割線的彈性思考能力，會說明分母與分割數或個數不是直接倍數關係的等值分數問題。解決等值分數問題時，學生大多嫻熟於符號的運作，喜愛以符號來解題，一昧的進行約分、擴分的計算，而不了解其意義(彭海燕, 1998)。

四、等值分數教材現況

美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics，簡稱 NCTM)在「學校數學原則與標準」詳盡闡述學生在幼稚園到 12 年級期間應當擁有豐富的數概念。在分數教材方面之課程標準為從二年級開始學習分數概念，三至五年級則是「使用模型、參考點及等價形式判斷分數大小」、「辨識分數、小數及百分率的等價形式，以及能夠找出其等值分數」、「使用視覺模型、參考點及等價形式對分數與小數進行加減運算」，六至八年級則強調彈性運用分數解決問題及運算能力(NCTM, 2000)。台灣九年一貫課程綱要之數學領域課程標準中指出，一至三年級引入分數基本概念，四至五年級則是引入等值分數、約分、擴分的意義，和分數加減乘除之運算(教育部, 2004)。

吳麗玲(2005)分析美國、新加坡、台灣分數教材之現況，研究結果顯示「情

境數學」是國際間一致認為最符合美國 NCTM 課程標準的一套教材，教材內容與學校數學原則與標準所訂定各階段課程標準一致，雖然美國數學課程標準三至五年級有等值分數相關教學目標，但是情境數學教材中之教學目標沒有等值分數方面的教學目標，在教材中也甚少介紹等值分數，雖在解題過程中，可能會使用到等值分數的概念，多為透過分數條找出其等值分數，但並未正式引入等值分數概念。「大家一起學數學」是新加坡使用率最高的數學教材版本，二年級開始介紹分數概念，內容為等分、同分母分數的比較與排序；三年級為等值分數，也就是基本的擴分與約分、異分母分數的比較與排序；四年級為同分母分數的加減，分數乘以整數；五年級為複雜的分數加減乘除運算，並引入分數除以整數、比、比率及百分率等概念，對等值分數概念亦著墨不多。「康軒數學」則為目前我國市場佔有率最高的版本，康軒數學對於分數教材的處理方式，二、三年級介紹分數基本概念；四年級為同分母分數的合成與分解；五年級為等值分數、約分、擴分概念；六年級則強調分數的運算。康軒數學五年級分數教材，著重在等值分數(47.4%)和分數乘法(36.8%)兩個分數概念，在等值方面，強調透過約分、擴分或通分的方法，找出其等值分數或判斷兩數是否等值。康軒版對於等值分數的重視，則在另外兩個版本較為少見。

國內各版本在等值分數教材的呈現，都不直接引進擴分、約分等名詞，並不直接介紹同乘一數、同除一數其值不變的運算方式，而是在具體情境中透過再分割或重做分組來產生更小的單位分量，或是透過合併或重組來產生較大的單位分量，並比較兩種單位分量的情況下，所欲表示的部分量的等價關係(蔡麗蓉, 2003)。各版本在處理等值分數教材時採用的解決策略如下(蔡麗蓉, 2003)：在連續量情境下，常常採用「訴諸於直觀經驗」策略、「訴諸於分割份數」策略，訴諸於直觀經驗指的是將彩帶、大餅，透過不同份數的分割，取不同數量比較長短大小後，透過知覺經驗得知兩分數在長度上或面積上的相同，認定兩分數等值；訴諸於分割份數指的是直接告知分割的數量，用數線的方式比較兩分數是否等值。在離散量情境下，常常採用「訴諸於內容物」策略、「合併或重組內容物」

策略來進行解題，訴諸於內容物指的是透過比較內容物數量而判定是否等值；合併或重組內容物指的是可將多個內容物視為一體，判定內容物的數量是否一樣，找出分數的其他名稱。

分析康軒數學等值分數單元教材內容發現，所提供之範例包含連續量情境和離散量情境之彈性思考能力，連續量情境之彈性思考能力所提供的範例皆是分割區塊相連在一起的；離散量情境之彈性思考能力所提供的範例只有在同一群相同物品中做分割或合併之活動。在數學學習中，透過演練範例可以幫助學習者發展出適當的心智模型並達成學習目標，藉由演練範例學習最初始的認知技巧是很有益的方式，對初學者來說以演練範例的方式來學習是比較喜歡的學習模式；對有經驗的學習者來說是有效率的學習模式(Anderson, Farrell, & Sauers, 1984; Atkinson, Derry, Renkl, & Wortham, 2000; LeFevre & Dixon, 1986; Recker & Pirolli, 1995)。因此，在教學中所提供適當的演練範例是非常重要的，會影響學習者概念的學習。

由上述文獻探討可知，等值分數為分數學習中重要的概念之一，是發展有理數概念之基石，國小學生等值分數概念學習成效不佳，主要影響因素為彈性思考能力、組合能力、運作思考能力、及單位形成能力不足所造成的。國小教科書中等值分數教材卻只提供最基本的彈性思考能力之範例，若教學中沒有提供適當的演練範例可能導致解決等值分數問題所應具備的能力不足，造成等值分數概念學習成效不佳。本研究探討不同的範例對學習者等值分數概念之影響，期望教學中提供可促進彈性思考的演練範例，以提升學習者的等值分數彈性思考。

第二節　資訊科技融入教學

資訊科技可以支持學習者建構知識、探索知識、及做中學，教師可利用資訊科技當作工具，提供學生具體練習及操作的機會，若將資訊科技當作認知工具可促進學生學習成效，虛擬教具即是將實體教具數位化，並加上有助於學習的特徵，以下就資訊科技融入教學之意涵、虛擬教具對學習之影響、及虛擬教具相關實徵研究分別進行探討。

一、資訊科技融入教學之意涵

資訊科技融入教學的目的是要創造一個優質的教學環境，此種環境除了能改進教師的教學方法，增進學生的學習效果之外，它應是一個多元的、互動性高的，能培養學生主動進行探索問題，並有利於解決問題的環境(何榮桂, 2002)。資訊科技融入教學強調融入與整合，焦點應在教學上，將資訊科技有效的整合且融入課程、教材與學習活動中(王世全, 2000)。許多學者將資訊科技視為學習工具，在教學活動中運用資訊科技，以融入、整合的方式使用科技來支援與延伸課程目標，教師針對課程及教學策略之需，善用電腦多媒體特性，來有效達成教學目標，並把資訊科技當作心智學習的工具，使學生能從事有意義的學習活動(王世全, 2000; 何榮桂, 2002; 徐新逸、吳佩謹, 2002; 邱瓊慧, 2002; Dias, 1999)。

從唯實主義(realism)與經驗主義(empiricism)、實用主義(pragmatism)與工具主義(instrumentalism)、以及視覺媒體學習理論來看資訊科技融入教學(王春生, 2004)。唯實論與經驗主義者認為知識是經驗的產物，所有的知識基礎都是建立在學習者感官的經驗上，有些學科是必須透過實物來進行教學的，透過各種感官來認識事物能讓學習者印象清晰，同時藉由具體經驗，可以協助學習者理解學科內的概念知識，實際操作的直接經驗最能引起學習動機，也最能幫助學習者了解學習內容。實用主義與工具主義認為知識來自於活動，來自於個體與環境的交互作用，此作用除了要運用感官外，同時也要運用頭腦，其知識發展的目的是在於產

生改善人生的工具，在教育方面則重視學校與校外生活經驗的連結、科目之間的連結、及單元之間的連結，從做中來學、從經驗中來學、從解決問題中來學，所以教師在設計教材內容時，應重視學習者的生活經驗。視覺媒體學習理論則認為人類學習知識的歷程是從具體的實物操作到抽象符號的表徵，在學習過程中，為了使學童順利建立知識概念，在不同學習階段，要運用不同的輔助媒體進行學習，才能達到事半功倍之效，學習是動作、圖像與符號表徵，而媒體具有具體到抽象的連續性。

資訊科技可以支持學習者建構知識、探索知識、及做中學，教師可利用資訊科技當作學習工具，提供學生具體練習及操作的機會，並將資訊科技當作心智工具，幫助學習者學習，表達已知的知識，建構新知識(Jonassen, 2000)。將資訊科技融入教學不僅能吸引學習者的注意、引起學習動機，也能讓學習者獲得更具體及真實的學習經驗，教師要進行有效的教學前，首先要做的就是引起學習者注意，多媒體互動的特性、生動活潑的動畫或影片可以有效的吸引學習者的注意(劉世雄, 2002; Jonassen, 1999)。互動性的視覺化媒體具有獨特的教學功能，可以有效幫助學生理解與學習，資訊科技融入教學獨特的功能即是多元化的呈現教材，讓抽象的教學內容更具體化，幫助學生達成有意義的學習(陳淑貞, 2004; Jonassen, 1999)。

資訊科技融入教學應是在「有需要」的前題下來進行，不應該只是為了融入而只是將教材透過資訊設備來展示(王春生, 2004)。在數學學習方面，有些內容是很抽象、不易了解、或是必需透過實地操作以經驗其中概念，因此容易造成學生學習動機低落，若欲提高學習動機及增進學習成效，有必要將教材以視覺化的方式呈現，將抽象教材內容具體化，以往的教學方式，往往需要花費大量的時間及人物力來達成，現今利用資訊科技即可輕易的將抽象概念具體化，就由多媒體豐富的聲光效果及互動特性，可以增加學生操作學習機會，並具體連結學習經驗，提昇學生學習興趣及學習動機，以獲致較佳學習效果(張國恩, 2002; 萬志祥, 2004)。

二、虛擬教具對學習之影響

在數學學習方面，兒童的認知發展有四個階段，依序為感覺動作期(sensorimotor)、運思前期(preoperational)、具體運思期(concrete operations)、和形式運思期(formal operations) (劉秋木, 2002)。「感覺動作期」為零至二歲，兒童以身體動作與感覺來體驗環境，憑感覺與動作以發揮其基模功能，會使用延後模仿，此階段兒童有物體恆存的概念；「運思前期」為二至七歲，兒童逐漸能運用符號來代表對環境的認識與體驗，但尚不能進行邏輯思考，開始運用語言、文字、圖形等較為抽象的符號去從事思考活動，雖然能操作符號，但仍依賴具體事物，此時期的兒童可以開始學習簡單的文字、數字和圖形，具有形象表徵的能力；「具體運思期」為七至十一歲，兒童已能進行推理，以具體經驗之事物或經驗從事合乎邏輯的思考，此階段兒童可以按物體某種屬性為標準排序進行比較，將具有相同或相似特徵的事物放置在一起的分類能力，面對問題情境思維時，不再只憑知覺所見的片面事實去做判斷，具有面積、體積、重量的保留概念，且具有符號表徵的能力；「形式運思期」為十一歲以上，可將所面對的問題情境提出一系列的假設，根據假設進行驗證，從而得到答案，在解決問題時，能獨立出個別的因素，並將這些因素做某種組合，來思考問題的解決。

知識的表徵分為動作表徵(enactive representation)、形象表徵(iconic representation)、符號表徵(symbolic representation)三個時期(劉秋木, 2002)。「動作表徵期」是由做中學的經驗，指的是學習者接受到刺激後，所引發的外在行動反應，透過行動手段來掌握概念或事物，例如幼兒對於一個具體物件的瞭解，在於這個東西可以怎麼被操弄，當這個物件消失不再能被操作時，則此物件的意義亦不存在，而此種運思的材料即為動作的表徵，實物、或花片、積木之具體物教具皆為概念的動作表徵物，它們可以被實際地、外顯地操弄，如用點數的方式計數花片的數量；「形象表徵期」是由觀察中學的經驗，指的是用「心像」來掌握概念，換言之，即使具體物件已消失，在腦中仍留有心像，運思活動即是以心像為材料，進行內在的活動；「符號表徵期」是由思考中學的經驗為主，指的是用符

號來掌握概念，對符號進行運思，符號是一個隨意選擇的記號，與實物之間並無任何類似之處，不似心像是外在實物的影像，符號代表了實物或心像的某一種性質之抽象意義。

從認知發展階段的時程來看，國小五年級學生處於具體運思與形式運思兩者之間，國內研究指出，即便兒童進入國中階段，多數學生仍未發展出形式運思的能力(袁媛, 1993)，知識的表徵是最基本的行動與形象的表徵，兒童必須透過操作才能形成這些表徵，若不讓兒童實際操弄環境，或者至少見到外在事物，很難形成這些表徵。具體物操作可以形成動作表徵與形象表徵，使所學得的知識有更多的聯結增加記憶，所以國小數學教學借重教具(manipulative)之處甚多，就是希望透過教具的操作形成正確的知識表徵(劉秋木, 2002)。教具重要的功能為提供學生具體與抽象思維之間的轉換，這種轉換可幫助兒童經由表徵形式增進至抽象思考的發展，從心理學習理論的觀點也支持教具於教學上的使用。Drickey(2000)也指出，教具的使用能幫助學生建構數學抽象世界的意義及提供不同的情境以連結學生已知及未知的知識。因此，教具在中小學生學習數學的過程中便扮演了重要的角色，許多研究也都支持使用實體教具可以幫助學生學習數學概念。認識等值分數時必需將物品進行不同等分的切割，但實體教具無法讓學習者任意地切割，分數數感及單位量的概念也難以用實體教具說明，透過電腦多媒體互動特性，提供半具體物之操作，將不易體驗的知識以影像或動畫呈現，抽象概念予以具體化、視覺化，使學童有充足地操作機會，以經驗其中的數學概念，可有效地具體呈現學習內容，幫助學童理解(賴阿福, 2004)。

虛擬教具(virtual manipulatives)和實體教具非常相似，是一種放在網站上具互動特性的動態物件，此動態物件之具體表徵可以提供學生建構數學知識的機會(Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002; Moyer, Niezgoda, & Stanley, 2005)。最常使用於數學教學的表徵方式有實物表徵(concrete/physical representation)、圖形表徵(pictorial/visual representation)及符號表徵(abstract/symbolic representation)，虛擬教具像圖形表徵物一樣可提供學習者視覺上的印象，但它也同時像具體教具一樣具

有可操弄的功能，虛擬教具的表徵方式並不同於前面三種常用於教學數學的表徵，簡單來說，他們具有前述三種表徵的一些功能，且又有前述三種表徵所不具有的一些功能。虛擬教具具有以下特性(Yuan, 2005)：(1)可變性，學習者可針對某一物件的某一部分塗顏色，或是增加或減少某一物件的數量，如圖2-19，可以任意改變圖形幾何釘板上的釘子數；(2)無限量供應性，可以解決課堂上實體教具不足的問題，也能解決分配、整理教具耗時的問題，且整理教具也十分方便，只要點選如資源回收筒的按鈕，所有畫面上的教具即獲清除；(3)可同時呈現圖形及符號於畫面上，能強化表徵間的連結之特性，如圖2-20所示之虛擬教具可能沒有實體教具的一些感官刺激，例如沒有觸感，但有助於學習者具體感官知識及抽象知識的連結，Clement(1999)稱這是整合的具體知識(integrated-concrete knowledge)，即他們能連結動態的視覺心象與抽象符號，這是一般的實體教具所不能做到的。

圖 2-19　圖形幾何釘板

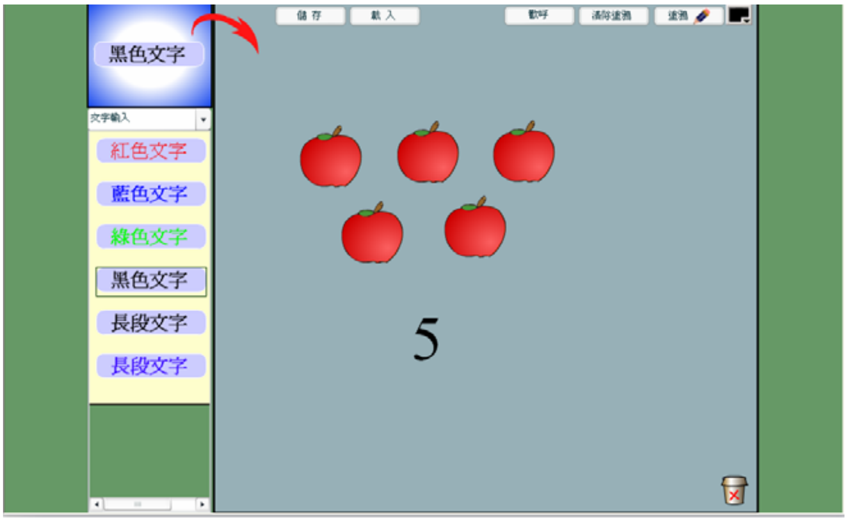


圖 2-20　虛擬白板同時呈現圖形及符號

將虛擬教具運用於數學學習中有以下優點(Izydorczak, 2003)：(1)虛擬教具比實體教具更有擴張性。例如虛擬教具可比表現比 1/100 更細微的分數概念，而實體教具則受限於物理的特性，無法隨需要轉變；(2)虛擬教具能呈現出比實體教具更細微的概念。例如 Hands-On Math 網站中使用虛擬積木所呈現的位值概念，當由 10 個 1 的積木轉為 1 個 10 的大積木時，會讓學生留下非常深刻的印象；(3)虛擬教具比實體教具更易於操作。例如學生操作拼圖或七巧板時，往往因疏忽而破壞已經完成的部分成果，但是當學生使用虛擬教具時，可以拼得更好，可更專心的進行所需要的操弄；(4)虛擬教具透過輔助說明的連結，可以更清楚的表徵數學符號和程序；(5)虛擬教具比實體教具更適合用於大團體的教學。實體教具具有一定的大小，在大團體中往往讓距離遠的學生看不清楚。虛擬教具可以透過投影機投射於大尺寸的畫面，甚至同時使用多個螢幕，非常適合大團體教學；(6)虛擬教具可以解決經費不足的問題。購買實體教具往往有經費的限制，而軟體只要一份，就可以多人同時使用，而且目前虛擬教具多半是免費的；(7)虛擬教具可監控學習活動；(8)虛擬教具所產生的班級管理問題比實體教具還少。

綜合過去虛擬教具實徵研究結果(Reimer & Moyer, 2005; Suh, Moyer, & Heo, 2005; Steen, Brooks, & Lyon, 2006)，學習者在學習數學時使用虛擬教具有以下學

習特徵：(1)提供學習者自我發現的機會；(2)鼓勵學生探討數學關係；(3)將圖形和符號做連結；(4)學習分數的加法時，避免學生犯典型的錯誤；(5)學生喜愛立即地回饋；(6)虛擬操作比起紙筆方式來得更容易、更快。虛擬教具可以改善學生視覺上和概念上的數學能力，動態、顏色、圖解、互動的特性可讓學生保持注意力，使他們可以持續完成任務，可經由探索的方式理解數學概念。整體來說，學生認為虛擬教具幫助他們學習、容易操作、可以得到立即性且特定的回饋，比傳統的方法更為迅速，提高學生學習的興趣。另外，使用虛擬教具可節省收發教具的時間，需要重新操作時也較方便，能讓學生更集中注意力、練習的質和量均提高、可從事較適當的活動層次，這些都是傳統的紙筆或實體操作活動無法做到的。使用虛擬教具教學時不用輪流使用教具，增加任務重複次數，每位學生有相同的機會參與等值的教學活動，就教育的公平性而言，虛擬教具可以使用到任何一個學區，學生可以有相同的機會和效果(Steen, Brooks, & Lyon, 2006)。

三、虛擬教具相關實徵研究

無論在數學教育方面或其他領域，虛擬教具相關實徵研究皆有良好的學習成效，且學習者有能力從電腦虛擬的環境中轉移至真實環境。Ainsa(1999)使用 M&M’s 虛擬數學操作來測量學生完成數學任務的能力，和使用電腦操作相似的任務。在顏色配對、數字配對、形狀辨認、計數能力、加減法，使用電腦操作與實體操作皆無顯著差異。另一個相似的研究，三年級的學生透過腦操作與實體操作在分類、邏輯思考都可達到精熟的效果(Clements, Nastasi, & Swaminathan, 1993)。Shade 和 Watson(1990)針對 18 到 36 個月大的小孩實施物品(桌子、椅子、燈)分類的研究，使用電腦操作圖形一個小時候，再給予真實物品做分類，研究結果發現大約 36 個月大的小孩，透過電腦操作可以增進實際物品分類的正確率。電腦不只在各主題間增加視覺化連結的經驗，更促進學生認知發展，使他們可以達到比我們預期還要高的層次(Duarte, Young, & DeFranco, 2000; Enderson, 1997)。

在分數教學方面，Reimer 和 Moyer(2005)探討虛擬教具對學生分數概念及學

習態度之影響，並探討學生使用虛擬教具的學習特徵。以 19 位國小三年級學生為研究對象，皆已學過分數概念，教學內容包括分數部分/整體概念、等值分數、及比較分數大小，先教學生如何操作分數虛擬教具後，給予學生學習任務，學生操作虛擬教具獨自解決學習任務，依據學生前後測成績檢驗其學習成效。研究結果顯示，使用虛擬教具可以促進分數的概念性知識之習得，60%的學生對虛擬教具持正向的態度，並且大部分學生認為虛擬教具可幫助他們學習分數概念，可以得到立即性的回饋，比過去上課時使用實體教具及紙筆的方式來的方便且迅速。

Suh、Moyer、和 Heo(2005)探討虛擬教具對分數概念性知識與程序性知識連結之影響。研究對象為 46 位五年級學生，分為低、中、高能力三組，教學內容包含等值分數、異分母分數加法、及比較分數大小，所有學生接受相同的教學、使用相同的虛擬教具、及解決相同的學習任務。研究結果顯示，對於分數的概念性知識，使用視覺電腦圖像做練習，可以增加學生解釋和使用圖像形態呈現想法之能力；分數的程序性知識，透過虛擬教具教學與練習，可提供學習者自我發現的機會、鼓勵學生探討數學關係、將圖形和符號做連結、避免學生犯典型的錯誤。

Kong 和 Kwo (2005)將虛擬教具當作認知工具，探討虛擬教具對同分母分數加減法學習成效之影響。研究對象為 48 位國小四年級學生，使用虛擬教具提供學習者動態式的分割模式(Graphical Partitioning Model，簡稱 GPM)做為學習支持，學生可以經由具體操作找到兩分數共同的分母。研究結果顯示，虛擬教具可以顯著提升低能力學習者之學習成效，等值分數為之後學習分數程序性知識及異分母分數加減的關鍵因素，使用 GPM 模式可以提升學習者等值分數的概念。

在幾何教學方面，Olkun(2003)比較實體和電腦操作的七巧板學習相同的平面幾何概念對學習之影響，研究對象為 93 位國小四、五年級的學生，研究結果顯示使用虛擬教具及實體教具對學生學習平面幾何概念皆有正面的影響，但是哪一種方式比較好沒有顯著的差異。四年級學生使用實體教具學習成效較好，五年級學生使用虛擬教具學習成效教好。接著，Olkun 又以相同的虛擬七巧板做後續研究，探討虛擬七巧板對學生學習幾何概念及未來幾何概念學習之影響，研究結果

顯示家中有電腦的學生表現較好，接觸電腦時間的長短也會影響測驗成績(Olkun, Altun, & Smith, 2005)。

Steen、Brooks、和 Lyon(2006)也是在比較實體和電腦操作對幾何概念學習成效及學習態度之影響，研究對象為 31 位國小一年級學生，實驗教學所涵蓋的概念有：球體、圓柱、角柱、角錐、圓錐的辨識；複製平面圖形；將圖形轉變為較大或較小圖形之能力；依據邊或角的數量，畫出平面圖形；畫出形狀、大小一樣的平面圖形；使用問題解決策略延伸圖形；畫線對稱圖形；畫出相同分割數量的平面圖形。研究結果顯示，學習者使用虛擬教具前後測得分有顯著的差異，後測分數顯著優於前測，雖然學習者使用虛擬教具學習成效較好，但使用虛擬教具和實體教具在學習成效上無顯著差異，由此可知，虛擬教具可以達到與實體教具一樣之效益。

除了分數和幾何方面的實徵研究，Moyer、Niezgoda、和 Stanley(2005)以兩個行動研究探討使用虛擬教具學習數學的效果。其一是探討幼稚園兒童的類型製造活動，研究對象為 18 位幼稚園兒童，研究的時程為三天，第一天使用實體教具；第二天用虛擬教具；第三天用紙筆畫出圖形，讓幼稚園學童創作各種不同的圖案，比較學生圖案的數量、型態、複雜度以及創造力。研究目的在了解類型積木、虛擬教具及紙筆三種不同表徵方式的使用，對學習者類型創作的變化性及複雜性之影響。研究結果顯示使用虛擬教具的方式表徵，兒童表現出較多的創作類型，且每個類型所使用的積木數也較多，兒童創作出的類型較多元及有變化，使用虛擬教具確能提供兒童創作類型的學習機會，也是學習者表達想法、圖形理解的第二語言。Moyer 等人的另一個研究則是探討二年級兒童使用虛擬十進位積木的成效。研究對象為 19 位二年級兒童，研究的時程為兩天，第一天使用虛擬教具，第二天用紙筆畫出解題結果。研究目的為虛擬教具對解決問題的過程如何表式及說明之影響，特別是兒童如何解釋 10 個 1 變成 1 個 10 的過程。研究結果顯示，兒童確實能透過虛擬教具的視覺印象掌握位值概念，兒童在使用虛擬教具後的解題策略也趨向一致，從一開始所使用的數數方法趨向於利用位值及算式解決問

題，使用虛擬教具可以提升學習成效。

由上述文獻探討可知，實體教具可以幫助國小學生學習數學概念，但是學習等值分數概念時，必需將物品進行不同等分的切割，實體教具很難讓學習者任意地切割物品，因此很難幫助學習者發展等值分數概念。由於資訊科技的蓬勃發展，虛擬教具已被運用於數學教學中，並有良好的學習成效，運用虛擬教具的可變性，可以彌補實體教具的不足，因此，本研究期望適切的運用虛擬教具，促進國小學生等值分數概念的學習。

第三節　自我效能與數學自我效能

自我效能理論是源自於社會認知理論(Social Cognitive Theory)，社會認知理論根據行為(Behavior)、個人因素(Person)和環境因素(Environment)三者間的交叉互動來解釋人類的行為，也就是說人類是受行為、個人認知及其他影響知覺和行動的個人內在因素與外在環境等三者交互影響。以下就自我效能的定義及對學習之影響、數學自我效能對學習之影響分別進行探討。

一、自我效能的定義及對學習之影響

Bandura(1986)認為自我效能(self-ffficacy)是人們判斷自己擁有多少能力去組織與執行某些行為以達成特定任務。Schunk(2000)將自我效能定義為一個人對自己達成某一特定任務的能力評估，自我效能不僅是知道如何去完成某件事，而且是對於自己是否有能力完成的一種信念。Godding 和 Glasgow(1985)認為所謂自我效能是個人對自己在特定情況下，對特定行為的一種能力知覺，可作為解釋行為程度的預測變項，而此變項會因認知、環境及行為等變數之差異，而有不同的表現及效果。Roth(1985)界定自我效能是個體為達成預期結果，在執行學習活動的過程中，對其自身能力的知覺。Woolfolk 和 Hoy(1990)則認為自我效能是個人對於自己處理周遭事物之能力的一種評估，此種評估的產生乃是來自於外在環境、自我調適機轉及個人能力經驗或成就與表現之間交互作用的結果。簡而言之，自我效能為個人對某一情境或特定任務是否有能力完成的信心程度。

自我效能會影響人們對行為活動的選擇與行為反應(Bandura, 1986)。通常人們傾向於選擇自己認為可以表現優異的活動，自認超過能力範圍的活動會加以逃避，而從事其判斷能力所及的活動，即使此活動是具有挑戰性的困難任務，也會較有興趣和專心的面對，人們會自己設定目標和持續堅持的去解決任務，面對失敗挫折時也能持續努力，此外，在面對挫折與失敗後，也能很快的恢復自我效能感，並傾向於認為是自己的努力不足或能力不夠而導致失敗。自我效能也會影響

人們嘗試解決任務時的動機、願意付出努力的程度、當面臨困難時堅毅的程度、以及面對失敗挫折的反應方式。高自我效能者在解決任務前會較集中注意力去了解要解決的任務，因而投入較多的努力，面臨困難時較能持續進行活動，遭遇失敗挫折時反應較有彈性知變通；低自我效能者在解決任務前，會先思考及防範可能的錯誤發生。因此，當個人面臨新的任務事件時，把它當作挑戰加以克服，或是當作困難加以迴避，取決於自我效能的高低。

自我效能也會影響個人的思考模式與情感反應(Bandura, 1986)。當面對較困難的任務時，高自我效能者會有比較正向的態度，認為自己有能力解決問題，較有意願面對問題，所以自我設定的目標會較具有挑戰性，甚至因挫折而更加努力，將行為或學習的成敗歸因於自己的能力或努力程度。相反的，低自我效能者認為任務往往比實際上來的要困難，認為行為的結果全由環境所控制，努力無法改變既定的事實，在思考如何解決任務時，低自我效能者常常自認為自己能力不足以解決問題，導致信心降低，因而產生焦慮、緊張、有壓力、沮喪等情感反應。由此可知，自我效能會有效的影響事情完成的程度，相信自己可以達成任務的信念也會讓人們產生自我實現的期望，高自我效能者再加上努力堅持可以導致較高的成就，如果增加低自我效能者的自我效能，並給予鼓勵，可以增進他們面對困境時的信心與鬥志。

自我效能的資訊來源為成就表現(performance accomplishment)、替代經驗(vicarious experience)、言語說服(verbal persuasion)與生理狀態(physiological state)四類，這些來源均會影響學習者自我效能的判斷，茲分別敘述如下(Bandura, 1986)：

(1)成就表現

學習者能從過去親身經驗的成果得到自我效能，是影響自我效能高低最重要的資訊來源。如果學習者在過去學習時有成功的經驗，則他們也會相信在往後的學習上也會有好的成果。通常成功的經驗會提升學習者的自我效能，個人過去愈能掌控情境，克服困難與挫折，其自我效能愈高；而連續失敗的經驗會形成自我

懷疑，進而降低學習者的自我效能，尤其是當失敗的經驗發生在個人學習活動剛開始的階段，其影響力將會更大；但若是學習者能有連續的成功經驗，則其偶發的失敗經驗對自我能力上的判斷不會產生太大影響，因此自我效能也不會有太大的改變。不論是資優或學習障礙學生，學業成就的高低皆是影響自我效能的重要因素(Panagos & DuBois, 1999)。

(2)替代經驗

學習者會從他人的行為表現與行為結果，判斷自己執行該項行為的能力，形成自我效能。通常若是學習者認為行為示範者與自己越相似，則該示範者的行為越能影響學習者自我效能的評估。例如：學習者認為示範者與自己的能力相當，則學習者較傾向於認同「示範者做得到的事情，自己也能做到」，或是「示範者費盡努力也做不到的事情，自己大概也做不到」。從觀察示範者的經驗中可避免重蹈覆轍，減少直接面對失敗的挫折經驗，因而提升自我效能。

(3)言語說服

學習者從他人對自己的評語得到自我效能。通常他人的言語鼓勵能促使學習者花費較多的心思與努力以獲致成功，因而增強技能的發展與自我效能；而他人對自己能力的言語批評則易導致學習者無心努力於任務，且一旦遭遇挫折便輕言放棄，因此降低自我效能。此外，對於那些被說服為低自我效能者，則會避免從事挑戰性活動，面對困難時亦容易輕言放棄，因而限制其行為的選擇並減少努力，造成「自我完成預言」的效果。雖然教師對學習者說「你可以辦得到的。」可以增加學習者完成任務的信心，但自我效能的研究指出，言語的說服不像目標達成與替代經驗影響學習者的自我效能那麼多。言語的說服要伴隨著實際的成功經驗才會有效，說服者的可信度也是影響嚴與說服是否有效的重要因素之一(Schunk, 2000)，當學習者信賴的人肯定他可以有能力去完成某項任務時，可以提升自我效能。

(4)生理狀態

學習者會從自己的身心狀況或正負情緒反應為指標，判斷其自我效能的高

低。當感受生理及情緒狀態為正面時，較易產生高的自我效能；反之，則會自覺其自我效能偏低，例如：人處於過份激動的狀態下常會導致表現不佳，因此學習者在緊張、激動的狀態下，傾向於預測自己將會失敗，因而降低自我效能。一般人通常會在壓力下感到挫折，若因此而產生抑鬱或焦慮等強烈情緒，反而會妨礙個人表現適當的目標導向行為。長期在學業上的失敗經常會導致習得的無助感或沮喪的負面情緒，進而影響其學習動機，以及目標導向行為的規劃與執行。

自我效能與學業成就有顯著正相關，且自我效能可以預測學業成就和學習態度。Lent、Brown 和 Larkin (1984)探討自我效能與學業成就的關係，研究對象為42 位電機系學生，研究結果顯示，自我效能較高的學習者其學業成就也較高，自我效能是客觀預測學業態度與學業成就的中等指標。Thomas、Inventosch 和 Rohwer(1987)探討 1568 個大學、高中、初中學生的學業成就與自我效能的關係，結果發現顯示學業成就與自我效能有高度正相關。Skinner、Wellborn 和 Connell(1990)以小學生為研究對象，探討自我效能、動機和學業表現的關係，研究結果顯示自我效能、動機和學業表現之間具有關連性，且自我效能與學業表現之間有顯著相關，不同的科目、種類的學生也有這種情形。Brown(1989)則以 105 位大學生為研究對象，探討自我效能期望與學業技能及學習毅力的關係，研究結果顯示自我效能預期與學業技能及學習毅力具有中等程度的相關。

二、數學自我效能對學習之影響

在數學學習中，數學自我效能是影響學習成效的重要因素之一。數學自我效能為在特定情境或問題中學習者認為自己可以成功的完成或解決某一特定任務的信心程度(Hackett & Betz, 1989)。當學習者的數學自我效能較高時，會有較高的數學自信，數學作業的表現也會較好，並有較低的數學焦慮，因此會有較佳的學業表現(陳玉玲, 1995; 魏麗敏, 1996; Hackett & Betz, 1989; Schunk, 2000)。數學自我效能與學習成就為正相關，且可以顯著預測數學學習成就，Hackett & Betz (1989)探討學習成效、數學自我效能與數學學習態度的關係，研究結果指出學習成效與

數學自我效能為中度相關，學習成效、數學自我效能、和數學學習態度均達顯著正相關。Randhawa、Beamer、和 Lundberg (1993)以加拿大 225 位高中生為研究對象，研究結果指出數學自我效能為數學態度與數學成績的中介變項。劉信雄(1992)則以國小學生為研究對象，研究結果顯示國小學生數學自我效能對於數學學業成就表現有顯著的預測力，男生的數學自我效能顯著優於女生的數學自我效能。每一種能力層次的學習者，其高數學自我效能者其學習成就都會比低數學自我效能者好(Bouffard-Bouchard, 1989)，對於國小學生而言，數學成就較高者其自我效能顯著高於低數學成就者(吳知賢, 1996)。

由上述文獻探討可知，數學自我效能的高低會影響數學學習成就、學習表現、與學習態度，自我效能也會影響人們嘗試解決任務時的動機、願意付出努力的程度、當面臨困難時堅毅的程度、以及面對失敗挫折的反應方式。等值分數概念對國小學生來說是較困難學習內容，數學自我效能的高低會影響學習的表現，本研究期探究數學自我效能的高低對等值分數概念學習之影響。

第四節　歸納與結論

綜合前述文獻探討，現今等值分數教材提供的範例不適當，導致解決等值分數問題所應具備的能力不足，且實體教具不易說明等值分數概念，均可能造成國小學生等值分數概念學習成效不佳，等值分數概念對國小學生來說是較困難的學習內容，數學自我效能是影響數學學習成就及學習態度的重要因素之一。因此，本研究就不同範例融入方式分為連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、及整合型範例資訊科技融入教學，探究高、低數學自我效能者接受不同範例融入方式之教學後，對等值分數彈性思考表現及學習態度之影響。

從文獻探討中可知，等分概念、彈性思考能力、組合能力、運作思考能力、及單位形成能力為影響學習者等值分數概念學習之因素，由於等分概念是學習者的先備知識，在本研究中不予探討，文獻中的彈性思考能力、組合能力所指意涵有重複之處，研究者將其重新分類並命為補畫能力、分割能力、及組合能力。本研究將所有影響學習者等值分數概念學習之因素稱為「等值分數彈性思考」，等值分數彈性思考之歸納如表 2-1 所示，依據所需彈性思考的程度，將等值分數彈性思考分為「基本彈性思考」及「進階彈性思考」，等值分數之基本彈性思考包含基本補畫能力、及分割能力；等值分數之進階彈性思考能力包含進階補畫能力、組合能力、運作思考能力、及單位形成能力，本研究探討不同的範例融入方式及數學自我效能對等值分數彈性思考表現及數學學習態度之影響。

表 2-1

等值分數彈性思考歸納

等值分數彈性思考	能力分項	意　　涵
基本彈性思考	基本補畫能力	解決連續量情境之等值分數問題時，塗色區塊是連續的，想像或忽視分割線之彈性思考能力。
	分割能力	解決離散量情境等值分數問題時，將一群相同的物品進行重新分割或合併之彈性思考能力。
進階彈性思考	進階補畫能力	解決連續量情境之等值分數問題時，學習者必須先將不連續的塗色區塊集中在一起，並且有忽視或想像分割線之彈性思考能力。
	組合能力	解決離散量情境等值分數問題時，將兩種以上不同物品重新排列後，再重新分割或合併，呈現切割與拼湊之彈性思考能力。
	運作思考能力	等積異形之等值分數問題，學習者必須不受視覺的誘導，推論出圖形是一樣大的。
	單位形成能力	將全部以適當的「單位」分盡後，再利用這個單位重組成全部或集合的可逆轉能力。

第三章　研究方法

本研究以國小數學學習領域中「等值分數」單元進行教學實驗，旨在探討不同範例融入方式及數學自我效能對國小五年級學生等值分數彈性思考表現、學習態度之影響。以下就研究對象、研究設計、研究工具、實驗程序及資料分析分別說明。

第一節　研究對象

本研究之研究對象為國小五年級學生，研究樣本為台北市某國民小學之五年級學生，該校學生四年級升五年級時會進行常態分班，根據其學業成績採 S 型分班法，故各班級的學生程度較為平均。參與者進行教學實驗前均學習過等分概念、簡單分數概念、單位量概念等分數基本概念，已具備學習等值分數先備知識，但尚未學習等值分數概念。為配合原班級課程安排，在五年級 13 個班級中以班級為單位，隨機抽取三個班共 100 位參與者，隨機分派為連續型範例一般教學組 34 人、連續型範例資訊科技融入教學組 32 人、整合型範例資訊科技融入教學組 34 人。為求實驗的準確性，將未能全程參與的 5 人、特殊兒童 1 人、以及極端值 4 人剔除，因此有效樣本為 90 人，其中男生 48 人(53%)，女生 42 人(47%)，年齡介於 10 至 11 歲之間。數學自我效能之評定，各組依據數學自我效能量表所測得之分數高低排序，前 50%的學習者為高數學自我效能，數學自我效能量表得分介於 75~90，後 50%的學習者為低數學自我效能，數學自我效能量表得分介於 33~74。本研究教學實驗之分組及各組人數分配如表 3-1 所示，連續型範例一般教學組 30 人，其中 15 人為高數學自我效能、15 人為低數學自我效能；連續型範例資訊科技融入教學組 30 人，其中 15 人為高數學自我效能、15 人為低數學自我效能；整合型範例資訊科技融入教學組 30 人，其中 15 人為高數學自我效能、15 人為低數學自我效能。

表 3-1

教學實驗之分組及各組人數分配表

數學自我效能 範例融入方式	高數學自我效能	低數學自我效能	總計
連續型範例一般教學組	15	15	30
連續型範例資訊科技融入教學組	15	15	30
整合型範例資訊科技融入教學組	15	15	30
總　　計	45	45	90

擔任本研究實驗教學的教師即為各班數學老師，具有 2 至 4 年的教學經驗，具備資訊科技融入教學之能力，不畏懼且願意使用電腦進行教學活動。研究者在教學實驗前先向各班數學老師說明實驗內容，示範說明虛擬教具的使用方式，以及如何進行教學，教學者均按照研究者設計的教學活動進行教學，教案中包括佈題內容、問題提示、問題導引、教學重點、教學時間以及教學注意事項，以控制不同教學者進行實驗教學所會產生的變異。

第二節　研究設計

本研究採用因子設計(factorial design)之準實驗研究法，研究架構如圖 3-1 所示，探討等值分數之不同範例融入方式以及數學自我效能對學習者等值分數彈性思考表現、及數學學習態度的影響。

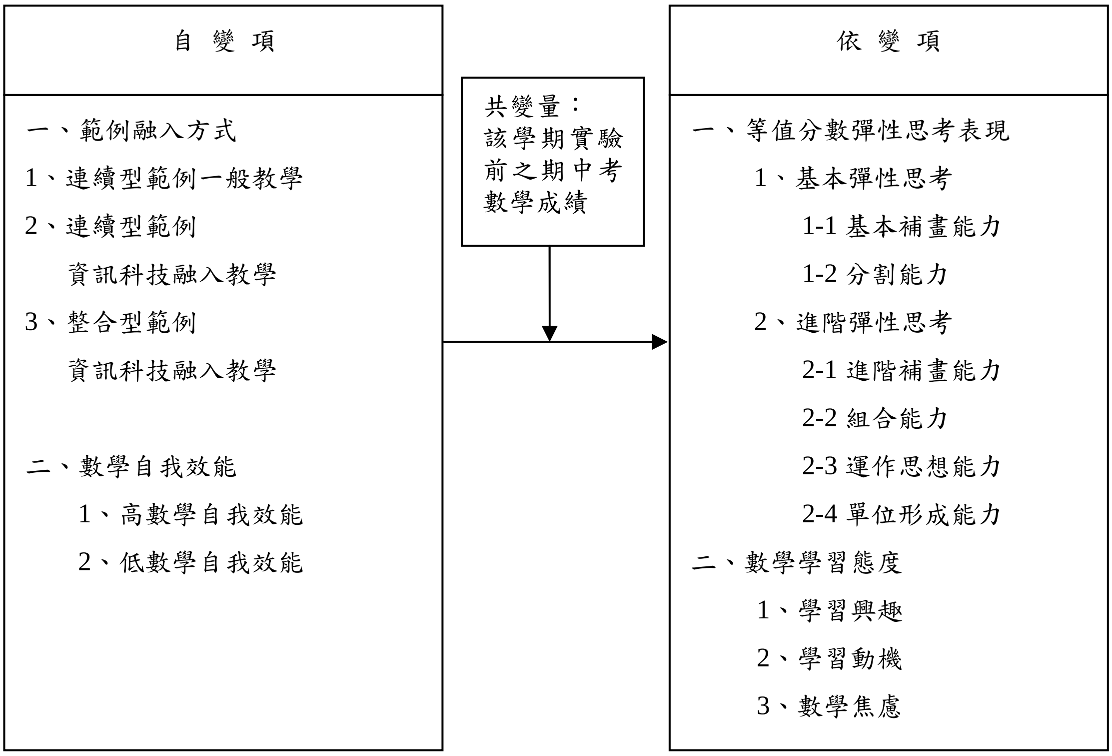


圖 3-1　研究架構圖

本研究自變項有二，分別為「範例融入方式」與「數學自我效能」。「範例融入方式」依據不同的演練範例與操弄的教具，分成連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、整合型範例資訊科技融入教學三種。「連續型範例一般教學」是指演練範例為連續型等值分數之問題，上課時未使用電腦進行教學，教師講述等值分數概念時，輔以實體教具操作講解說明，以利學童理解抽象概念，上課時給予學童操作實體教具的機會，以驗證其中之數學概念；「連續型範例資訊科技融入教學」是指演練範例為連續型等值分數之問題，上課時使用電腦進行教學，教師講述等值分數概念時，輔以虛擬教具操作講解說明，以利學童理解抽

象概念，上課時給予學童操作虛擬教具的機會，以驗證其中之數學概念；「整合型範例資訊科技融入教學」是指演練範例除了連續型等值分數問題之外，還有非連續型的等值分數問題，以促進學習者彈性思考之能力，且上課時使用電腦進行教學，教師講述等值分數概念時，輔以虛擬教具操作講解說明，以利學童理解抽象概念，上課時給予學童操作虛擬教具的機會，以經驗其中之數學概念。數學自我效能為學生對於自己數學能力的知覺，也就是說學生認為自己是否可以了解以及有效的執行數學學習活動的一種信念。「數學自我效能」依據數學自我效能量表所測得之分數高低排序，各組前 50%的學習者為高數學自我效能，後 50%的學習者為低數學自我效能。

本研究依變項有二，分別為「等值分數彈性思考表現」與「數學學習態度」。「等值分數彈性思考表現」是指經由實驗教學後學習者的等值分數彈性思考表現情形包括(1)基本彈性思考：基本補畫能力、分割能力；(2)進階彈性思考：進階補畫能力、組合能力、運作思考能力、單位形成能力。「數學學習態度」是指經由實驗教學後學習者對於數學學習態度之看法，包括學習興趣、學習動機、及數學焦慮。

為配合受試者原班級之課程安排，本研究以班級為單位進行教學實驗，實驗時間為兩節課，共計 80 分鐘，教學者為原班級數學老師。

第三節　研究工具

本研究所使用的研究工具包括(1)數學自我效能量表、(2)等值分數教材、(3)等值分數成就測驗、(4)數學學習態度問卷，共四項，各項研究工具詳述如下：

一、數學自我效能量表

本研究數學自我效能量表之目的在評定學習者對於自己是否可以了解以及有效的執行數學學習活動的信念。數學自我效能量表改編自 Sherer 和 Maddux (1982)所發展之自我效能量表中的一般性自我效能，並經過專家審閱修定，具有適切之內容效度。量表內容分為主動嘗試、努力堅持、自我信心三個向度，「主動嘗試」指的是學習者面對新的數學學習活動，或較困難的數學任務時，主動學習之信心程度；「努力堅持」指的是學習者學習數學時，面臨挫折或對學習目標努力堅持學習之信心程度；「自我信心」指的是學習者學習數學時，對於完成任務之信心程度。數學自我效能量表每個向度之題目各有 6 題，共 18 題。本量表採用 Likert Scale 的五點量尺，1 代表非常不同意、2 代表不同意、3 代表普通、4 代表同意、5 代表非常同意，評分方式為回答 1 者給 1 分、回答 2 者給 2 分，以此類推，總分最低為 18 分，最高為 90 分。總得分愈高代表數學自我效能愈高，對於自己了解以及有效的執行數學學習活動的信念愈高。

數學自我效能量表預試實施對象為台北市某國民小學五年級學生，共 62 人。預試量表向度及題數分配如表 3-2 所示，數學自我效能量表的信度經內部一致性考驗，主動嘗試面向之 Cronbach’s α = .90；努力堅持面向之 Cronbach’s α = .87；自我信心面向之 Cronbach’s α = .82；全量表所得之 Cronbach’s α = .95，內部一致性係數合乎理想。

表 3-2

數學自我效能預試量表向度、題數分配及內部一致性

向　　度	題 目 編 號	題數	Cronbach's α
主動嘗試	1、4、7、10、13、16	6	.90
努力堅持	2、5、8、11、14、17	6	.87
自我信心	3、6、9、12、15、18	6	.82
總　　計		18	.95

數學自我效能正式量表向度及題數分配如表 3-3 所示，詳細內容如附錄一。數學自我效能正式量表的信度經內部一致性考驗，主動嘗試面向之 Cronbach's α = .88；努力堅持面向之 Cronbach's α = .85；自我信心面向之 Cronbach's α = .84；全量表所得之 Cronbach's α = .94，內部一致性係數合乎理想。本研究數學自我效能之分組為量表總得分前 50%之學習者為高數學自我效能組，量表總得分後 50%之學習者為低數學自我效能組。

表 3-3

數學自我效能正式量表向度、題數分配及內部一致性

向　　度	題 目 編 號	題數	Cronbach's α
主動嘗試	1、4、7、10、13、16	6	.88
努力堅持	2、5、8、11、14、17	6	.85
自我信心	3、6、9、12、15、18	6	.84
總　　計		18	.94

二、等值分數教材

本研究教材依據康軒版第九冊等值分數單元之課程內容設計，並經由三位現職國小數學科教師審閱後修定而成。等值分數單元目標為在整體「1」之具體情境中，認識等值分數，因此，有以下之具體目標：在連續量及離散量之情境下(1)察覺 1 和$\frac{n}{n}$、$\frac{n}{n}$和$\frac{m}{m}$(n、m 是正整數)的等值關係；(2)透過不同的等分割活動，理解真分數的等值分數；(3)給定整體量及部分量，能使用等值分數描述此部分量與整體量的關係。等值分數單元之教學目標如表 3-4 所示。

表 3-4

等值分數單元之教學目標

單元目標	具體目標	九年一貫能力指標
在整體「1」之具體情境中，認識等值分數	1、 察覺 1 和 $\frac{n}{n}$、$\frac{n}{n}$ 和 $\frac{m}{m}$ (n、m 是正整數)的等值關係。 2、 透過不同的等分割活動，理解真分數的等值分數。 3、 給定整體量及部分量，能使用等值分數描述此部分量與整體量的關係。	4-n-08 能理解等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。

教學設計參考Gagne系統化教學事件，由進漸至分化、由統整至調和、從一般概念說明逐漸進入詳細內容的理論講解，教學程序如表3-5所示：

表 3-5

等值分數單元之教學程序

學習階段	教學事件	功　　能	教學程序
準備學習	1、注意	使學習者注意刺激	利用媒體、科技或新奇的事物引起學習者注意
	2、期望	確定學習目標	呈現問題，了解學習目標
	3、檢索至運作記憶	使學習者回憶起先備知識	利用情境範例喚起學習者先備知識，以利新舊知識的連結
獲得與表現	4、選擇刺激時特徵的知覺	使重要之刺激特徵暫存於運作記憶(短期記憶)中	呈現新知識並敘述新知識的理論
	5、語意的編碼	將刺激特徵和相關資訊轉移至長期記憶	展示範例，並講解範例的理論基礎
	6、檢索與反應	將儲存之資訊轉回到個體之反應發生器並發動反應	引發行為表現：讓學習者操作教具
	7、增強	證實學習者之學習目標達成，提供回饋	學習者發表自我想法，針對正確或不正確的結果教師提供回饋並總結
檢索與遷移	8、檢索線索	評估成效	評量學習成效
	9、類化	增進學習遷移至新的情境	將所學概念應用於生活情境中

本研究主要的目的為探討不同的範例融入方式對國小五年級學生學習等值分數之影響。依據範例的不同分成「連續型範例」和「整合型範例」。連續型範例指的是連續型等值分數問題；整合型範例指的是除了解決連續型等值分數問題外，還有非連續型等值分數問題。依據教學方式的不同分成「一般教學」和「資

訊科技融入教學」，一般教學指的是教師講解等值分數概念時，輔以實體教具操作說明，並給予學生適當的操作機會以驗證其中之數學概念；資訊科技融入教學指的是教師講解等值分數概念時，輔以虛擬教具操作說明，並給予學生適當的操作機會以驗證其中之數學概念。本研究之虛擬教具為袁媛、吳東光、林素微(2007)國科會研究計畫所開發之萬用揭示板(Magic Board)以及分數棒，萬用揭示板不但保有實體教具的效能，甚至超越實體教具的限制，呈現出更清楚的數學概念，此工具目前建置於網路上(Http://163.21.193.5)，另外一個虛擬教具為分數棒，如圖 3-2 所示，也是計畫中所開發出來的虛擬教具，但目前尚未公開放至網路上，分數棒是以長度模式探索分數的互動性工具。

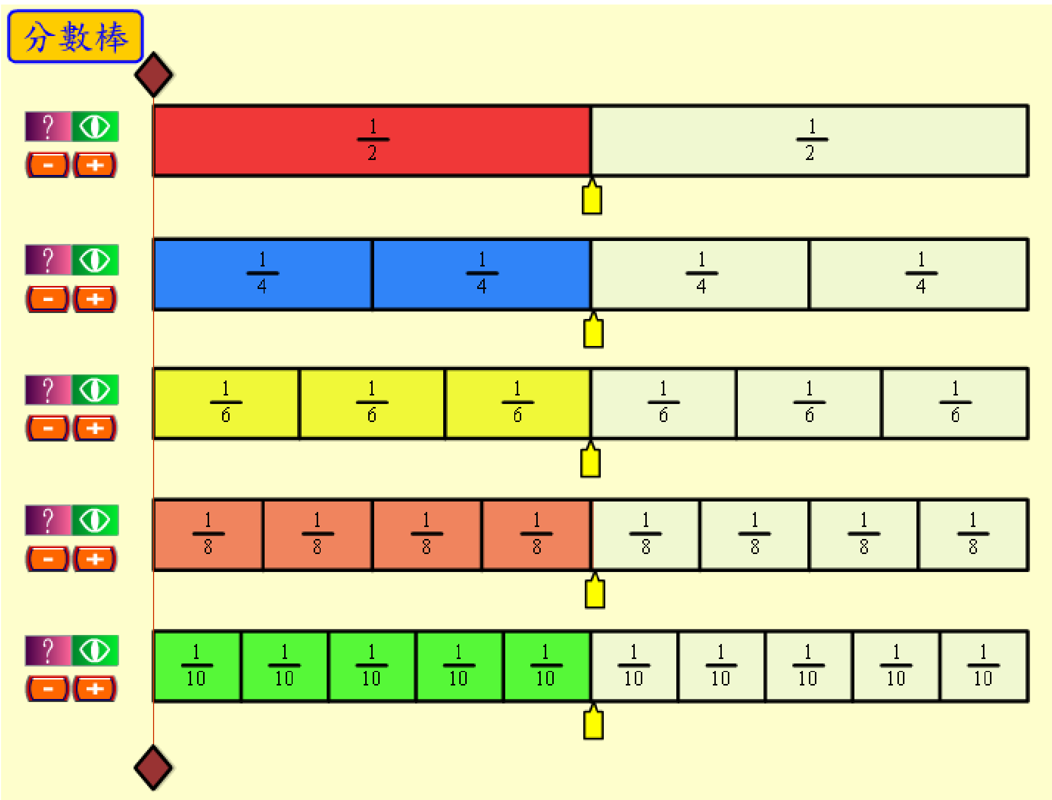


圖 3-2　分數棒

本研究依據不同的範例融入方式分成「連續型範例一般教學」、「連續型範例資訊科技融入教學」、「整合形範例資訊科技融入教學」三組。「連續型範例一般教學」和「連續型範例資訊科技融入教學」差別在於使用的教具不同，連續型範

例一般教學是操作實體教具驗證等值分數概念；連續型範例資訊科技融入教學是操作虛擬教具等值分數概念，兩組在範例、概念講解方式均相同，因此，以下就「連續型範例資訊科技融入教學」和「整合型範例資訊科技融入教學」分別說明教材不同之處。

1、連續型範例資訊科技融入教學

在連續量情境下，連續型範例指的是塗色區塊皆是連續不分散的，學習者能以不同名稱稱呼同一個分數，且有想像或忽略分割線之能力，連續量情境之連續型等值分數範例包含長度模式和面積模式等值分數問題。如圖 3-3 所示，以長度模式之連續型等值分數範例為例，要找出與二分之一等值的分數，學習者可使用分數棒虛擬教具，先找出適當的分割方式，並塗上顏色，找出與二分之一條彩帶相等之彩帶，分數棒虛擬教具只能以拖拉的方式在圖形上塗顏色，因此塗色區塊皆是連續不分散，並且可使用對齊線判斷每個分數圖形是一樣長的。

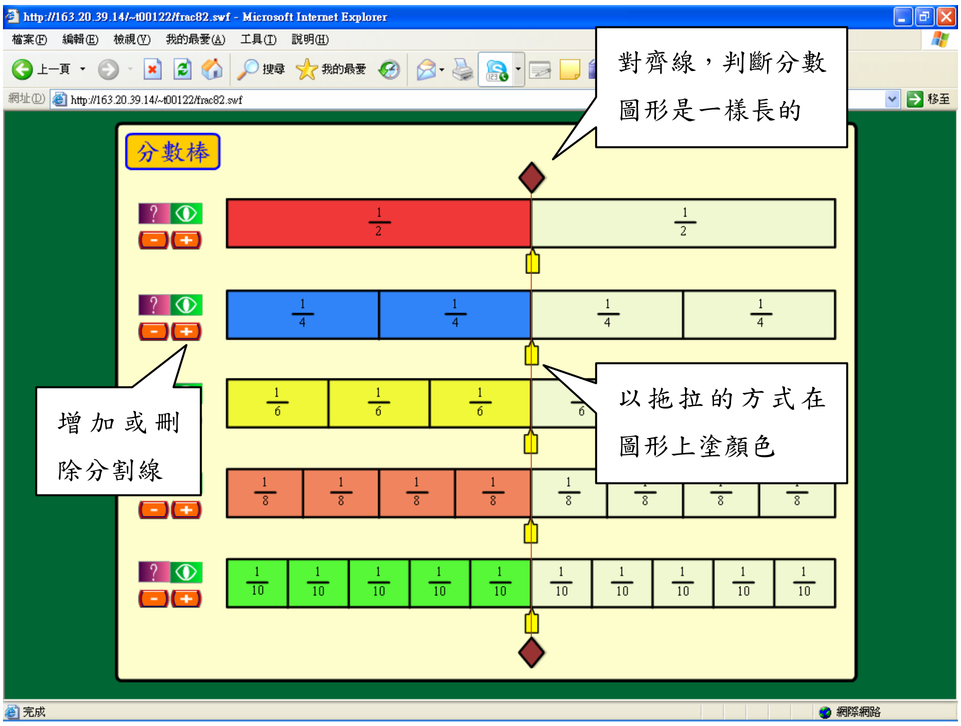


圖 3-3　長度模式之連續型等值分數範例

連續型範例中面積模式之等值分數問題也是指塗色區塊皆是連續不分散的，學習者能以不同名稱稱呼同一個分數，且有想像或忽略分割線之能力。如圖 3-4 為例，要找出四分之三的等值分數，學習者可以使用虛擬教具在圖形上任意增加或減少分割線，並且在任意小格子中塗上顏色，找出四分之三之等值分數。

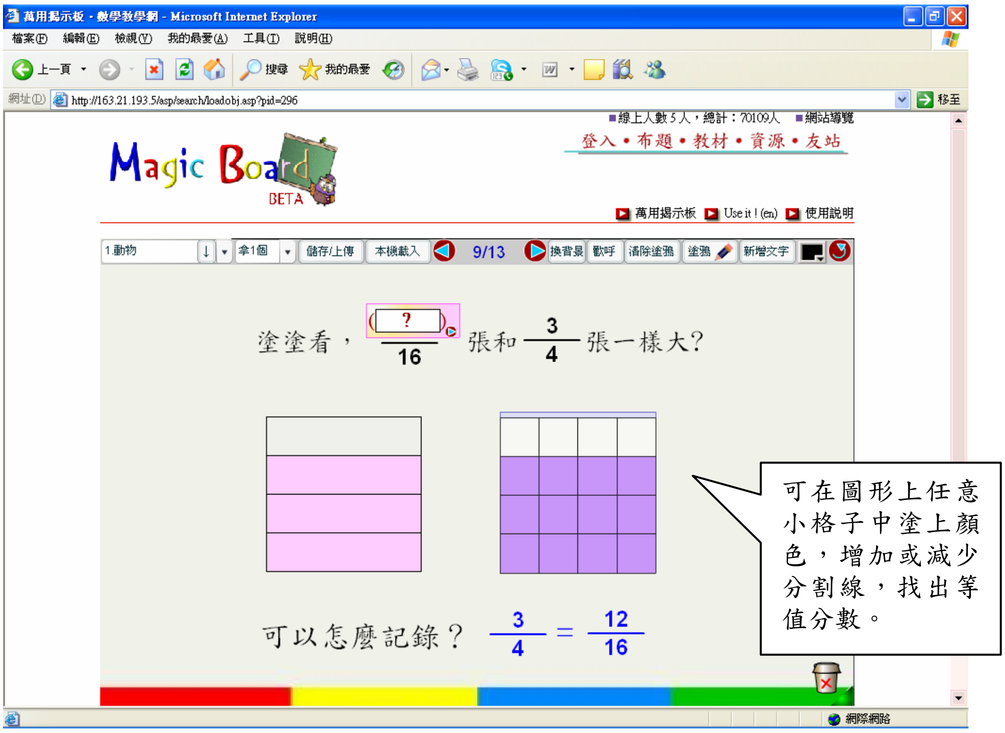


圖 3-4　面積模式之連續型等值分數範例

在離散量情境下，連續型範例指的是群組模式之等值分數問題，在一群相同的物品中，進行重新分割或合併理解兩個分數的量相同。如圖 3-5 所示，比較五分之二盒蘋果和十五分之六和蘋果哪一個多？可利用虛擬教具增加或減少分割線，找出最適當的分割方式，並提供著色功能，幫助學生察覺兩個分數的量是相等的。

圖 3-5　群組模式之連續型等值分數範例

2、整合型範例資訊科技融入教學

整合型範例為提供學習者連續型等值分數範例外，還提供可以促進學習者彈性思考之範例。在連續量情境下，整合型範例指的是塗色區塊不是連續的，學習者必須先將不連續的區塊排列成連續的區塊，並有想像或忽視分割線的能力，以不同名稱稱呼同一個分數，連續量情境之整合型等值分數範例包含長度模式和面積模式等值分數問題。如圖 3-6 所示，以長度模式之整合型等值分數範例為例，要找出三分之一等於六分之幾，學習者可使用虛擬教具增加或刪除分割線，找到適當的分割方式，可在六等分的分數長條中任意一小格中塗上顏色，塗上顏色後可將不連續的區塊搬移至一起，使分數圖形形成連續的區塊，並提供三等分的分數長條，以驗證三分之一等於六分之二。

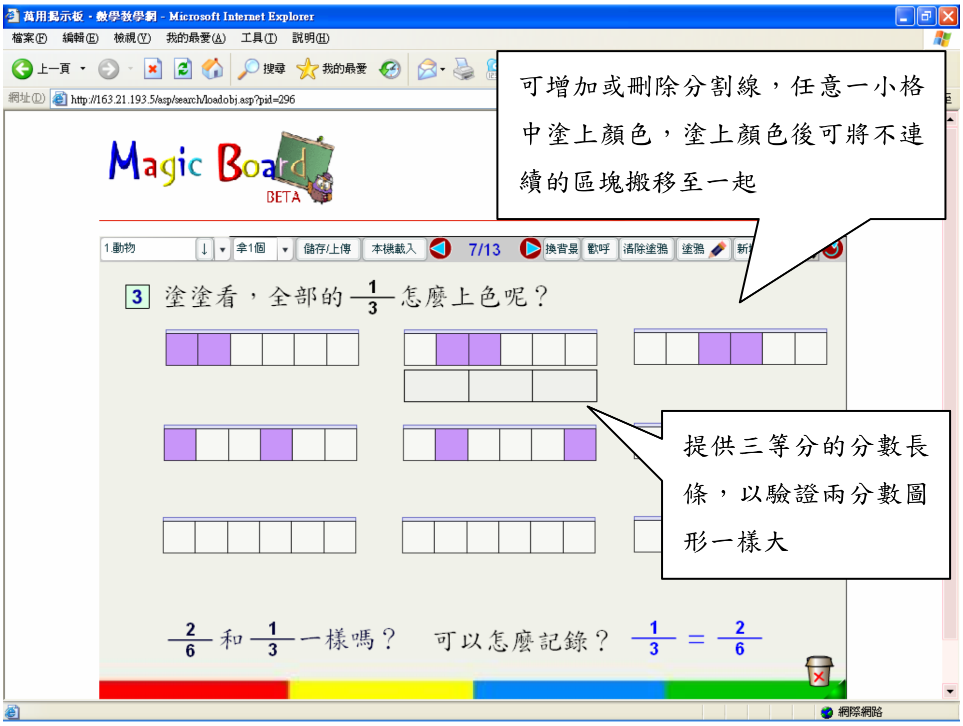


圖 3-6　長度模式之整合型等值分數範例

整合型範例中面積模式之等值分數問題也是指塗色區塊不是連續的，學習者必須先將不連續的區塊排列成連續的區塊，並有想像或忽視分割線的能力，以不同名稱稱呼同一個分數。如圖 3-7 所示，要找出四分之三的等值分數，學習者可以使用虛擬教具在圖形上任意增加或減少分割線，並且在任意小格子中塗上顏色，再將不連續的區塊搬移至一起，使分數圖形形成連續的區塊，找出四分之三之等值分數。

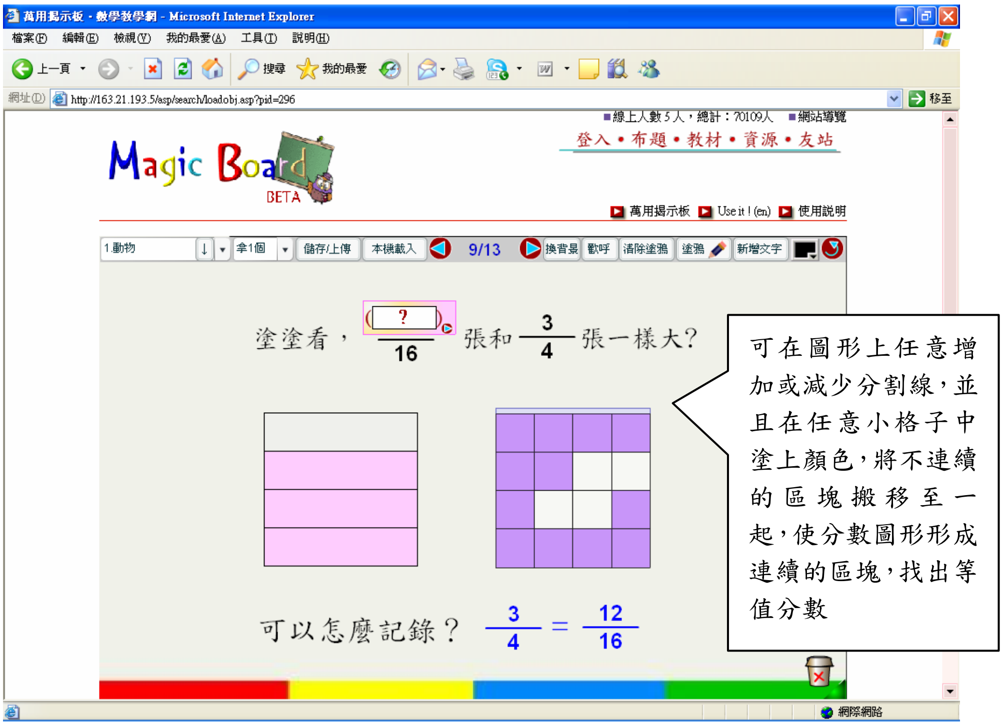


圖 3-7　面積模式之整合型等值分數範例

在離散量情境下，整合型範例指的是群組模式之等值分數問題，有兩種以上不同物品，學習者必需先重新排列，並找到適當的分割方式，以理解兩個分數的量相同。如圖 3-8 之範例，要找出二十四之十六的等值分數，A 圖中物品排列方式是分散的，學習者必須先移動圖形重新排列，將相同的物品排列至一起，如 B 圖所示，再使用塗鴉功能找到適當的分割方式畫出分割線，並將多個物體視為一群，理解兩個分數的量相同，找出等值分數。

A

B

圖 3-8　群組模式之整合型等值分數範例

本研究依據不同的範例融入方式，可分為三種不同的實驗介入，分別為「連續型範例一般教學」、「連續型範例資訊科技融入教學」、「整合型範例資訊科技融入教學」。教學過程中，教師先以媒體、科技或新奇的事物引起學習者學習動機，引導學習者回顧先備知識，說明學習目標後，進入新課程之教學活動。教學活動是給予學習者不同的等值分數演練範例，「連續型範例一般教學」及「連續型範例資訊科技融入教學」給予學習者連續型的等值分數問題；「整合型範例資訊科技融入教學」給予學習者整合型的等值分數問題，將等值分數概念融入生活化的應用範例，教師使用教具解說範例，並引導學習者思考和解決問題，「連續型範例一般教學」使用實體教具；「連續型範例資訊科技融入教學」及「整合型範例資訊科技融入教學」使用虛擬教具，並配合學習單進行學習，理解等值分數概念，各組學習者操作不同的教具以經驗其中的數學概念，等值分數單元之教學流程如圖 3-9 所示。

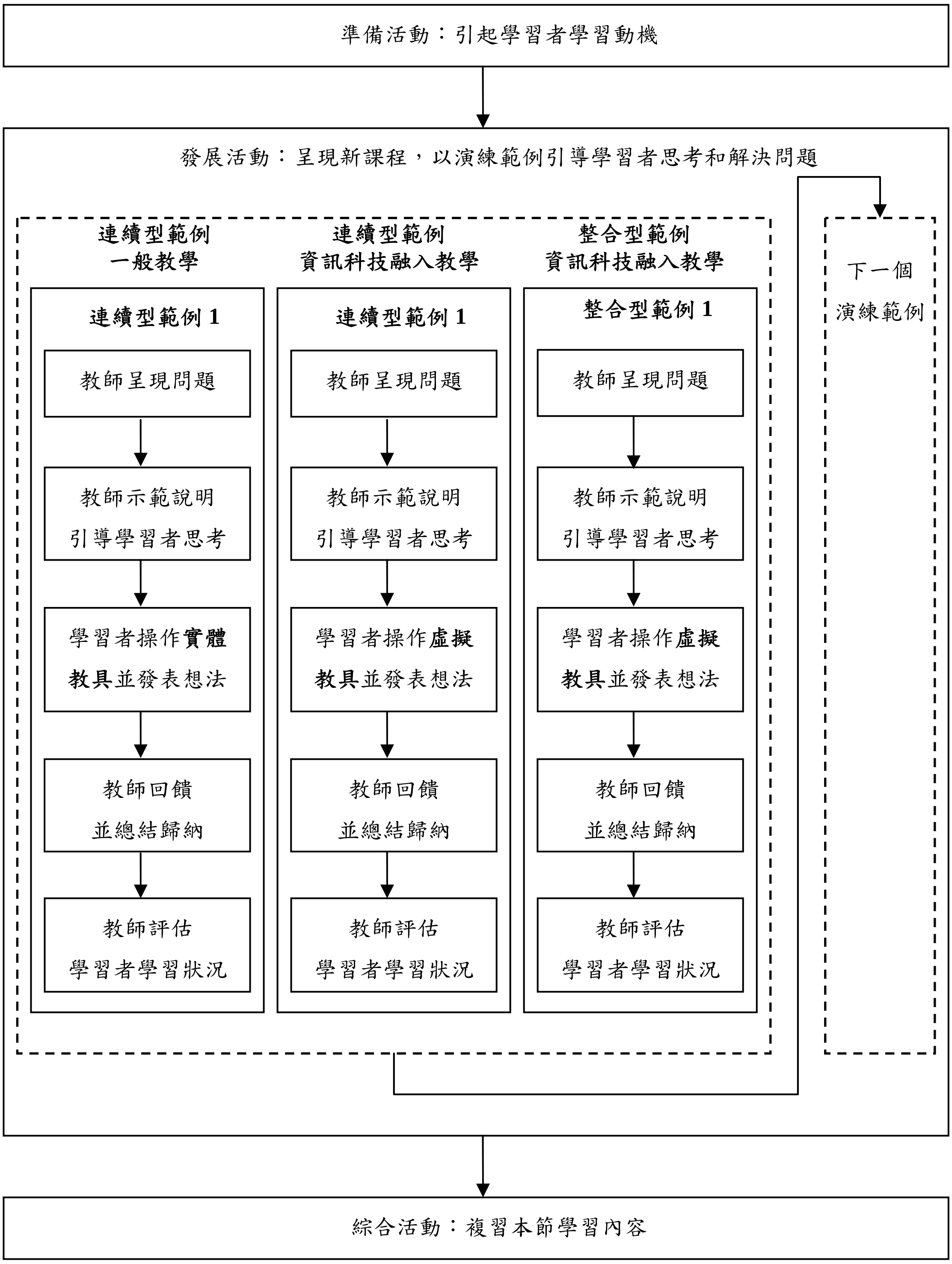


圖 3-9　等值分數單元之教學流程

三、等值分數成就測驗

等值分數成就測驗目的在評量學習者透過不同範例融入方式，進行教學實驗後之等值分數彈性思考表現情形。測驗依據單元教學內容並參考陳雅芬(2003)、

曹萬春(2004)等人之研究編制而成，為避免學童只是機械式的將分子、分母同乘或同除一數而得到等值分數，故本研究以圖形式的表徵來測驗學童的等值分數概念，皆以選擇題的方式進行測驗，詳細內容如附錄三。

等值分數成就測驗試題內容分為「基本彈性思考」及「進階彈性思考」兩類型，試題內容分析如表 3-6 所示。「基本彈性思考」旨在評量學習者解決連續型等值分數問題表現之情形，為較基本的等值分數彈性思考能力，並將基本彈性思考分為基本補畫能力以及分割能力兩個能力分項。「基本補畫能力」為評量學習者在連續量情境下，解決連續型等值分數問題之能力，及學習者是否有想像或忽視分割線之彈性思考能力，題目內容包括(1)單位等分段等於分母的因數、(2)單位等分段等於分母的倍數、(3)單位等分段與分母無倍數關係三種等值分數問題。「分割能力」為評量學習者在離散量情境下，解決連續型等值分數問題之能力，即學習者將一群相同的物品，進行重新分割或合併理解等值分數之彈性思考能力。「進階彈性思考」旨在評量學習者解決非連續型等值分數問題表現之情形，為較進階的等值分數彈性思考能力，並將進階彈性思考分為進階補畫能力、組合能力、運作思考能力、單位形成能力四個能力分項。「進階補畫能力」為評量學習者在連續量情境下，解決非連續型等值分數問題之能力，即學習者是否能先將不連續的區塊集中在一起，並且有忽視或想像分割線之彈性思考能力，並將題目內容分成(1)單位等分段等於分母、(2)單位等分段等於分母的因數、(3)單位等分段等於分母的倍數、(4)單位等分段與分母無倍數關係四種等值分數問題。「組合能力」為評量學習者在離散量情境下，解決非連續型等值分數問題之能力，即學習者將兩種以上不同物品重新排列後，再重新分割或合併，呈現切割與拼湊之彈性思考能力。「運作思考能力」為評量學習者在不同分割形狀等值分數之能力，即等積異形之問題，檢視學習者是否可以不受視覺的誘導，推論出圖形是一樣大的。「單位形成能力」為評量學生將全部以適當的「單位」分盡後，再利用這個單位重組成全部或集合的可逆轉能力，能否在圖形中找到適當的單位，將指定的部分量盡之能力。

表 3-6

等值分數成就測驗試題內容分析

題目類型	能力分項	題目內容分析
基本彈性思考	基本補畫能力	評量學習者在連續量情境下，解決連續型等值分數問題之能力，及學習者是否有想像或忽視分割線之彈性思考能力，並將題目內容分成三種等值分數問題，如下： 1、單位等分段等於分母的因數。 2、單位等分段等於分母的倍數。 3、單位等分段與分母無倍數關係。
	分割能力	評量學習者在離散量情境下，解決連續型等值分數問題之能力，即學習者將一群相同的物品，進行重新分割或合併理解等值分數之彈性思考能力。
進階彈性思考	進階補畫能力	評量學習者在連續量情境下，解決非連續型等值分數問題之能力，即學習者是否能先將不連續的區塊集中在一起，並且有忽視或想像分割線之彈性思考能力，並將題目內容分成四種等值分數問題，如下： 1、單位等分段等於分母。 2、單位等分段等於分母的因數。 3、單位等分段等於分母的倍數。 4、單位等分段與分母無倍數關係。
	組合能力	評量學習者在離散量情境下，解決非連續型等值分數問題之能力，即學習者將兩種以上不同物品重新排列後，再重新分割或合併，呈現切割與拼湊之彈性思考能力。
	運作思考能力	評量學習者在不同分割形狀等值分數之能力，即等積異形之問題，檢視學習者是否可以不受視覺的誘導，推論出圖形是一樣大的。
	單位形成能力	評量學習者將全部以適當的「單位」分畫後，再利用這個單位重組成全部或集合的可逆轉能力。

等值分數成就測驗題目分為「基本彈性思考」及「進階彈性思考」兩類型，其中基本彈性思考細分成兩個能力分項；進階彈性思考細分成四個能力分項，共六種彈性思考能力，每種能力各有 4 題，共 24 題，每題 1 分，總分 24 分。等值分數成就測驗題目類型與分配如表 3-7 所示，題目的信度經內部一致性考驗，基本彈性思考方面，基本補畫能力之 Cronbach's α = .70；分割能力之 Cronbach's α = .75；進階彈性思考方面，進階補畫能力之 Cronbach's α = .65；組合能力之 Cronbach's α = .83；運作思考能力之 Cronbach's α = .60；單位形成能力之 Cronbach's α = .84，整份試卷所得之 Cronbach's α = .92，內部一致性係數尚可。等值分數成就測驗試題難度與鑑別度摘要如表 3-8 所示，題目難度值介於 .57～.83，鑑別度介於 .33～.86，鑑別力係數均達顯著，只有第 21 題難度值為 .90，鑑別度為 .21，題目較為簡單，整體來說，等值分數成就測驗試題具有適切的難

度與鑑別度。

表 3-7

等值分數成就測驗題目類型、題數分配及內部一致性

題目類型	能力分項	題目編號	題數	Cronbach's α
基本彈性思考	基本補畫能力	1、7、13、19	4	.70
	分割能力	2、8、14、20	4	.75
進階彈性思考	進階補畫能力	3、9、15、21	4	.65
	組合能力	4、10、16、22	4	.83
	運作思考能力	5、11、17、23	4	.60
	單位形成能力	6、12、18、24	4	.84
總　　計			24	.92

表 3-8

等值分數成就測驗試題難度與鑑別度摘要

題目類型	能力分項	題號	難度	鑑別度	點二系列相關
基本彈性思考	基本補畫能力	1	0.71	0.59	.544**
		7	0.69	0.55	.646**
		13	0.76	0.48	.717**
		19	0.57	0.86	.624**
	分割能力	2	0.72	0.55	.680**
		8	0.70	0.51	.574**
		14	0.70	0.51	.484**
		20	0.64	0.72	.686**
進階彈性思考	進階補畫能力	3	0.63	0.58	.425**
		9	0.65	0.62	.648**
		15	0.58	0.75	.627**
		21	0.64	0.72	.679**
	組合能力	4	0.59	0.83	.689**
		10	0.58	0.75	.738**
		16	0.72	0.55	.684**
		22	0.74	0.52	.681**
	運作思考能力	5	0.83	0.35	.316**
		11	0.75	0.33	.331**
		17	0.90	0.21	.238*
		23	0.79	0.41	.456**
	單位形成能力	6	0.57	0.79	.691**
		12	0.59	0.83	.704**
		18	0.59	0.83	.696**
		24	0.59	0.83	.662**

*$p < .05$
**$p < .01$

四、數學學習態度問卷

本研究數學學習態度問卷之目的在了解學習者在學習等值分數概念時，透過不同的範例融入方式之學習感受。學習態度是研究者自行編製「數學學習態度問

卷」的得分，問卷內容分為「學習興趣」、「學習動機」、「數學焦慮」三部分進行調查。「學習興趣」指的是透過不同的範例融入方式是否可以引起學習者學習興趣，進而幫助學習；「學習動機」指的是透過不同的範例融入方式是否可以引起學習者學習動機，進而讓學習者持續投入學習活動；「數學焦慮」指的是透過不同的範例融入方式是否可以改善學習者學習數學時的焦慮程度。數學學習態度問卷每個向度之題目各有 5 題，共 15 題。本量表採用 Likert Scale 的五點量尺， 1 代表非常不同意、2 代表不同意、3 代表普通、4 代表同意、5 代表非常同意。學習興趣與學習動機面向為正向題，數學焦慮面向為負向題。正向題評分方式為回答 1 者給 1 分、回答 2 者給 2 分，以此類推，負向題計分方式恰好相反，總分最低為 15 分，最高為 75 分，總得分愈高代表數學學習態度愈正向。

數學學習態度問卷預試實施對象為台北市某國民小學五年級學生，共 62 人。預試問卷向度及題數分配如表 3-9 所示，數學學習態度問卷的信度經內部一致性考驗，學習興趣面向之 Cronbach's α = .84；學習動機面向之 Cronbach's α = .86；數學焦慮面向之 Cronbach's α = .84；全量表所得之 Cronbach's α = .91，內部一致性係數合乎理想，因此作為正式問卷。

表 3-9

數學學習態度預試問卷向度、題數分配及內部一致性

向　度	題 目 編 號	題數	Cronbach's α
學習興趣	1、4、7、10、13	5	.84
學習動機	2、5、8、11、14	5	.86
數學焦慮	3、6、9、12、15	5	.84
總　計		15	.91

數學學習態度正式問卷向度及題數分配如表 3-10 所示，詳細內容如附錄二。問卷的信度經內部一致性考驗，學習興趣面向之 Cronbach's α = .83；學習動機面向之 Cronbach's α = .85；數學焦慮面向之 Cronbach's α = .72；全問卷所得之 Cronbach's α = .90，內部一致性係數合乎理想。

表 3-10

數學學習態度正式問卷向度、題數分配及內部一致性

向　　度	題 目 編 號	題數	Cronbach's α
學習興趣	1、4、7、10、13	5	.83
學習動機	2、5、8、11、14	5	.85
數學焦慮	3、6、9、12、15	5	.72
總　　計		15	.90

第四節　實驗程序

本研究之研究流程如圖 3-10 所示，包含準備階段、實施階段、結果分析階段三大部分，茲分別說明如下。

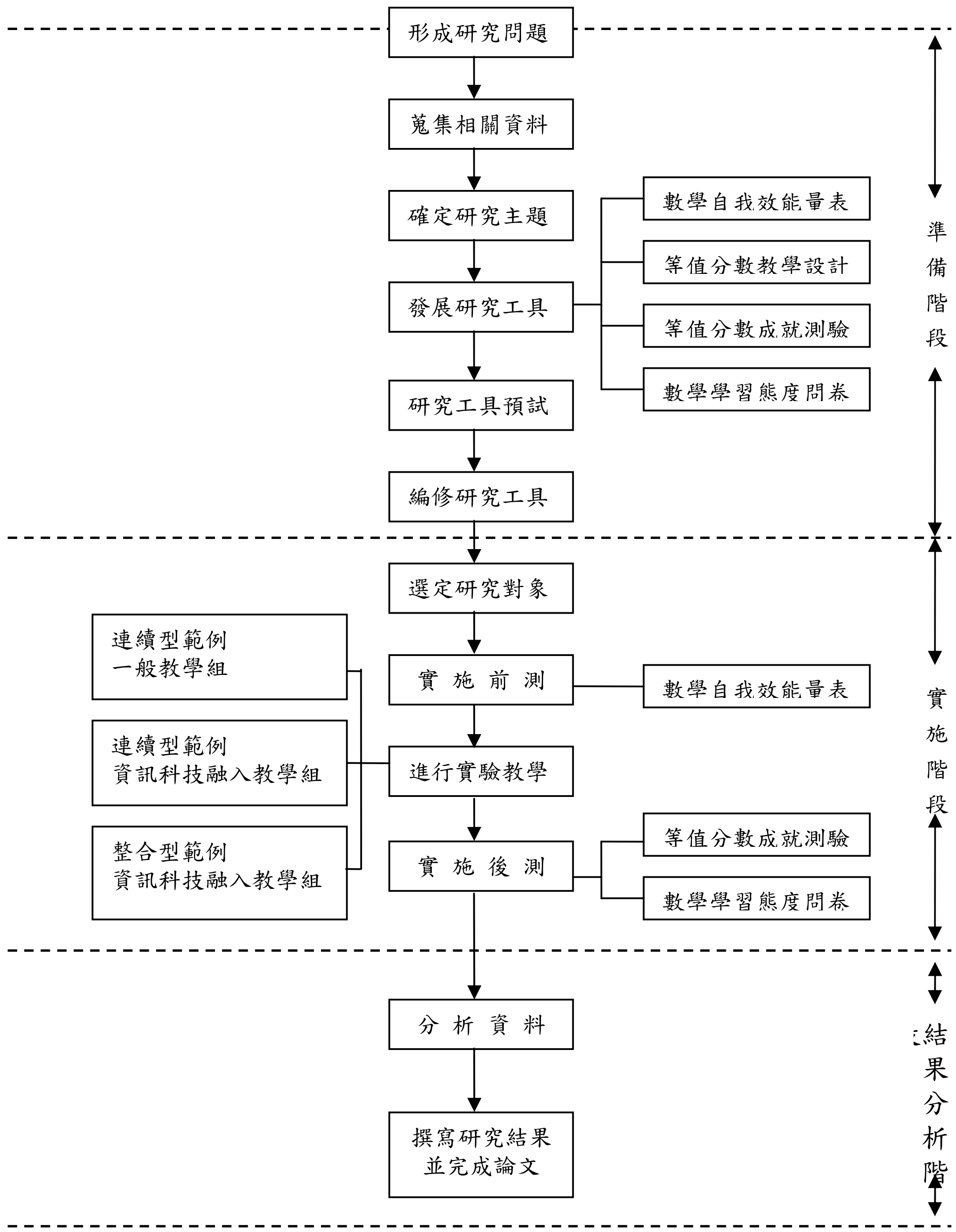


圖 3-10　研究流程圖

一、準備階段

教學實驗前必需先擬定數學自我效能量表、等值分數教材、等值分數成就測驗卷、數學學習態度問卷。等值分數單元教學設計完成後，請三位現職國小數學科教師針對教材內容之正確性、演練範例是否適當、教學導引與提問是否恰當、虛擬教具之使用性等給予修改建議，修改完成後成為正式教材。量表與問卷內容發展完成後請專家審視，接著進行預試，並針對預試結果做修改。各項研究工具編修後成為正式研究工具。

二、實施階段

準備工作結束後，接著進入實施階段，以下就前測、實驗教學、後測分別說明。

1、前測

數學自我效能量表於實驗教學前對學習者實施，調查結果作為學習者數學自我效能分組之依據，測驗時間為 10 分鐘。

2、實驗教學

「連續型範例一般教學」係指上課所提供之演練範例為連續型等值分數之問題，上課時未使用電腦進行教學，教師講述等值分數概念時，輔以實體教具操作講解說明，以利學童理解抽象概念，上課時給予學童操作實體教具的機會，以驗證其中之數學概念；「連續型範例資訊科技融入教學」係指上課所提供之演練範例為連續型等值分數之問題，上課時使用電腦進行教學，教師講述等值分數概念時，輔以虛擬教具操作講解說明，以利學童理解抽象概念，上課時給予學童操作虛擬教具的機會，以驗證其中之數學概念；「整合型範例資訊科技融入教學」係指上課所提供之演練範例除了連續型等值分數的題目之外，還有非連續型的題目，以促進學習者彈性思考之能力，且上課時使用電腦進行教學，教師講述等值分數概念時，輔以虛擬教具操作講解說明，以利學童理解抽象概念，上課時給予學童操作虛擬教具的機會，以經驗其中之數學概念。教學實施時間為二節課，共

80 分鐘。

3、後測

後測包括等值分數成就測驗與數學學習態度問卷，於實驗教學結束後對學習者實施。等值分數成就測驗用以評量學習者經由不同實驗教學後之學習成果，測驗時間為 30 分鐘；數學學習態度問卷調查用以了解各組學習者經由不同實驗教學後對數學學習上之感受，測驗時間為 10 分鐘。

三、結果分析階段

實驗教學結束後，接著進入結果分析階段。依據所收集到的資料進行分析，並撰寫研究結果。

第五節　資料分析

本研究將所收集之實驗數據，分別進行「等值分數彈性思考表現分析」及「數學學習態度分析」，統計分析之顯著水準皆設為.05，分析方法詳述如下：

一、等值分數彈性思考表現分析

等值分數彈性思考表現分析採二因子多變量共變數分析(two-factor MANCOVA)，以範例融入方式及學習者數學自我效能為自變項，等值分數成就測驗之成績為依變項，為了控制先備知識對教學實驗正確性的誤差，將參與者該學期實驗前之期中考數學成績當成共變量，增進實驗教學結果的精確性，分別進行等值分數之「基本彈性思考」與「進階彈性思考」表現分析。基本彈性思考、進階彈性思考表現之分析流程如圖 3-11 所示。

首先進行迴歸斜率同質性考驗，若符合變異數同質性的基本假設，則可進行二因子多變量共變數分析。接著進行多變量整體效果考驗，檢查範例融入方式及學習者數學自我效能兩自變項交互作用和主效果之 Wilks’ Lamda 值是否達顯著水準，若交互作用達顯著水準，則分別進行單純主效果分析(simple main effect)；若交互作用未達顯著水準，則進行主效果分析(main effect)，判斷範例融入方式和數學自我效能主效果對等值分數彈性思考是否有影響。接著檢查在共變數分析時範例融入方式及學習者數學自我效能兩自變項交互作用是否達顯著水準，若交互作用達顯著水準，則分別進行單純主效果分析，單純主效果分析若顯著則以薛費法(Scheffe’ method)進行事後多重比較；若交互作用未達顯著水準，則進行主效果分析，主效果分析若顯著則以薛費法進行事後多重比較。

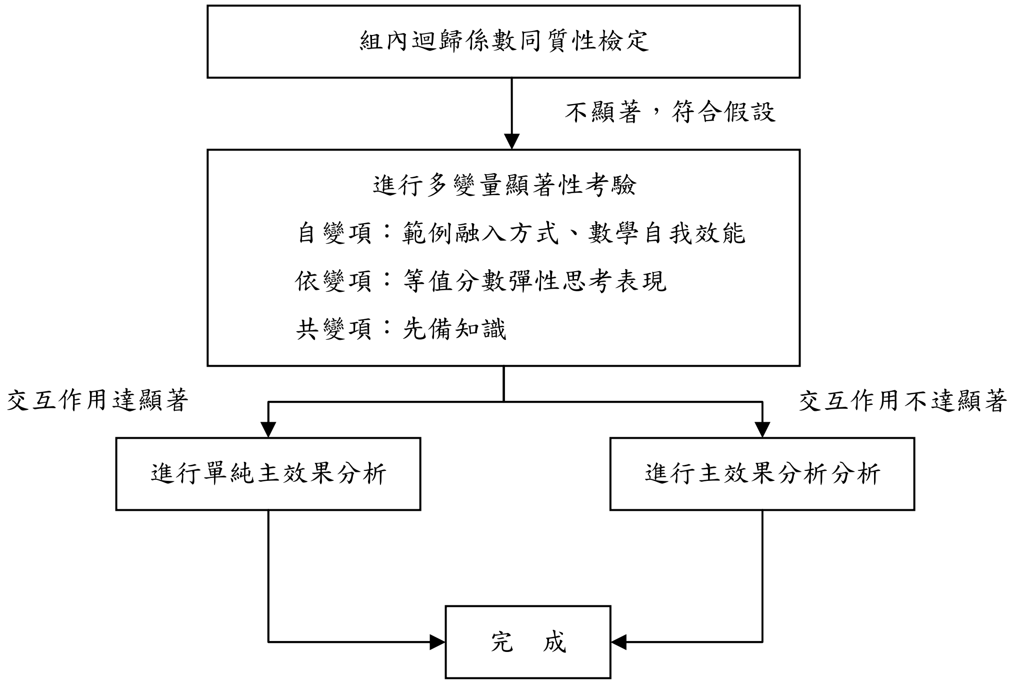


圖 3-11　等值分數彈性思考表現分析流程圖

二、數學學習態度分析

數學學習態度分析採二因子多變量共變數分析(two-factor MANCOVA)，以範例融入方式及學習者數學自我效能為自變項，數學學習態度問卷中「學習興趣」、「學習動機」、「數學焦慮」之得分為依變項，為了控制先備知識對教學實驗正確性的誤差，將參與者該學期實驗前之期中考數學成績當成共變量，增進實驗教學結果的精確性，進行數學學習態度分析。數學學習態度分析流程如圖 3-12 所示。

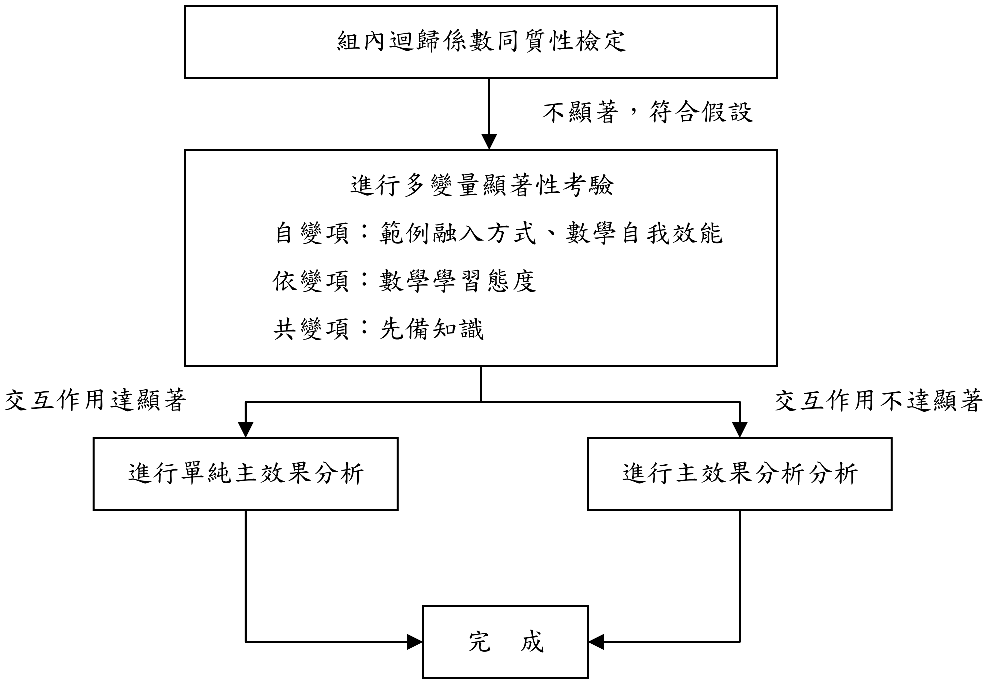


圖 3-12　數學學習態度分析流程圖

首先進行迴歸斜率同質性考驗，若符合變異數同質性的基本假設，則可進行二因子多變量共變數分析。接著進行多變量整體效果考驗，檢查範例融入方式及學習者數學自我效能兩自變項交互作用和主效果之 Wilks' Lamda 值是否達顯著水準，若交互作用達顯著水準，則分別進行單純主效果分析；若交互作用未達顯著水準，則進行主效果分析，判斷範例融入方式和數學自我效能主效果對學習態度是否有影響。接著檢查在共變數分析時範例融入方式及學習者數學自我效能兩自變項交互作用是否達顯著水準，若交互作用達顯著水準，則分別進行單純主效果分析，單純主效果分析若顯著則以薛費法進行事後多重比較；若交互作用未達顯著水準，則進行主效果分析，主效果分析若顯著則以薛費法進行事後多重比較。

第四章 結果與討論

本研究就不同範例融入方式(連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、與整合型範例資訊科技融入教學)及數學自我效能(高數學自我效能、低數學自我效能)將收集的資料分別進行「等值分數彈性思考表現分析」及「數學學習態度分析」，本研究統計分析之顯著水準皆設為 .05。

第一節　等值分數彈性思考表現分析

本研究為了解學習者透過不同範例融入方式進行等值分數教學實驗後彈性思考之表現，進行等值分數彈性思考表現分析，其中包括「基本彈性思考」表現分析和「進階彈性思考」表現分析，為了控制先備知識對教學實驗正確性的誤差，將參與者該學期期中考數學成績當成共變量，範例融入方式(連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、與整合型範例資訊科技融入教學)、數學自我效能(高、低數學自我效能)為自變項，等值分數彈性思考表現(基本彈性思考：基本補畫能力、分割能力；進階彈性思考：進階補畫能力、組合能力、運作思考能力、單位形成能力)為依變項，分別進行二因子多變量共變數分析，以檢視各組學習者在等值分數彈性思考的表現情形。以下針對等值分數之「基本彈性思考」及「進階彈性思考」表現分析分別敘述。

一、等值分數之「基本彈性思考」表現分析

基本彈性思考為學習者解決連續型等值分數問題之能力，解題的過程中運用較少彈性思考能力，基本彈性思考包含「基本補畫能力」與「分割能力」兩個能力分項。本研究以二因子多變量共變數分析檢視各組經由實驗教學後在基本彈性思考中各能力分項之平均數是否有顯著差異。

本研究先以敘述統計初探基本彈性思考整體得分情形，各組在等值分數基本彈性思考之調整平均數、標準差及人數，如表 4-1 所示。調整平均數之結果顯示，

就範例融入方式而言，學習者接受整合型範例資訊科技融入教學(mean= 6.628)成績最高，其次為連續型範例一般教學(mean= 5.864)，連續型範例資訊科技融入教學(mean= 5.541)成績最低；就數學自我效能而言，高數學自我效能者成績高於低數學自我效能者(高數學自我效能 mean= 6.330；低數學自我效能 mean= 5.693)。學習者接受整合型範例資訊科技融入教學，在等值分數基本彈性思考上表現較佳，高數學自我效能者表現優於低自我效能者。

表 4-1

各組在等值分數基本彈性思考整體之調整平均數、標準差及人數

範例融入方式	數學自我效能	Adjusted Mean (調整平均數)	Std. Deviation (標準差)	N (人數)
連續型範例一般教學	高數學自我效能	6.121	2.219	15
	低數學自我效能	5.607	2.154	15
	總合	5.864	2.233	30
連續型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	5.956	1.474	15
	低數學自我效能	5.127	2.764	15
	總合	5.541	2.417	30
整合型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	6.912	.834	15
	低數學自我效能	6.344	2.314	15
	總合	6.628	1.923	30
總合	高數學自我效能	6.330	1.651	45
	低數學自我效能	5.693	2.405	45
	總合	6.011	2.216	90

接著以敘述統計初探等值分數基本彈性思考中兩個能力分項的得分情形，各組在基本補畫能力及分割能力之調整平均數、標準差及人數，如表 4-2 所示。調整平均數之結果顯示，就範例融入方式而言，學習者接受整合型範例資訊科技融入教學(mean= 3.513)在基本補畫能力上成績最高，其次為連續型範例資訊科技融入教學(mean= 2.825)，連續型範例一般教學(mean= 2.662)成績最低；學習者接受連續型範例一般教學(mean= 3.202)在分割能力上成績最高，其次為整合型範例資訊科技融入教學(mean= 2.825)，連續型範例資訊科技融入教學(mean= 2.825)成績最低。就數學自我效能而言，高自我效能學習者在基本補畫能力(高數學自我效能 mean= 3.197、低數學自我效能 mean= 2.803)及分割能力(高數學自我效能 mean=

3.133、低數學自我效能 mean= 2.889)成績皆高於低自我效能學習者。

表 4-2

各組在等值分數基本彈性思考中各能力分項之調整平均數、標準差及人數

基本彈性思考能力分項	範例融入方式	數學自我效能	Adjusted Mean (調整平均數)	Std. Deviation (標準差)	N (人數)
基本補畫能力	連續型範例一般教學	高數學自我效能	2.863	1.280	15
		低數學自我效能	2.460	1.146	15
		總合	2.662	1.251	30
	連續型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	3.194	0.632	15
		低數學自我效能	2.456	1.387	15
		總合	2.825	1.258	30
	整合型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	3.533	0.414	15
		低數學自我效能	3.494	1.014	15
		總合	3.513	0.820	30
	總合	高數學自我效能	3.197	0.918	45
		低數學自我效能	2.803	1.253	45
		總合	3.000	1.180	90
分割能力	連續型範例一般教學	高數學自我效能	3.258	1.047	15
		低數學自我效能	3.147	1.125	15
		總合	3.202	1.094	30
	連續型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	2.762	1.207	15
		低數學自我效能	2.671	1.598	15
		總合	2.716	1.440	30
	整合型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	3.379	.617	15
		低數學自我效能	2.850	1.598	15
		總合	3.114	1.322	30
	總合	高數學自我效能	3.133	.986	45
		低數學自我效能	2.889	1.435	45
		總合	3.011	1.285	90

本研究為了解範例融入方式與學習者數學自我效能在等值分數基本彈性思考中兩個子能力之二維交互作用關係，先進行組內迴歸係數同質性檢定，結果各組變異數無顯著差異存在($F_{(5,78)}$= .35，p= .881)，故符合組內迴歸係數同質性的假定。接著進行多變量整體效果考驗，由表 4-3 的結果得知，等值分數基本彈性思考表現之先備知識主效果達顯著水準(Wilks' Lamda = .499，p < .001，η^2 = .501)，顯示高、低先備知識學習者在等值分數基本彈性思考中的基本補畫能力、分割能力表現上，至少有一種能力之平均分數有顯著差異，所以學習者的先備知識會顯著影響等值分數基本彈性思考之表現，因此，將先備知識作為共變量可排除先備

知識所造成的變異。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準(Wilks' Lamda = .934，p = .231，η^2 = .033)，顯示範例融入方式與數學自我效能在基本補畫能力與分割能力上無顯著交互作用。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果達顯著水準(Wilks' Lamda = .749，p < .001，η^2 = .134)，顯示不同範例融入方式在等值分數基本彈性思考中的基本補畫能力、分割能力表現上，各組樣本至少在一種能力的平均分數上有顯著差異；數學自我效能之主效果未達顯著水準(Wilks' Lamda = .942，p= .086，η^2 = .058)，顯示高、低數學自我效能學習者在基本補畫能力與分割能力表現的平均分數無顯著差異。

表 4-3

等值分數基本彈性思考之多變量整體效果考驗摘要分析

變異來源	Wilks' Lamda	F	Sig.	Eta Squared
先備知識	.499	41.213*	.000	.501
範例融入方式	.749	6.361*	.000	.134
數學自我效能	.942	2.534	.086	.058
範例融入方式× 數學自我效能	.934	1.416	.231	.033

*p< .05

接著進行共變數分析，其共變數分析摘要如表 4-4 所示，以下就等值分數基本彈性思考中「基本補畫能力」及「分割能力」表現之分析分別敘述。在基本補畫能力表現之分析結果發現，先備知識主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 66.498，p< .001)，顯示高、低先備知識學習者在基本補畫能力表現上有顯著差異，所以學習者的先備知識會顯著影響基本補畫能力之表現，因此將先備知識作為共變量可排除先備知識所造成的變異。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準($F_{(2,83)}$= 1.508，p= .227)，顯示利用迴歸方式將先備知識所造成的變異加以排除，基本補畫能力之表現不受範例融入方式及數學自我效能交互作用的影響。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果達顯著水準 ($F_{(2,83)}$= 10.106，p< .001)，顯示學習者接受整合型範例資訊科技融入教學(mean= 3.513)在基本補畫能力之表現顯著優於連續型範例一般教學(mean= 2.662)以及連續型範例資訊科技融入教學

(mean= 2.825)，接受連續型範例一般教學和連續型範例資訊科技融入教學在基本補畫能力之表現則無顯著差異；數學自我效能之主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 5.057，p= .027)，顯示高數學自我效能學習者(mean= 3.197)之基本補畫能力表現顯著優於低數學自我效能學習者(mean=2.803)。

在分割能力表現之分析結果發現，先備知識主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 46.776，p< .001)，顯示高、低先備知識學習者在分割能力表現上有顯著差異，所以學習者的先備知識會顯著影響分割能力之表現，因此將先備知識作為共變量可排除先備知識所造成的變異。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準($F_{(2,83)}$= .456，p= .635)，顯示利用迴歸方式將先備知識所造成的變異加以排除，分割能力之表現不受範例融入方式及數學自我效能交互作用的影響。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果未達顯著水準($F_{(2,83)}$= 1.975，p= .145)，顯示學習者接受不同範例融入方式在分割能力之表現沒有顯著差異；數學自我效能之主效果未達顯著水準($F_{(1,83)}$= 1.168，p= .283)，顯示高、低數學自我效能學習者在分割能力之表現沒有顯著差異。

表 4-4

等值分數基本彈性思考表現之共變數摘要分析

變異來源	基本彈性思考能力分項	SS (型Ⅲ平方和)	df (自由度)	MS (平方和)	*F* (*F* 檢定)	Sig. (顯著性)	事後比較
先備知識	基本補畫能力	40.329	1	40.329	66.498*	.000	
	分割能力	46.953	1	46.953	46.776*	.000	
範例融入方式	基本補畫能力	12.258	2	6.129	10.106*	.000	C>A=B
	分割能力	3.965	2	1.983	1.975	.145	
數學自我效能	基本補畫能力	3.067	1	3.067	5.057*	.027	高>低
	分割能力	1.173	1	1.173	1.168	.283	
範例融入方式×數學自我效能	基本補畫能力	1.829	2	.914	1.508	.227	
	分割能力	.916	2	.458	.456	.635	
誤差	基本補畫能力	50.337	83	.606			
	分割能力	83.314	83	1.004			

*p< .05

A=連續型範例一般教學，B=連續型範例資訊科技融入教學，C=整合型範例資訊科技融入教學。

由上述結果得知，在等值分數基本彈性思考表現方面，範例融入方式及學習者的數學自我效能在基本補畫能力表現上均有顯著的差異，學習者接受整合型範例資訊科技融入教學在基本補畫能力之表現顯著優於連續型範例一般教學及連續型範例資訊科技融入教學，高數學自我效能學習者在基本補畫能力之表現顯著優於低數學自我效能學習者；範例融入方式及學習者數學自我效能在分割能力表現上則無顯著差異。推斷其可能原因為，在教學中提供學習者促進彈性思考之範例，可以有效提升學習者的彈性思考，因此在基本的彈性思考表現上優於其他兩組，而分數概念的學習過程中，連續量情境的發展早於離散量情境，離散量情境對學習者來說較困難，使用虛擬教具可以很容易增加或刪除分割線，在呈現、說明、及證明兩個圖形等值較容易，因而造成範例融入方式及學習者數學自我效能在基本補畫能力表現上均有顯著的影響。

二、等值分數之「進階彈性思考」表現分析

進階彈性思考為學習者解決非連續型等值分數問題之能力，解題的過程中需要運用較多的彈性思考能力，進階彈性思考能力包含「進階補畫能力」、「組合能力」、「運作思考能力」、及「單位形成能力」四個能力分項。本研究以二因子多變量共變數分析檢視各組經由實驗教學後在進階彈性思考能力中各子能力之平均數是否有顯著差異。

本研究先以敘述統計初探進階彈性思考整體得分情形，各組在等值分數進階彈性思考之調整平均數、標準差及人數，如表 4-5 所示。調整平均數之結果顯示，就範例融入方式而言，學習者接受整合型範例資訊科技融入教學(mean= 13.012)成績最高，其次為連續型範例一般教學(mean= 10.722)，連續型範例資訊科技融入教學(mean= 10.500)成績最低；就數學自我效能而言，高數學自我效能者成績高於低數學自我效能者(高數學自我效能 mean= 6.330；低數學自我效能 mean= 5.693)。

表 4-5

各組在等值分數進階彈性思考整體之調整平均數、標準差及人數

範例融入方式	數學自我效能	Adjusted Mean (調整平均數)	Std. Deviation (標準差)	N (人數)
連續型範例 一般教學	高數學自我效能	12.497	3.882	15
	低數學自我效能	8.947	4.131	15
	總合	10.722	4.598	30
連續型範例 資訊科技融入教學	高數學自我效能	11.492	3.739	15
	低數學自我效能	9.508	4.190	15
	總合	10.500	4.400	30
整合型範例 資訊科技融入教學	高數學自我效能	13.430	2.024	15
	低數學自我效能	12.594	3.814	15
	總合	13.012	3.306	30
總合	高數學自我效能	12.473	3.329	45
	低數學自我效能	10.350	4.241	45
	總合	11.411	4.245	90

接著以敘述統計初探進階彈性思考能力中四個子能力的得分情形，各組在進階補畫能力、組合能力、運作思考能力、及單位形成能力之調整平均數、標準差及人數，如表 4-6 所示。由調整平均數之結果顯示，就範例融入方式而言，學習者接受整合型範例資訊科技融入教學在進階補畫能力及運作思考能力上成績最高(進階補畫能力 mean= 3.245；運作思考能力 mean= 3.633)，其次為連續型範例資訊科技融入教學(進階補畫能力 mean= 2.339；運作思考能力 mean= 3.069)，連續型範例一般教學成績最低(進階補畫能力 mean= 2.250；運作思考能力 mean= 2.898)；學習者接受整合型範例資訊科技融入教學在組合能力及單位形成能力上成績最高(組合能力 mean= 3.251；單位形成能力 mean= 2.883)，其次為連續型範例一般教學(組合能力 mean= 2.992；單位形成能力 mean= 2.582)，連續型範例資訊科技融入教學成績最低(組合能力 mean= 2.890；單位形成能力 mean= 2.202)。就數學自我效能而言，高自我效能學習者在進階補畫能力(高數學自我效能 mean= 2.917；低數學自我效能 mean= 2.305)、組合能力(高數學自我效能 mean= 3.250；低數學自我效能 mean= 2.839)、運作思考能力(高數學自我效能 mean= 3.560；低數學自我效能 mean= 2.840)、及單位形成能力(高數學自我效能 mean= 2.745；低數學自我效能 mean= 2.366)成績皆高於低自我效能學習者。

表 4-6 各組在等值分數進階彈性思考中各能力分項之調整平均數、標準差及人數

進階彈性思考能力分項	範例融入方式	數學自我效能	Adjusted Mean (調整平均數)	Std. Deviation (標準差)	N (人數)
進階補畫能力	連續型範例一般教學	高數學自我效能	2.739	1.207	15
		低數學自我效能	1.760	1.125	15
		總合	2.250	1.315	30
	連續型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	2.579	1.208	15
		低數學自我效能	2.099	1.335	15
		總合	2.339	1.382	30
	整合型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	3.434	.617	15
		低數學自我效能	3.056	1.265	15
		總合	3.245	1.073	30
	總合	高數學自我效能	2.917	1.120	45
		低數學自我效能	2.305	1.328	45
		總合	2.611	1.330	90
組合能力	連續型範例一般教學	高數學自我效能	3.308	1.121	15
		低數學自我效能	2.677	1.633	15
		總合	2.992	1.479	30
	連續型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	2.996	.743	15
		低數學自我效能	2.784	1.598	15
		總合	2.890	1.326	30
	整合型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	3.447	.561	15
		低數學自我效能	3.055	1.543	15
		總合	3.251	1.278	30
	總合	高數學自我效能	3.250	.839	45
		低數學自我效能	2.839	1.561	45
		總合	3.044	1.357	90
運作思考能力	連續型範例一般教學	高數學自我效能	3.535	.915	15
		低數學自我效能	2.262	1.100	15
		總合	2.898	1.185	30
	連續型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	3.341	1.047	15
		低數學自我效能	2.796	1.320	15
		總合	3.069	1.202	30
	整合型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	3.805	.414	15
		低數學自我效能	3.461	.743	15
		總合	3.633	.615	30
	總合	高數學自我效能	3.560	.841	45
		低數學自我效能	2.840	1.167	45
		總合	3.200	1.073	90
單位形成能力	連續型範例一般教學	高數學自我效能	2.915	1.604	15
		低數學自我效能	2.248	1.668	15
		總合	2.582	1.697	30
	連續型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	2.575	1.335	15
		低數學自我效能	1.829	1.595	15
		總合	2.202	1.626	30
	整合型範例資訊科技融入教學	高數學自我效能	2.744	1.438	15
		低數學自我效能	3.022	1.447	15
		總合	2.883	1.432	30
	總合	高數學自我效能	2.745	1.429	45
		低數學自我效能	2.366	1.601	45
		總合	2.556	1.587	90

本研究為了解範例融入方式與學習者數學自我效能在等值分數進階彈性思考四個子能力之二維交互作用關係，先進行組內迴歸係數同質性檢定，結果顯示各組變異數達顯著差異($F_{(5,78)}$= 2.80，p= .022)，違反組內迴歸係數同質性的假定，但各組人數相同，具有統計強韌性，不會影響第一類型和第二類型錯誤，故可進行共變數分析(余民寧, 2005)。接著進行多變量整體效果考驗，由表 4-7 的結果得知，進階彈性思考能力表現之先備知識主效果達顯著水準(Wilks' Lamda = .433，p < .001，η^2 = .567)，顯示高、低先備知識學習者在進階彈性思考中的補畫能力、組合能力、運作思考能力、及單位形成能力表現上，至少有一種能力之平均分數有顯著差異，所以學習者的先備知識會顯著影響等值分數進階彈性思考之表現，因此將先備知識作為共變量可排除先備知識所造成的變異。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準(Wilks' Lamda = .916，p = .525，η^2 = .043)，顯示範例融入方式與數學自我效能在補畫能力、組合能力、運作思考能力、及單位形成能力表現上無顯著交互作用。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果達顯著水準(Wilks' Lamda = .778，p = .009，η^2 = .118)，顯示學習者接受不同範例融入方式在進階彈性思考中的補畫能力、組合能力、運作思考能力、及單位形成能力表現上，各組樣本至少有一種能力之平均分數有顯著差異；數學自我效能主效果達顯著水準(Wilks' Lamda = .845，p= .009，η^2 = .155)，顯示高、低數學自我效能的學習者在進階彈性思考中的補畫能力、組合能力、運作思考能力、及單位形成能力表現上，各組樣本至少在一種能力的平均分數上有顯著差異。

表 4-7

等值分數進階彈性思考之多變量整體效果考驗摘要分析

變異來源	Wilks' Lamda	F	Sig.	Eta Squared
先備知識	.433	26.235	.000*	.567
範例融入方式	.778	2.677	.009*	.118
數學自我效能	.845	3.659	.009*	.155
範例融入方式× 數學自我效能	.916	.892	.525	.043

*p< .05

接著進行共變數分析，其共變數分析摘要如表 4-8 所示，以下就等值分數進階彈性思考中「進階補畫能力」、「組合能力」、「運作思考能力」、及「單位形成能力」表現之分析分別敘述。在進階補畫能力表現之分析結果發現，先備知識主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 30.692，p< .001)，顯示高、低先備知識學習者在進階補畫能力表現上有顯著差異，所以學習者先備知識會顯著影響進階補畫能力之表現，因此將先備知識作為共變量可排除先備知識所造成的變異。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準($F_{(2,83)}$= .770，p= .466)，顯示利用迴歸方式將先備知識所造成的變異加以排除，進階補畫能力之表現不受範例融入方式及數學自我效能交互作用的影響。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果達顯著水準($F_{(2,83)}$= 9.096，p< .001)，顯示學習者接受整合型範例資訊科技融入教學(mean= 3.245)在進階補畫能力之表現顯著優於連續型範例一般教學(mean= 2.250)以及連續型範例資訊科技融入教學(mean= 2.339)，接受連續型範例一般教學和連續型範例資訊科技融入教學在進階補畫能力之表現則無顯著差異；數學自我效能之主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 7.419，p= .008)，顯示高數學自我效能學習者(mean= 2.917)之進階補畫能力表現顯著優於低數學自我效能學習者(mean= 2.305)。

在組合能力表現之分析結果發現，先備知識主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 89.327，p< .001)，顯示高、低先備知識學習者在組合能力表現上有顯著差異，所以學習者的先備知識會顯著影響組合能力之表現，因此將先備知識作為共變量可排除先備知識所造成的變異。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準($F_{(2,83)}$= .415，p= .662)，顯示利用迴歸方式將先備知識所造成的變異加以排除，組合能力之表現不受範例融入方式及數學自我效能交互作用的影響。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果未達顯著水準($F_{(2,83)}$= 1.311，p= .275)，顯示學習者接受不同範例融入方式在組合能力之表現沒有顯著差異；數學自我效能之主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 4.244，p= .043)，顯示高數學自我效能學習者(mean= 3.250)之組合能力表現顯著優於低數學自我效能學習者(mean= 2.839)。

在運作思考能力表現之分析結果發現，先備知識主效果未達顯著水準

($F_{(1,83)}$= .017，p= .897)，顯示高、低先備知識學習者在運作思考能力表現上沒有顯著差異，所以學習者的先備知識不會顯著影響運作思考能力之表現，因此做共變數分析或變異數分析不會影響其分析結果。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準($F_{(2,83)}$= 1.880，p= .159)，顯示利用迴歸方式將先備知識所造成的變異加以排除，運作思考能力之表現不受範例融入方式及數學自我效能交互作用的影響。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果達顯著水準($F_{(2,83)}$= 4.691，p= .012)，顯示學習者接受整合型範例資訊科技融入教學(mean= 3.633)在運作思考能力之表現顯著優於連續型範例一般教學(mean= 2.898)及連續型範例資訊科技融入教學(mean= 3.069)，接受連續型範例一般教學和連續型範例資訊科技融入教學在運作思考能力之表現則無顯著差異；數學自我效能之主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 10.874，p= .001)，顯示高數學自我效能學習者(mean= 3.560)之運作思考能力表現顯著優於低數學自我效能學習者(mean= 2.840)。

在單位形成能力表現之分析結果發現，先備知識主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 36.431，p< .001)，顯示高、低先備知識學習者在單位形成能力表現上有顯著差異，所以學習者的先備知識會顯著影響單位形成能力之表現，因此將先備知識作為共變量可排除先備知識所造成的變異。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準($F_{(2,83)}$= 1.501，p= .229)，顯示利用迴歸方式將先備知識所造成的變異加以排除，單位形成能力之表現不受範例融入方式及數學自我效能交互作用的影響。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果未達顯著水準($F_{(2,83)}$= 2.137，p= .124)，顯示學習者接受不同範例融入方式在單位形成能力之表現沒有顯著差異；數學自我效能之主效果未達顯著水準($F_{(1,83)}$= 1.746，p= .190)，顯示高、低數學自我效能學習者在單位形成能力表現上沒有顯著差異。

表 4-8

等值分數進階彈性思考表現之共變數摘要分析

變異來源	進階彈性思考能力分項	SS (型Ⅲ平方和)	df (自由度)	MS (平方和)	*F* (*F* 檢定)	Sig. (顯著性)	事後比較
先備知識	進階補畫能力	30.703	1	30.703	30.692*	.000	
	組合能力	70.566	1	70.566	89.327*	.000	
	運作思考能力	.016	1	.016	.017	.897	
	單位形成能力	59.096	1	59.096	36.431*	.000	
範例融入方式	進階補畫能力	18.199	2	9.100	9.096*	.000	C>A=B
	組合能力	2.072	2	1.036	1.311	.275	
	運作思考能力	8.875	2	4.438	4.691*	.012	C>A=B
	單位形成能力	6.935	2	3.467	2.137	.124	
數學自我效能	進階補畫能力	7.421	1	7.421	7.419*	.008	高>低
	組合能力	3.353	1	3.353	4.244*	.043	高>低
	運作思考能力	10.287	1	10.287	10.874*	.001	高>低
	單位形成能力	2.832	1	2.832	1.746	.190	
範例融入方式 × 數學自我效能	進階補畫能力	1.540	2	.770	.770	.466	
	組合能力	.656	2	.328	.415	.662	
	運作思考能力	3.558	2	1.779	1.880	.159	
	單位形成能力	4.869	2	2.434	1.501	.229	
誤差	進階補畫能力	83.030	83	1.000			
	組合能力	65.568	83	.790			
	運作思考能力	78.517	83	.946			
	單位形成能力	134.637	83	1.622			

*p< .05

A=連續型範例一般教學，B=連續型範例資訊科技融入教學，C=整合型範例資訊科技融入教學。

由上述結果得知，在等值分數進階彈性思考表現方面，就範例融入方式而言，學習者接受不同的範例融入方式在進階補畫能力及運作思考能力表現上有顯著差異，學習者接受整合型範例資訊科技融入教學在進階補畫能力及運作思考能力之表現顯著優於連續型範例一般教學及連續型範例資訊科技融入教學，而範例融入方式在組合能力及單位形成能力表現上則無顯著差異；就數學自我效能而言，高數學自我效能學習者在進階補畫能力、組合能力、及運作思考能力之表現均顯著優於低數學自我效能學習者，而高、低數學自我效能學習者在單位形成能力表現上則無顯著差異。推斷其可能原因為，連續量情境可以透過圖形表徵，而虛擬教具的可變性使學生在操作的過程中可任意移動圖形、填色、增加或刪除分割線等功能，皆可幫助學生學習等值分數之進階補畫能力及運作思考能力，使用虛擬教具也很容易證明等積異形之等值分數，學生較可接受相同圖形以不同的切

割方式切割，其面積是相等的。在組合能力表現方面，使用實體教具或虛擬教具皆很容易移動物體，在離散量情境下學習者要判斷分數圖形是否等值，關鍵的能力在學習者是否可以找到適當的分割方式，因此學習者接受不同範例融入方式無顯著影響。單位形成能力為學習者能否解決等值分數問題的關鍵，在等值分數概念的表現發展次序較後面，由此可知單位形成能力對學生來說是困難的，在教學內容中沒有特地教學生單位形成能力，學習者很難自己發展，所以學習者接受不同範例融入方式在單位形成能力表現上無顯著差異。在數學自我效能方面，高數學自我效能學習者的先備能力較高，面對具有挑戰性的困難的學習任務時，會有較高的動機去學習，且願意投入較多的時間與努力，學習時也較集中注意力，因此，高數學自我效能學習者在進階補畫能力、組合能力、及運作思考能力表現上顯著優於低數學自我效能學習者。

三、等值分數彈性思考表現分析摘要

本研究中等值分數彈性思考包含「基本彈性思考」及「進階彈性思考」之表現，其中基本彈性思考包含基本補畫能力及分割能力兩個能力分項；進階彈性思考包含進階補畫能力、組合能力、運作思考能力、及單位形成能力四個能力分項，等值分數彈性思考表現摘要如表 4-9 所示。

表 4-9

等值分數彈性思考表現摘要表

等值分數彈性思考	能力分項	交互作用	範例融入方式與數學自我效能	主要效果分析結果	平均分數
基本彈性思考	基本補畫能力	不顯著	範例融入方式	C>A=B	A = 2.662 B = 2.825 C = 3.513
			數學自我效能	高>低	高= 3.197 低= 2.803
	分割能力	不顯著	範例融入方式	A=B=C	A = 3.202 B = 2.716 C = 3.114
			數學自我效能	高=低	高= 3.133 低= 2.889
進階彈性思考	進階補畫能力	不顯著	範例融入方式	C>A=B	A = 2.250 B = 2.339 C = 3.245
			數學自我效能	高>低	高= 2.917 低= 2.305
	組合能力	不顯著	範例融入方式	A=B=C	A = 2.992 B = 2.890 C = 3.251
			數學自我效能	高>低	高= 3.250 低= 2.839
	運作思考能力	不顯著	範例融入方式	C>A=B	A = 2.898 B = 3.069 C = 3.633
			數學自我效能	高>低	高= 3.560 低= 2.840
	單位形成能力	不顯著	範例融入方式	A=B=C	A = 2.582 B = 2.202 C = 2.883
			數學自我效能	高=低	高= 2.745 低= 2.366

A=連續型範例一般教學，B=連續型範例資訊科技融入教學，C=整合型範例資訊科技融入教學。

由等值分數彈性思考表現摘要表探討研究問題一：在學習等值分數時，不同的範例融入方式(連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、整合型範例資訊科技融入教學)與數學自我效能(高數學自我效能、低數學自我效能)是否對學習者基本彈性思考表現(基本補畫能力、分割能力)產生不同的影響？

由等值分數之基本彈性思考表現分析結果顯示，範例融入方式及學習者的數學自我效能在基本補畫能力表現上均有顯著的差異，學習者接受整合型範例資訊科技融入教學在基本補畫能力之表現顯著優於連續型範例一般教學及連續型範例資訊科技融入教學，高數學自我效能學習者在基本補畫能力之表現顯著優於低

數學自我效能學習者；範例融入方式及學習者數學自我效能在分割能力表現上則無顯著差異。

由等值分數彈性思考表現摘要表探討研究問題二：在學習等值分數時，不同的範例融入方式(連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、整合型範例資訊科技融入教學)與數學自我效能(高數學自我效能、低數學自我效能)是否對學習者進階彈性思考表現(進階補畫能力、組合能力、運作思考能力、單位形成能力)產生不同的影響？

由等值分數之進階彈性思考表現分析結果顯示，就範例融入方式而言，不同的範例融入方式在進階補畫能力及運作思考能力表現上有顯著的差異，學習者接受整合型範例資訊科技融入教學在進階補畫能力及運作思考能力之表現顯著優於連續型範例一般教學及連續型範例資訊科技融入教學，而範例融入方式在組合能力及單位形成能力表現上則無顯著影響；就數學自我效能而言，高數學自我效能學習者在進階補畫能力、組合能力、及運作思考能力之表現均顯著優於低數學自我效能學習者，而高、低數學自我效能學習者在單位形成能力表現上則無顯著影響。

綜合來說，學習者接受整合型範例資訊科技融入教學在基本補畫能力、進階補畫能力及運作思考能力表現上顯著優於其它兩組，接受連續型一般教學與連續型資訊科技融入教學則無顯著差異；不同的範例融入方式在分割能力、組合能力、及單位形成能力表現上則無顯著差異。高數學自我效能者在基本補畫能力、進階補畫能力、組合能力、運作思考能力表現上均顯著優於低數學自我效能者；而高、低數學自我效能者在分割能力及單位形成能力表現上則無顯著差異。

補畫能力及運作思考能力均屬連續量情境之等值分數問題，連續量情境較好用圖形方式表徵。補畫能力是指學習者能以不同名稱稱呼同一個分數，且有想像或忽略分割線之能力，分割線的多寡及分割區塊是否連在一起，也常會影響學習的結果(Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Behr & Post, 1992)。本研究之整合型範例為提供可促進等值分數彈性思考之演練範

例，如分數圖形中分割區塊是不連續的，教學時學習者可操弄虛擬教具，由於虛擬教具的可變性，學習者可以將分數圖形中不連續的區塊搬移至一起，並且很容易在分數圖形上增加或減少分割線，比起操弄實體教具容易說明且證明等值分數概念，因此學習者整合型範例資訊科技融入教學在補畫能力表現上顯著優於連續型範例一般教學及連續型範例資訊科技融入教學。

運作思考能力是指同一塊圖形上使用不同的分割方式，即等積異形的情形下，學習者能夠不被視覺的影響，判斷兩個一樣圖形以不同的分割方式呈現，其分數為等值之能力，涉及部分整體的保留概念和乘法性思考兩個運作思考層面 (Kamii & Clark, 1995; Parrat-Dayan & Vonbche, 1992; Piaget, 1987; Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960)。教學中各組提供的運作思考能力之範例皆相同，且均以乘法性思考的方式進行教學，並加上圖形的解說，推斷其可能的原因為，虛擬教具可以很容易解說、證明等積異形體之等值分數概念，學習者較能夠不被視覺所影響，補畫能力與運作思考能力皆屬連續量情境，學習者補畫能力的提升可能會影響運作思考能力的表現，因此，整合型範例資訊科技融入教學在運作思考能力之表現顯著優於連續型範例一般教學及連續型範例資訊科技融入教學。

分割能力及組合能力，均屬於離散量情境之等值分數問題，指的是將單位量分成數部份，每部份都正確處理後，再將處理後的各部份合併成單位量的指定分數，即重新分割或合併找出等值分數之能力。本研究所提供之虛擬教具可以讓學習者任意移動物件，並畫上分割線，使用實體教具或虛擬教具皆很容易移動圖形，因此，資訊科技融入教學和一般教學可以達到相同的教學效果。學習者是否可以找到適當的分割方式並將多個物體視為一組是增進分割能力及組合能力的關鍵因素，找到適當的分割方式與因數、倍數概念的學習有直接的關係，學習者在等值分數單元前不久才學習因數、倍數概念，因此影響學習者找到適當的分割方式之能力，造成不同的範例融入方式在分割能力及組合能力之表現無顯著差異。單位形成能力為將全部以適當的單位分盡後，再利用這個單位重組成全部或集合的可逆轉能力，在等值分數概念的表現發展次序較後面，由此可知單位形成

能力對學生來說是困難的，在教學內容中沒有特地教學生單位形成能力，學習者很難自己發展，所以學習者接受不同範例融入方式在單位形成能力表現上無顯著差異。

從研究結果中發現，數學自我效能的高低也會影響學習者等值分數彈性思考之表現。人們嘗試解決任務時的動機、願意付出努力的程度、當面臨困難時堅毅的程度、以及面對失敗挫折的反應方式，會受到自我效能高低之影響，高自我效能在學習活動前會較集中注意力去了解要解決的任務，投入較多的努力，面臨困難時較能持續進行活動，遭遇失敗挫折時反應較有彈性知變通，面對較困難的任務時，會有比較正向的態度，認為自己有能力解決問題，較有意願面對問題，相反的，低自我效能者認為任務往往比實際上來的要困難，常常自認為自己能力不足以解決問題，導致信心降低(Bandura, 1986)。

等值分數概念對國小學生來說是較困難的學習內容，將彭海燕(1998)研究學習者等值分數概念表現的先後發展次序之結果對應至本研究之等值分數彈性思考的分類，學習者等值分數概念表現的先後發展次序為：(1)基本補畫能力，分母等於分割塊數之等值分數問題；(2)基本補畫能力、分割能力，分母是分割塊數的倍數、因數之等值分數問題；(3)進階補畫能力，分母是分割塊數個數的倍數、因數之等值分數問題；(4)組合能力；(5)單位形成能力；(6)運作思考能力；(7)基本、進階補畫能力，分母與分割數或個數不是直接倍數關係之等值分數問題。國小學生等值分數學習成效不佳的原因為等值分數彈性思考不足，對學生來說等值分數彈性思考是較困難的學習內容，基本補畫能力與進階補畫能力雖然是較早發展的概念，但是此兩種能力評量的內容均包含分母與分割數或個數不是直接倍數關係的等值分數問題，對學生來說是最困難且最晚發展的概念，分割能力概念發展次序較早，對學習者來說比較簡單，高數學自我效能者通常數學能力也較高，因此，高數學自我效能者在基本補畫能力、進階補畫能力、組合能力、運作思考能力表現上顯著優於低數學自我效能者；高、低數學自我效能者在分割能力學習成效上無顯著差異。單位形成能力在等值分數概念的表現發展次序較後面，對學習者來

說是較困難的概念，本研究教學內容沒有特地教學生單位形成能力，學習者很難自己發展，因此高、低數學自我效能者在單位形成能力表現上無顯著差異。

第二節　數學學習態度分析

本研究為了解學習者透過不同範例融入方式進行等值分數教學實驗後數學學習態度之情形，針對學習者在「學習興趣」、「學習動機」、及「數學焦慮」三個面向的表現情形進行分析，為了控制先備知識對教學實驗正確性的誤差，將參與者該學期期中考數學成績當成共變量，以範例融入方式(連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、與整合型範例資訊科技融入教學)、數學自我效能(高數學自我效能、低數學自我效能)為自變項，數學學習態度(學習興趣、學習動機、與數學焦慮)為依變項，進行二因子多變量共變數分析，以檢視各組學習者在數學學習態度的表現情形。

本研究先以敘述統計初探數學學習態度調查表中三個面向得分情形，研究樣本之各組在學習興趣、學習動機、數學焦慮調整平均數、標準差、和人數如表 4-10 所示，調整平均數之統計結果顯示，就範例融入方式而言，連續型範例資訊科技融入教學在學習興趣、學習動機、數學焦慮上得分皆為最高(學習興趣 mean= 4.036、學習動機 mean= 3.874、數學焦慮 mean= 3.634)，其次為整合型範例資訊科技融入教學(學習興趣 mean= 3.593、學習動機 mean= 3.613、數學焦慮 mean= 3.475)，連續型範例一般教學得分最低(學習興趣 mean= 3.424、學習動機 mean= 3.606、數學焦慮 mean= 3.351)。學習者接受不同的範例融入方式在學習興趣、學習動機、數學焦慮之得分均呈中偏正之情形，顯示學習者對於接受不同範例融入方式之等值分數教學後，數學學習態度均持正面看法，學習者接受連續型範例資訊科技融入教學之數學學習態度優於整合型範例資訊科技融入教學，優於連續型範例一般教學。就數學自我效能而言，高數學自我效能學習者在學習興趣(高數學自我效能 mean= 3.980、低數學自我效能 mean= 3.389)、學習動機(高數學自我效能 mean=4.090、低數學自我效能 mean= 3.306)、數學焦慮(高數學自我效能 mean= 3.877、低數學自我效能 mean= 3.096)得分皆高於低自我效能學習者。高、低數學自我效能學習者在學習興趣、學習動機、數學焦慮之得分皆呈中偏正之情形，顯

示高、低數學自我效能學習者接受等值分數教學後，數學學習態度均持正面看法，高數學自我效能學習者數學態度優於低數學自我效能學習者。

表 4-10

各組在數學學習態度之調整平均數、標準差及人數

數學學習態度	範例融入方式	數學自我效能	Adjusted Mean (調整平均數)	Std. Deviation (標準差)	N (人數)
學習興趣	連續型範例 一般教學	高數學自我效能	3.762	.5962	15
		低數學自我效能	3.087	.725	15
		總合	3.424	.735	30
	連續型範例 資訊科技融入教學	高數學自我效能	4.224	.870	15
		低數學自我效能	3.849	1.029	15
		總合	4.036	.954	30
	整合型範例 資訊科技融入教學	高數學自我效能	3.953	.890	15
		低數學自我效能	3.233	1.048	15
		總合	3.593	1.020	30
	總合	高數學自我效能	3.980	.801	45
		低數學自我效能	3.389	.982	45
		總合	3.684	.937	90
學習動機	連續型範例 一般教學	高數學自我效能	3.960	.577	15
		低數學自我效能	3.252	.444	15
		總合	3.606	.620	30
	連續型範例 資訊科技融入教學	高數學自我效能	4.228	.709	15
		低數學自我效能	3.519	.894	15
		總合	3.874	.870	30
	整合型範例 資訊科技融入教學	高數學自我效能	4.081	.778	15
		低數學自我效能	3.145	.756	15
		總合	3.613	.931	30
	總合	高數學自我效能	4.090	.686	45
		低數學自我效能	3.306	.756	45
		總合	3.698	.818	90
數學焦慮	連續型範例 一般教學	高數學自我效能	3.792	.721	15
		低數學自我效能	2.911	.609	15
		總合	3.351	.805	30
	連續型範例 資訊科技融入教學	高數學自我效能	4.045	.713	15
		低數學自我效能	3.223	.878	15
		總合	3.634	.908	30
	整合型範例 資訊科技融入教學	高數學自我效能	3.155	.925	15
		低數學自我效能	3.795	.928	15
		總合	3.475	.979	30
	總合	高數學自我效能	3.877	.786	45
		低數學自我效能	3.096	.810	45
		總合	3.487	.899	90

本研究為了解範例融入方式和學習者數學自我效能在數學學習態度三個面向之二維交互作用關係，先進行組內迴歸係數同質性檢定，結果各組變異數達顯著差異($F_{(5,78)}$= 2.62，p= .030)，違反組內迴歸係數同質性的假定，但各組人數相同，具有統計強韌性，不會影響第一類型和第二類型錯誤，故可進行共變數分析(余民寧, 2005)。接著進行多變量整體顯著性考驗，由表 4-11 的結果得知，先備知識主效果未達顯著水準(Wilks' Lamda = .401，p = .753，η^2 = .015)，顯示高、低先備知識學習者在數學學習態度上沒有顯著差異，學習者的先備知識多寡不會影響數學學習態度，因此做共變數分析或變異數分析不會影響其分析結果。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準(Wilks' Lamda = .974，p = .901，η^2 = .013)，顯示範例融入方式與數學自我效能在學習興趣、學習動機、及數學焦慮上無顯著交互作用。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果未達顯著水準(Wilks' Lamda = 1.343，p= .241，η^2 = .047)，顯示學習者接受不同範例融入方式在學習興趣、學習動機、及數學焦慮三方面的平均分數無顯著差異；數學自我效能之主效果達顯著水準(Wilks' Lamda = 9.674，p< .001，η^2 = .264)，顯示高、低數學自我效能學習者經由教學實驗後在學習興趣、學習動機、及數學焦慮三方面，各組樣本至少在一個依變項的平均分數上有顯著差異。

表 4-11

數學學習態度之多變量整體效果考驗摘要分析

變異來源	Wilks' Lamda	F	Sig.	Eta Squared
先備知識	.985	.401	.753	.015
範例融入方式	.908	1.343	.241	.047
數學自我效能	.736	9.674*	.000	.264
範例融入方式 × 數學自我效能	.974	.363	.901	.013

*p< .05

接著進行共變數分析，其變異數分析摘要如表 4-12 所示，以下就「學習興趣」、「學習動機」、「數學焦慮」三個面向分別敘述其共變數分析結果。在學習興趣分析結果發現，先備知識主效果未達顯著水準($F_{(1,83)}$= .033，p= .855)，顯示高、

低先備知識學習者在學習興趣上沒有顯著差異，所以學習者的先備知識多寡不會影響學習興趣，因此做共變數分析或變異數分析不會影響其分析結果。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準($F_{(2,83)}$= .341，p= .712)，顯示學習興趣不受範例融入方式及數學自我效能交互作用的影響。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果達顯得水準($F_{(2,83)}$= 3.815，p= .026)，顯示學習者接受連續型資訊科技融入教學(mean= 4.03)在學習興趣上顯著優於連續型範例一般教學(mean= 3.43)及整合型範例資訊科技融入教學(mean= 3.59)，接受連續型範例一般教學和整合型範例資訊科技融入教學在學習興趣上則無顯著差異；數學自我效能之主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 8.918，p= .004)，顯示高數學自我效能學習者(mean= 3.97)在學習興趣上顯著優於低數學自我效能學習者(mean= 3.40)。

在學習動機分析結果顯示，先備知識主效果未達顯著水準($F_{(1,83)}$= .002，p= .096)，顯示高、低先備知識學習者在學習動機上沒有顯著差異，所以學習者的先備知識多寡不會影響學習動機，因此做共變數分析或變異數分析不會影響其分析結果。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準($F_{(2,83)}$= .242，p= .786)，顯示學習動機不受範例融入方式及數學自我效能交互作用的影響。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果未達顯得水準($F_{(2,83)}$= 1.293，p= .280)，顯示學習者接受不同的範例融入方式在學習動機上沒有顯著差異；數學自我效能之主效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 22.866，p< .001)，顯示高數學自我效能學習者(mean= 4.09)在學習動機上顯著優於低數學自我效能學習者(mean= 3.31)。

在數學焦慮分析結果顯示，先備知識主效果未達顯著水準($F_{(1,83)}$= .882，p= .351)，顯示高、低先備知識學習者在數學焦慮上沒有顯著差異，所以學習者的先備知識多寡不會影響數學焦慮，因此做共變數分析或變異數分析不會影響其分析結果。範例融入方式×數學自我效能交互作用未達顯著水準($F_{(2,83)}$= .182，p= .834)，顯示數學焦慮不受範例融入方式及數學自我效能交互作用的影響。在主效果分析方面，範例融入方式之主效果未達顯得水準($F_{(2,83)}$= .913，p= .405)，顯示學習者接受不同範例融入方式在數學焦慮上沒有顯著差異；數學自我效能之主

效果達顯著水準($F_{(1,83)}$= 18.607，p< .001)，顯示高數學自我效能學習者(mean= 3.91)在數學焦慮改善情形上顯著優於低數學自我效能學習者(mean= 3.07)。

表 4-12

數學學習態度之共變數摘要分析

變異來源	數學 學習態度	SS (型Ⅲ平方和)	Df (自由度)	MS (平方和)	*F* (*F* 檢定)	Sig. (顯著性)	事後 比較
先備知識	學習興趣	.026	1	.026	.033	.855	
	學習動機	.001	1	.001	.002	.969	
	數學焦慮	.572	1	.572	.882	.351	
範例融入方式	學習興趣	5.901	2	2.950	3.815*	.026	B>A=C
	學習動機	1.377	2	.688	1.293	.280	
	數學焦慮	1.184	2	.592	.913	.405	
數學自我效能	學習興趣	6.897	1	6.897	8.918*	.004	高>低
	學習動機	12.179	1	12.179	22.866*	.000	高>低
	數學焦慮	12.073	1	12.073	18.607*	.000	高>低
範例類融入方式 × 數學自我效能	學習興趣	.528	2	.264	.341	.712	
	學習動機	.258	2	.129	.242	.786	
	數學焦慮	.236	2	.118	.182	.834	
誤差	學習興趣	64.187	83	.773			
	學習動機	44.207	83	.533			
	數學焦慮	53.855	83	.649			

*p< .05

A=連續型範例一般教學，B=連續型範例資訊科技融入教學，C=整合型範例資訊科技融入教學。

由上述結果得知，在數學學習態度方面，就範例融入方式而言，學習者接受不同的範例融入方式在學習興趣上有顯著差異，接受連續型範例資訊科技融入教學學習興趣顯著優於連續型範例資訊科技融入教學及整合型範例資訊科技融入教學；不同的範例融入方式在學習動機及數學焦慮上則無顯著差異。就數學自我效能而言，高、低數學自我效能者在學習興趣、學習動機、數學焦慮上有顯著差異，高數學自我效能學習者在學習興趣、學習動機顯著優於低數學自我效能學習者；數學焦慮顯著低於低數學自我效能學習者。推斷其可能原因為，透過電腦的方式學習數學可以增加趣味性，且在學習過程中學習者可以操作虛擬教具，與以前的學習經驗不太一樣，資訊科技融入數學教學能提升學習者學習興趣，而連續型範例資訊科技融入教學組的學習內容比整合型範例資訊科技融入教學組的簡

單，因此造成學習者接受連續型範例資訊科技融入教學學習興趣顯著優於連續型範例資訊科技融入教學及整合型範例資訊科技融入教學。本研究之學習動機指的是學習者進行不同範例融入教學後，是否可以讓學習者持續進行數學學習活動，學習者參與數學活動的態度與學習數學時的焦慮，是由先前學習數學時之經驗所形成的，在短時間內可能較無法改變學習者持續進行數學學習活動之學習動機及數學焦慮，因此範例融入方式對於學習者學習動機及數學焦慮無顯著影響。在數學自我效能方面，高數學自我效能者原本的學習動機較高，學習態度較好，認為自己有能力解決問題，較有意願面對問題，數學焦慮也較低，所以高數學自我效能學習者在學習興趣、學習動機顯著優於低數學自我效能學習者；數學焦慮顯著低於低數學自我效能學習者。

數學學習態度分析摘要如表 4-13 所示：

表 4-13

數學學習態度分析摘要表

數學學習態度	交互作用	範例融入方式 與數學自我效能	主要效果分析結果	平均得分
學習興趣	不顯著	範例融入方式	B>A=C	A = 3.424 B = 4.036 C = 3.539
		數學自我效能	高>低	高= 3.980 低= 3.389
學習動機	不顯著	範例融入方式	A=B=C	A = 3.606 B = 3.874 C = 3.613
		數學自我效能	高>低	高= 4.090 低= 3.306
數學焦慮	不顯著	範例融入方式	A=B=C	A = 3.351 B = 3.634 C = 3.475
		數學自我效能	高>低	高= 3.877 低= 3.096

A=連續型範例一般教學，B=連續型範例資訊科技融入教學，C=整合型範例資訊科技融入教學。

由數學學習態度摘要表探討研究問題三、在學習等值分數時，不同的範例融入方式(連續型範例一般教學、連續型範例資訊科技融入教學、整合型範例資訊科技融入教學)與數學自我效能(高數學自我效能、低數學自我效能)是否對學習者之

數學學習態度(學習興趣、學習動機、數學焦慮)產生不同的影響？

由數學學習態度分析結果發現，就範例融入方式而言，學習者接受不同範例融入方式皆有正向之學習態度，接受連續型範例資訊科技融入教學在學習態度各面向得分均最高，其次為整合型資訊科技融入教學，接受連續型一般教學在學習態度各面向得分最低，其中學習者接受連續型範例資訊科技融入教學在學習興趣上顯著優於其它兩組。就數學自我效能而言，高、低數學自我效能學習者經由不同範例融入教學後皆有正向之學習態度，高數學自我效能學習者在學習興趣、學習動機上均顯著優於低數學自我效能學習者；數學焦慮顯著低於低數學自我效能學習者。

資訊多媒體豐富的聲光效果及互動式教材生動活潑的特性，增加學生操作學習機會，並具體連結學習經驗，提昇學生學習興趣及學習動機，以獲致較佳學習效果(張國恩, 2002; 萬志祥, 2004)。透過電腦多媒體互動特性，提供半具體物操作，將不易體驗之知識以影像或動畫呈現，抽象概念予以具體化、視覺化，使學童有充足地操作機會，以經驗其中的數學概念，可有效地具體呈現學習內容，幫助學童理解(賴阿福, 2004)。運用虛擬教具在數學教學上有許多優點，如虛擬教具比實體教具更易於操作，使學生可更專心的進行所需要的操弄，很容易改變某一物件某部份的顏色，可增加或減少某一物件的數量，也很容易移動物件，讓每位學習者都有操作的機會(Izydorczak, 2003; Yuan, 2005)。動態、顏色、圖解、互動的特性可讓學生保持注意力，使他們可以持續完成任務，學習者認為用虛擬教具能幫助他們學習、容易操作、可以得到立即性且特別地回饋，比傳統的方法更為迅速，並且提高學習的興趣(Reimer & Moyer, 2005; Suh, Moyer, & Heo, 2005; Steen, Brooks, & Lyon, 2006)。本研究所提供之虛擬教具具有可變性、互動性，並將抽象概念具體化，學習者可以用虛擬教具表達想法，並透過操作經驗其中數學概念，學習者上數學課第一次使用虛擬教具，認為虛擬教具是很新鮮的事物，所以有較高的學習興趣，連續型範例對學習者來說是較簡單的等值分數演練範例，因此學習者接受連續型範例資訊科技融入教學在學習興趣方面顯著優於其它兩組。

在數學自我效能方面，自我效能會影響個人的思考模式與情感反應，當面對較困難的任務時，高自我效能者會有比較正向的態度，認為自己有能力解決問題，較有意願面對問題，所以自我設定的目標會較具有挑戰性，甚至因挫折而更加努力，將行為或學習的成敗歸因於自己的能力或努力程度，相反的，低自我效能者認為任務往往比實際上來的要困難，認為行為的結果全由環境所控制，努力無法改變既定的事實，在思考如何解決任務時，低自我效能者常常自認為自己能力不足以解決問題，導致信心降低，因而產生焦慮、緊張、有壓力、沮喪等情感反應(Bandura, 1986)。因此，高數學自我效能學習者的數學學習態度顯著優於低數學自我效能者。

第五章　結論與建議

本研究旨在探討不同的範例融入方式與數學自我效能，對國小學童學習等值分數概念時，等值分數彈性思考表現與數學學習態度之影響。本研究根據實驗數據結果歸納出以下之結論，並就教學實驗過程與實驗結果所發現之問題提出相關建議，供未來研究之參考。

第一節　結論

本研究之結論根據第四章所分析之結果來進行歸納，獲得四點結論：(1)運用整合型範例資訊科技融入教學，能促進學習者等值分數彈性思考；(2)運用虛擬教具於數學教學中，可提升學習者的學習興趣；(3)高數學自我效能學習者透過不同範例融入方式學習等值分數，均有較好的等值分數彈性思考表現及學習態度。各點結論之詳細描述分別如下：

一、運用整合型範例資訊科技融入教學，能促進學習者等值分數彈性思考

等值分數教材提供的範例不當，使學生解決等值分數問題所應具備的能力不足，且實體教具不易說明等值分數概念，造成國小學生等值分數彈性思考能力不足。虛擬教具的可變性使學習者可針對某一物件的某一部分塗顏色，或是增加或減少某一物件的數量(Yuan, 2005)，將虛擬教具運用於數學教學中均有良好的學習成效，可幫助學習(Kong & Kwo, 2005; Moyer, Niezgoda, & Stanley, 2005; Olkun, 2003; Reimer & Moyer, 2005; Steen, Brooks, & Lyon, 2006; Suh, Moyer, & Heo, 2005)。國小五年級學生處於具體運思與形式運思兩者之間，操作虛擬教具符合學習者的認知發展，運用虛擬教具於等值分數概念之學習，學習者可以很容易的搬移分數圖形、改變顏色、增加或刪除分割線，並且將抽象概念具體化、視覺化，學習者可以很容易理解不同等份分割之分數圖形其值是相等的，加上適當的演練範例可促進學習者的彈性思考，達到較佳的學習成效，研究結果顯示運用整合型

範例資訊科技融入教學，能促進學習者等值分數彈性思考。

三、運用虛擬教具於數學教學中，可提升學習者的學習興趣

在數學學習方面，有些內容是很抽象、不易了解、或是必需透過實地操作以經驗其中概念，因此容易造成學生學習動機低落，若欲提高學習動機及增進學習成效，有必要將教材以視覺化的方式呈現，將抽象教材內容具體化(張國恩, 2002; 萬志祥, 2004)。虛擬教具可將抽象的概念具體化、視覺化，並讓學生實際操作達到互動的效果，動態、顏色、圖解、互動的特性可讓學生保持注意力，使他們可以持續完成任務，虛擬教具容易操作，且比實體教具更方便更為迅速，提高了學習的興趣。本研究使用虛擬教具於教學中，學習者可以很容易理解等值分數概念，且動態、顏色、圖解、互動的特性可讓學生保持注意力，因此學習者有較佳的學習興趣。

三、高數學自我效能學習者透過不同範例融入方式學習等值分數，均有較好的等值分數彈性思考表現及學習態度

高自我效能在學習活動前會較集中注意力去了解要解決的任務，投入較多的努力，面臨困難時較能持續進行活動，遭遇失敗挫折時反應較有彈性知變通，面對較困難的任務時，會有比較正向的態度，認為自己有能力解決問題，較有意願面對問題(Bandura, 1986)。自我效能也會影響個人的思考模式與情感反應，當面對較困難的任務時，高自我效能者會有比較正向的態度，認為自己有能力解決問題，較有意願面對問題，所以自我設定的目標會較具有挑戰性，甚至因挫折而更加努力，將行為或學習的成敗歸因於自己的能力或努力程度，相反的，低自我效能者認為任務往往比實際上來的要困難，認為行為的結果全由環境所控制，努力無法改變既定的事實，在思考如何解決任務時，低自我效能者常常自認為自己能力不足以解決問題，導致信心降低，因而產生焦慮、緊張、有壓力、沮喪等情感

反應(Bandura, 1986)。所以，高數學自我效能學習者透過不同範例融入方式學習等值分數，均有較好的等值分數彈性思考表現。

第二節　建議

本研究根據教學實驗過程及資料分析結果所產生的問題，提出下列建議以供未來研究與數學教學之參考。

一、等值分數教學內容應加入促進彈性思考能力之範例，並善用虛擬教具幫助學習者對概念之了解

等值分數概念是分數子概念中最困難的子概念，其困難處在於學生的思考必須更為彈性、更能勇於從具體操作進入形式運思來解決問題。當學童分數概念殘缺不全、思考過於僵化、或彈性思考能力不足時，皆無法正確解決等值分數問題(彭海燕, 1998)。本研究結果顯示，運用整合型範例資訊科技融入教學可提升學習者等值分數彈性思考之表現，建議教學時應該提供適當的演練範例，並善用虛擬教具的可變性，任意的改變物件的屬性，將抽象概念具體化、視覺化，以理解其中數學概念，將資訊科技當作心智工具，適切的運用虛擬教具在數學教學上，以提升學習成效。

在未來的研究方面，由於本研究受限於教學環境的限制，無法讓每位學習者有充足的操作機會，因此建議未來研究可以讓每位學習者都可以操作虛擬教具，史研究結果更為精確。本研究結果顯示運用整合型範例資訊科技融入教學，在連續量情境等值分數問題學習者有較佳的表現，可能是因為本研究虛擬教具教不適合離散量情境等值分數問題之教學，因此建議未來可以發展更適合離散量情境之等值分數問題之虛擬教具，以提升學習者的分割能力、組合能力及單位形成能力。

二、數學教學中應善用資訊科技工具的特性，以提升學習者學習興趣

在數學學習方面，有些內容是很抽象不易了解，或是必需透過實際操作以經驗其中概念，因此容易造成學習動機低落，資訊科技可以透過多媒體互動的特性，提供半具體物操作，將不易體驗之知識以影像或動畫呈現，抽象概念予以具

體化、視覺化，使學童有充足地操作機會，以經驗其中的數學概念，有效地具體呈現學習內容，幫助學童理解數學概念(張國恩, 2002; 萬志祥, 2004)。本研究結果顯示運用虛擬教具於數學教學中，可提升學習者的學習興趣，與過去虛擬教具相關實徵研究結果一致，因此建議在數學教學中，可善用資訊科技工具的特性，提升學習者學習興趣。

三、增加學習者數學自我效能，進而提升學習成效及學習態度

本研究結果顯示，數學自我效能會影響學習成效及學習態度，高數學自我效能學習者在學習成效及學習態度上顯著優於低自我效能學習者，自我效能是可以被改善的，因此建議教師在教學中應增加學習者的數學自我效能，以提升學習者的學習成效及學習興趣，在未來的研究方面，可進一步探討教學中使用增進自我效能之教學策略對學習之影響。本研究受限於研究對象之數量，各組樣本之數學自我效能量表總得分前 50%為高自我效能者；總得分後 50%為低自我效能者，為求實驗的準確性，建議未來研究可以增加研究樣本，將數學自我效能做更好的分組，以探討範例融入方式及數學自我效能交互作用的關係。

目標達成、替代經驗、言語說服、與生理狀態四種資訊來源皆會影響學習者自我效能的判斷(Bandura, 1986)。教學中可透過教師回饋(Teacher Feedback)、目標設定(Goal Setting)、及楷模(Modeling)等教學策略，提升學習者數學自我效能(Siegle & McCoach, 2007)。教師的回饋會顯著影響學生對自己付出多少努力及能力的感知，是影響學生自我效能最主要的因素，教師可以幫助學生了解努力與能力之間的關係，回饋不只是簡單的跟學生說「你做得到」就可以提升學生的自我效能，當學生失敗時應給予努力回饋；當成功時應給予能力回饋，才是較有效的回饋方式。

目標設定也會影響學習者的自我效能及學習成就，在學習的過程中，學生常常無法察覺自己的能力與學習的進展，目標的設定可以提供一個標準，讓學生能

評估自己學習狀況。設定明確的目標可以幫助學習者較容易評估自己的學習情況，讓學習者維持較高的學習動機，無效的目標設定學習者很難評量自己的學習狀況。設定目標時，教師可以和學生共同將較大的目標切割成較小的目標，當學生認為老師設定的目標很難達到時，應該調整目標，符合學生程度。

楷模的運用是社會比較的一種，在知識獲取的過程中，也是影響學習者自我效能的重要因素之一。各種類型的楷模都是有效的，當學習者觀察到與自己類似的楷模是最有效的方式，可以增加學習者的自我效能與行為改變，因為他們相信自己可以跟楷模做的一樣好，因此有較高的自我效能。與學習者能力相似、或能力稍高的楷模，可以提供學習者評估自我效能的機會，同儕楷模是最可以改善自我效能的楷模方式，當學習者觀察到同儕成功的解決問題時，他們認為自己也是有能力可以解決。

參考文獻

中文部份

Booth, L. R. (1987)。分數的學習困難(Booth 專題演講，林麗惠整理)。**科學教育月刊，100**，8-16。

中小學數學科教材教法 (張英傑、周菊美譯) (2005)。台北市：五南。(原著出版年：2004 年)

王全世 (2000)。對資訊科技融入各科教學之資訊情境的評估標準。**資訊與教育，77**，36-47。

王春生 (2004)。教師專業成長資訊融入教學提昇學生學習。**北縣教育，50**，55-58。

何榮桂 (2002)。台灣資訊教育的現況與發展－兼論資訊科技融入教學。**資訊與教育，87**，22-48。

余民寧 (2005)。心理與教育統計學。台北市：三民。

吳知賢 (1996)。歸因再訓練在國小兒童自我效能及學業成就之影響研究。**國民教育研究集刊，2**，1-36。

吳麗玲 (2005)。**台灣、美國與新加坡國小五、六年級分數教材內容之分析比較**。國立嘉義大學數學教育研究所，未出版，嘉義市。

呂玉琴 (1991a)。分數概念：文獻探討。**國立台北師範學院學報，4**，573-606。

呂玉琴 (1991b)。影響分數二分之一概念的因素：個案分析。**國民教育，31(11,12)**，16-21。

呂玉琴 (1994)。**國小教師分數教學之相關知識研究**。國立台灣師範大學科學教育研究所博士論文，未出版，台北市。

呂玉琴 (1998a)。國小教師分數教學之相關知識研究。**臺北師院學報，11**，393-438。

呂玉琴 (1998b)。**分數的四則運算與等值分數的設計**。國民小學數學科新課程概說【高年級】(114-131頁)。台北市：台灣省國民學校教師研習會。

林碧珍 (1990)。從圖形表徵與符號表徵之間的轉換探討國小學生的分數概念。**新竹師院學報，4**，295-347。

林福來、黃敏晃、呂玉琴 (1996)。分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。**科學教育學刊，4**(2)，161-196。

邱瓊慧 (2002)。中小學資訊科技融入教學之實踐。**資訊與教育雜誌，88**，3-10。

洪素敏、楊德清 (2002)。創意教學：分數的補救教學。**科學教育研究與發展季刊，29**，33-52。

徐新逸、吳佩謹 (2002)。資訊融入教學的現代意義與具體作為。**教學科技與媒體，3**，63-73。

袁媛、吳東光、林素微 (2007)。**國中小數學虛擬教具的研發與教學研究**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告(編號：NSC95-2520-S-033-003)。執行單位：中原大學。

張國恩 (2002)。從學習科技的發展看資訊融入教學的內涵。**北縣教育，41**，16-25。

教育部 (2004)。**國民中小學九年一貫課程綱要**。台北：教育部。

曹萬春 (2004)。**應用鷹架理論輔助國小分數迷思概念課程效益之探究**。國立台中師範學院數學教育學系碩士論文，未出版，台中市。

陳玉玲 (1995)。**目標設定、目標投入與自我效能對國小學生數學作業表現的影響**。國立高雄師範大學教育學系碩士論文，未出版，高雄市。

陳淑貞 (2004)。國小教師對於資訊科技融入教學的迷思與省思。**師說，180**，11-13。

陳雅芬 (2003)。**國小學童等值分數概念的試題編製與分析之研究**。國立台中師範學院數學教育學系碩士論文，未出版，台中市。

陳靜姿 (1997)。**國小四年級兒童等值分數瞭解之初探**。國立台中師範學院初等教育研究所碩士論文，未出版，台中市。

彭海燕 (1998)。**國小學童等值分數概念了解之研究**。國立台北師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版，台北市。

游自達 (1993)。美國國小兒童對分數大小之理解及思考策略。**國立台中師範學院初等教育研究所初等教育研究集刊，1**，121-145。

湯錦雲 (2002)。**國小五年級學童分數概念與運算錯誤類型之研究**。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。

黃敏晃、周筱亭 (2001)。**國小數學教材分析-分數的數概念與運算**。台北縣：教育部台灣省國民學校教師研習會。

黃馨緯 (1995)。**國小高年級學童分數數線表示法了解之研究**。國立台中師範學院初等教育研究所碩士論文，未出版，台中市。

甯自強 (1997)。量的子分割(二)：真分數的引入。**教師之友，38(4)**，33-39。

楊壬孝 (1988)。**國中小學生分數概念的發展**。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告(編號：NSC-77-0111-S-003-09A)。執行單位：國立台灣師範大學數學系。

楊瑞智 (2000)。探究師院生之分數基本概念及分數概念的課室教學。**台北市立師範學院學報，31**，357-382。

萬志祥 (2004)。資訊融入教學的省思與推動。**北縣教育，50**，42-45。

詹志禹 (1997)。全方位對話。**教育研究雙資訊月刊，17**，6-7。

劉世雄 (2002)。探討資訊科技融入教學之課程設計。**生活科技教育，35(6)**，24-31。

劉信雄 (1992)。**國小學生認知風格、學習策略、自我效能與學業成就之研究**。國立政治大學教育研究所博士論文，未出版，台北市。

劉秋木 (2002)。**國小數學科教學研究**。台北：五南。

數學學習心理學 (林義雄、陳澤民譯) (1995)。台北市：九章。(原著出版年：1987年)

蔡麗蓉 (2003)。**國小數學科審定本教科書分數教材之內容分析**。國立台中師範學院國民教育研究所，未出版，台中市。

賴阿福 (2004)。數位化教學與學習環境之變革。**國教新知，51(1)**，19-32。

魏麗敏 (1996)。**影響國小兒童數學成就之自我調節學習與情感因素分析及其策略訓練效果之研究**。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所博士論文，未出版，台北市。

英文部份

Ainsa, T. (1999). Success of using technology and manipulatives to introduce numerical problem solving skills in monolingual/bilingual early childhood classrooms. *Journal of Computers in Mathematics and Science, 18*(4), 361-369.

Anderson, J. R., Farrell, R., & Sauers, R. (1984). Learning to program in LISP. *Cognitive Science, 8*(2), 87-129.

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning form examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research, 70*(2), 181-214.

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh, & M. Landau, (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp.91-126). New York: Academic Press.

Behr, M. & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (pp. 201-248). Boston: Alley & Bacon.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., & Post, T. R. (1985). Construct a sum: A measure of children's understanding of fraction size. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(2), 120-131.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in*

Mathematics Education, 15(5), 323-341.

Bergeron, M. J. & Herscovics, H. (1987). Unit fractions of a continuous whole. *Psychology of Mathematics Education, 11*(1), 357-365.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1-2), 7-16.

Bouffard-Bouchard, T. (1989). Influence of self-efficacy of performance in a cognitive task. *Journal of Social Psychology, 130*(3), 353-363.

Bright, G. W., Behr, M. J., Lesh, R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(3), 215-232.

Brown, S. D. (1989). *Effects of self-efficacy: Aptitude incogruence on career behavior.* The American psychological Association. (ERIC Document Reproduction Service No. ED302747)

Clement, D. H. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(1), 45-60.

Clements, D. H., Nastasi, B. K., & Swaminathan, S. (1993). Young children and computers: Crossroads and directions from research. *Young Children, 48*(2), 56-64.

Columba, H. L. (1989). *Equivalent fraction concepts: A teaching experiment.* Unpublished doctoral dissertation, University of Louisville, Louisville, KY.

Dias, L. B. (1999). Integrating technology: Some things you should know. *Learning & Leading with Technology, 27*(3), 10-13.

Drickey, N. A. (2000). *A comparison of virtual and physical manipulatives in teaching virtualization and spatial reasoning to middle school mathematics students*. Unpublished doctoral dissertation, Utah State University.

Duarte, V., Young, M., & DeFranco, T. (2000). What experts say and do regarding the use of technology in the mathematics classroom. *Journal of Research and Development in Education, 33*(4), 223-231.

Enderson, M. (1997). Old problems, new questions: Using technology to enhance math education. *Learning and Leading with Technology, 25*(2), 28-32.

Godding, P. R. & Glasgow, R. E. (1985). Self-efficacy and outcome expectancy as predictors of controlled smoking status. *Cognitive Therapy and Research, 9*(1), 23-31.

Hackett, G. & Betz, N. E. (1989). An exploration of the mathematics self-efficacy/ mathematics performance correspondence. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 261-273.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics*. London: John Murray Ltd.

Hunting, R. P. (1983). A case study of knowledge of units and performance with fractions. *Journal for Reacher in Mathematics Education, 14*(3), 182-197.

Izydorczak, A. (2003). *A study of virtual manipulatives for elementary mathematics*. Unpublished doctoral dissertation, State University of New York-Buffalo.

Johansen, D. H. (2000). *Computer as mindtools for schools.* NJ: Prentice Hall, Inc.

Jonassen, D. H., Peck, K.C., & Wilson, B. G.. (1999). *Learning with technology: A constructivist perspective.* Upper Saddle River, NJ: Merrill/ Prentice Hall.

Kamii, C. & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *Journal of Mathematical Behavior, 14*(4), 365-378.

Kerslake, D. (1986). *Fraction: Children’s strategies and errors*. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project. Windsor, Berkshire, England: NFER-NELSON.

Kong, S. C. & Kwok, L. F. (2005). A cognitive tool for teaching the addition/ subtraction of common fractions: A model of affordances. *Computers & Education, 45*(2), 245-265.

LeFevre, J. A. & Dixon, P. (1986). Do written instructions need examples? *Cognition and Instruction, 3*(1), 1-30.

Lent, R. W. Brown, S. D., & Larkin, K. C. (1984). Relation of self-efficacy expectations to academic achievement and persistence. *Journal of Counseling Psychology, 31*(3), 356-362.

Moyer, P., Bolyard, J., & Spikell, M. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics, 8*(6), 372-377.

Moyer, P., Niezgoda, D., & Stanley, M. (2005). Young children's use of virtual manipulatives and other forms of mathematical representation. In W. Masalski & P. Elliott (Eds.), *Technology-supported mathematics learning environments* (pp. 17-34). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Olkun, S. (2003). Comparing computer versus concrete manipulatives in learning 2D geometry. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 22*(1), 43-56.

Olkun, S., Altun, A., & Smith, G.. (2005). Computers and 2D geometric learning of Turkish fourth and fifth graders. *British Journal of Educational Technology, 36*(2), 317-326.

Panagos, R. J. & DuBois, D. L. (1999). Career self-efficacy development and students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice, 14*(1), 25-34.

Parrat-Dayan, S. & Voneche, J. (1992). Conservation and the notion of "half". In J. Bideaud, C. Meljac, & J. P. Fischer (Eds.), *Pathways to number.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Piaget, J. (1987). *Possibility and necessity.* Minneapolis: University of Minnesota Press. (Original work published 1983)

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. New York: Basic Book.

Post, T. R. (1988). Some notes on the nature of mathematics learning. In T. R. Post

(Eds.), *Teaching mathematics in grades K-8* (pp. 1-19). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Randhawa, B. S., Beamer, J. E., & Lundberg, I. (1993). Role of mathematics self-efficacy in the structure model of mathematics achievement. *Journal of Educational Psychology, 85*(1), 41-48.

Reimer, K. & Moyer, P. S. (2005). Third-graders learn about fractions using virtual manipulatives: a classroom study. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 24*(1), 5-25.

Recker, M. & Pirolli, P. (1995). Modeling individual differences in learning strategies. *Journal of the Learning Sciences*, *4*(1), 1-38.

Roth, W. G. (1985). *Treatment implications derived from self-efficacy research with children* (Report No. CG019361). Doctor of Psychology Research Paper. (ERIC Document Reproduction Service No. ED273897)

Saenz-Ludlow, A. (1994). Michael's Fraction Scheme. *Journal of Research in Mathematics Education, 25*(1), 50-85.

Saenz-Ludlow, A. (1995). Ann's fraction schemes. *Educationl Studies in Mathematics Education, 28*(2), 101-132.

Schunk, D. H. (2000). *Learning theories: An educational perspective*. (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Sherer, M. & Maddux J. (1982). The self-efficacy scale: Construction and validation. *Psychological Reports, 51*(2), 663-671.

Shade, D. & Watson, J. A. (1990). Computers in early education: Issues put to rest, theoretical links to sound practice, and the potential contribution of microworlds. *Journal of Educational Computing Research, 6*(4), 375-392.

Siegle, D. & McCoach, D. B. (2007). Increasing student mathematics self-efficacy through teacher training. *Journal of Advanced Academics, 18*(2), 278-312.

Skinner, E. A. Wellborn, J. G., & Connell, J. P. (1990). What it take to do well in school and whether I've got it: A process model of perceived control and children's engagement and achievement in school. *Journal of Educational Psychology, 82*(1), 22-32.

Steen, K., Brooks, D., & Lyon, T. (2006). The impact of virtual manipulatives on first grade geometry instruction and learning. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *25*(4), 373-391.

Suh, J., Moyer, P. S., & Heo, H. (2005). Examining technology uses in the classroom: students developing fraction sense by using virtual manipulative concept tutorials. *Journal of Interactive Online Learning, 3*(4), 1-21.

Thomas, J. W., Iventosch, L., & Rohwer, W. D. Jr. (1987). Relationships among student characteristics, study activities, and achievement as a function of course characteristics. *Contemporary Educational Psychology, 12*(4), 344-364.

Vance, J. H. (1992). Understanding equivalence: A number by any other name. *School Science and Mathematics*, *92*(5), 263-266.

Woolfolk, A. E. & Hony, W. K. (1990). Prospective teachers' sense of efficacy and beliefs about control. *Journal of Educational Psychology, 82*(1), 81-91.

Yuan, Y. (2005). Design of virtual manipulatives for mathematical explorations using Flash ActionScript. *Asia Technology Conference in Mathematics*, 182-193.

Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation: A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13-39). New York: Academic Press.

附錄一　數學自我效能量表

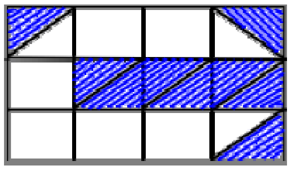
題號	題　目	非常不同意	不同意	部分同意	同意	非常同意
1.	上數學課時，就算內容看起來很困難，我還是會試著努力學習。	1	2	3	4	5
2.	數學課的作業或練習題，我都能夠把它做好。	1	2	3	4	5
3.	我有信心在數學的考試中取得好成績。	1	2	3	4	5
4.	當新的數學課程看起來太困難時，我還是會試著去學習。	1	2	3	4	5
5.	上數學課時,就算遇到挫折,我還是會繼續努力學習。	1	2	3	4	5
6.	我相信我有能力能獨自完成老師所出的數學作業。	1	2	3	4	5
7.	老師教新的數學觀念時，就算一開始學不會，我還是會繼續努力學習。	1	2	3	4	5
8.	就算是不喜歡數學，我還是會認真上數學課。	1	2	3	4	5
9.	對於老師沒教過的數學問題，我相信我大部份能順利的解決。	1	2	3	4	5
10.	就算我覺得數學很難，我還是會努力的去試著理解。	1	2	3	4	5
11.	對於自己訂定的數學學習目標，我會試著去完成。	1	2	3	4	5
12.	當學習數學課程時，不論內容簡單或困難，我都有把握能夠理解老師所教的。	1	2	3	4	5
13.	對於較困難的數學問題，我還是會試著去解決。	1	2	3	4	5
14.	上數學課時，就算聽不懂老師講的內容，我還是會繼續努力。	1	2	3	4	5
15.	我認為我可以靠自己的能力解決數學問題。	1	2	3	4	5
16.	進行數學科教學活動時，我喜歡自己找出解答的方法。	1	2	3	4	5
17.	解決數學問題時，我不會輕易放棄。	1	2	3	4	5
18.	我上數學課都很認真。	1	2	3	4	5

附錄二　數學學習態度問卷

題號	題目	非常不同意	不同意	部分同意	同意	非常同意
1.	我覺得今天的數學課比以前有趣，使我更喜歡上數學。	1	2	3	4	5
2.	上完今天的數學課後，我願意花更多時間在學習數學上。	1	2	3	4	5
3.	今天上數學課時，我一直希望下課鐘聲能趕快響起。	1	2	3	4	5
4.	我覺得今天的數學課比以前更輕鬆愉快。	1	2	3	4	5
5.	上完今天的數學課後，我以後會更專心上數學課。	1	2	3	4	5
6.	上完今天的數學課後，我希望不要再上數學課。	1	2	3	4	5
7.	我覺得我今天上數學課時比以前更專心。	1	2	3	4	5
8.	上完今天的數學課後，我願意試著將所學的數學知識運用於日常生活之中。	1	2	3	4	5
9.	上完今天的數學課後，我覺得以後考數學時，我還是會因為太緊張，而忘記已學會的東西。	1	2	3	4	5
10.	我覺得我今天上數學課比以前更想舉手發言。	1	2	3	4	5
11.	上完今天的數學課後，我以後會更努力學好數學。	1	2	3	4	5
12.	上完今天的數學課後，我還是會擔心我的數學學不好。	1	2	3	4	5
13.	我覺得我今天上數學課時，比較認真思考老師問我的問題。	1	2	3	4	5
14.	上完今天的數學課後，我以後會更主動地參與數學學習活動。	1	2	3	4	5
15.	上完今天的數學課後，我覺得所有科目中，數學給我的壓力還是最大的。	1	2	3	4	5

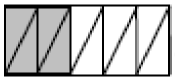
附錄三　等值分數成就測驗卷

1.(　　) 右圖中，畫斜線的部份佔全部的多少，請選出對的答案。



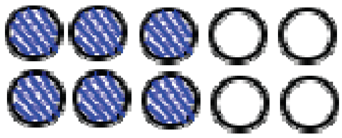
(1) $\frac{9}{12}$　(2) $\frac{9}{18}$　(3) $\frac{9}{24}$　(4) $\frac{9}{48}$

2.(　　) 右圖中，灰色部分是整個圖形的幾分之幾？



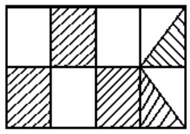
(1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{2}{5}$　(3) $\frac{2}{6}$　(4) $\frac{2}{10}$

3.(　　) 右圖中，畫斜線的部份佔全部的多少，請選出對的答案。



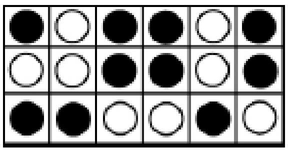
(1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{3}{5}$　(3) $\frac{4}{10}$　(4) $\frac{24}{30}$

4.(　　) 右圖中，斜線的部分是全部的幾分之幾呢？



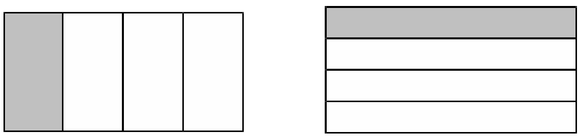
(1) $\frac{8}{16}$　(2) $\frac{5}{8}$　(3) $\frac{5}{10}$　(4)以上皆非

5.(　　) 下圖是一盒巧克力，塗色的部分是幾盒巧克力呢？



(1) $\frac{10}{7}$盒　(2) $\frac{5}{9}$盒　(3) $\frac{7}{10}$盒　(4) $\frac{7}{18}$盒

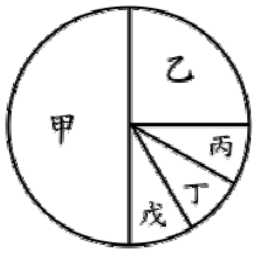
6.(　　) 下圖中，這兩個長方形一樣大，請問灰色的部分，是不是一樣大呢？



甲　　乙

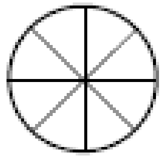
(1)甲比較大　(2)乙比較大　(3)一樣大　(4)無法比較

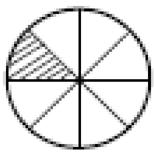
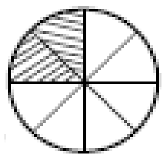
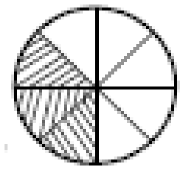
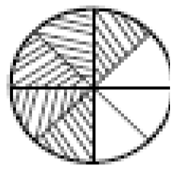
7.(　　) 右圖中，「乙」佔全部的多少，請選出對的答案。



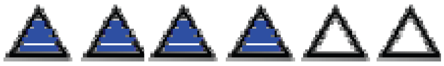
(1) $\frac{1}{3}$　　(2) $\frac{1}{4}$　　(3) $\frac{1}{5}$　　(4) $1\frac{1}{2}$

8.(　　) 媽媽買了一個蔥油餅，切成右圖，小胖吃掉了其中的四分之一。把小胖吃掉的畫上斜線，下面哪一個選項是正確的？



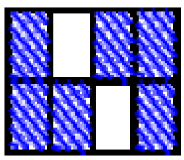
(1)

(2)

(3)

(4)


9.(　　) 下圖中，畫斜線的部份佔全部的多少，請選出對的答案。



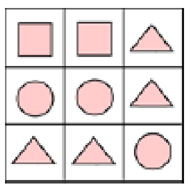
(1) $\frac{4}{12}$　　(2) $\frac{2}{6}$　　(3) $\frac{2}{3}$　　(4) $\frac{1}{3}$

10.(　　) 下圖中，斜線的部分是全部的幾分之幾呢？



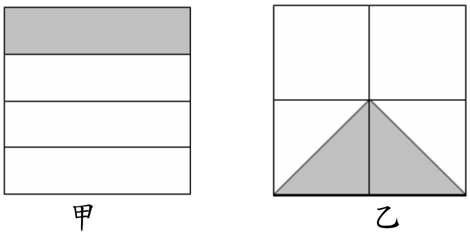
(1) $\frac{2}{3}$　　(2) $\frac{3}{4}$　　(3) $\frac{2}{6}$　　(4)以上皆非

11.(　　) 下圖中有三種圖形，圓形佔全部的多少？



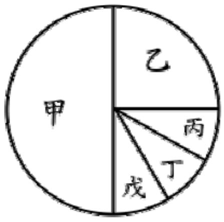
(1) $\frac{1}{2}$ 盒　　(2) $\frac{1}{3}$ 盒　　(3) $\frac{3}{6}$ 盒　　(4) $\frac{4}{9}$ 盒

12.(　　) 下圖中兩個正方形一樣大，請問灰色的部分，是不是一樣大呢？



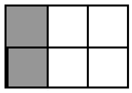
(1)甲比較大　　(2)乙比較大　　(3)一樣大　　(4)無法比較

13.(　　) 右圖中,「丁」佔全部的多少,請選出對的答案。



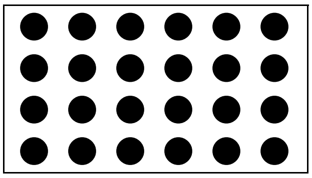
(1) $\frac{1}{3}$　　(2) $\frac{1}{4}$　　(3) $\frac{1}{5}$　　(4) $\frac{1}{12}$

14.(　　) 右圖中，灰色部分是整個圖形的幾分之幾？



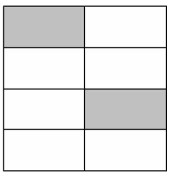
(1) $\frac{1}{3}$　　(2) $\frac{1}{4}$　　(3) $\frac{2}{4}$　　(4) $\frac{4}{6}$

15.(　　) 如下圖，一盒蘋果有 24 顆，18 顆蘋果是幾盒？



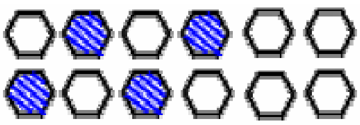
(1) $\frac{1}{2}$　　(2) $\frac{2}{4}$　　(3) $\frac{6}{8}$　　(4) $\frac{12}{16}$

16.(　　) 下圖中，斜線的部分是全部的幾分之幾呢？



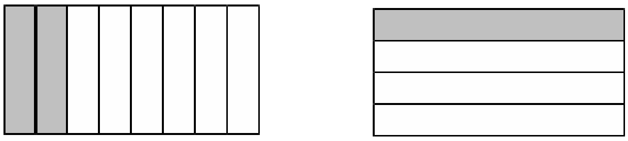
(1) $\frac{2}{6}$　　(2) $\frac{4}{12}$　　(3) $\frac{4}{16}$　　(4)以上皆非

17.(　　) 下圖中，畫斜線的部份佔全部的多少？請選出對的答案。



(1) $\frac{1}{2}$盒　　(2) $\frac{1}{3}$盒　　(3) $\frac{1}{4}$盒　　(4) $\frac{1}{5}$盒

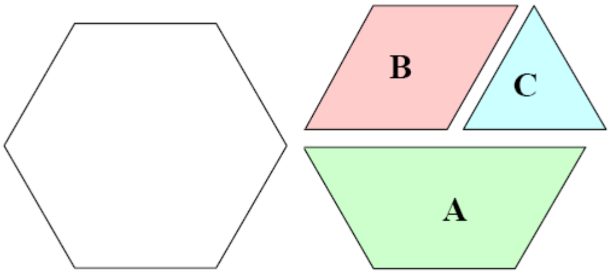
18.(　　) 下圖中兩個長方形一樣大，請問灰色的部分，是不是一樣大呢？



甲　　　　乙

(1)甲比較大　　(2)乙比較大　　(3)一樣大　　(4)無法比較

19.(　　) 圖二中的圖形「A」、「B」及「C」是由圖一的六邊形所分割而成的。

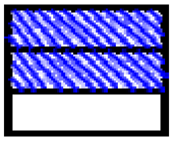


圖一　　　　圖二

請問，「圖二」中的「C」圖形是佔「圖一」這個六邊形的多少？

(1) $\frac{1}{3}$　　(2) $\frac{1}{4}$　　(3) $\frac{1}{5}$　　(4) $\frac{1}{6}$

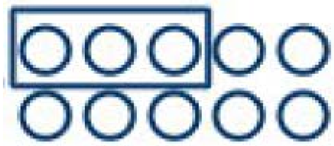
20.(　　) 右圖中，斜線部分是整個圖形的幾分之幾？



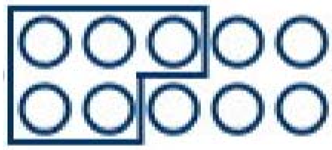
(1) $\frac{1}{3}$　　(2) $\frac{2}{6}$　　(3) $\frac{6}{9}$　　(4)以上皆非

21.(　　) 如下圖，10 個彈珠裝成一袋，要圈出 $\frac{3}{5}$ 袋，下列哪一個選項是正確的？

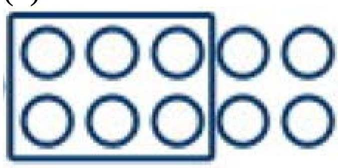
(1)



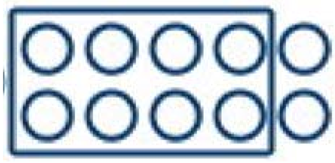
(2)



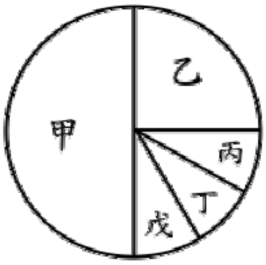
(3)



(4)

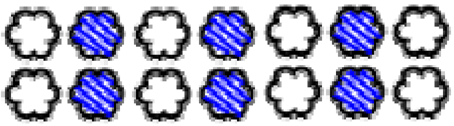


22.(　　) 下圖中，丙、丁、戊三塊加起來是全部的幾分之幾？



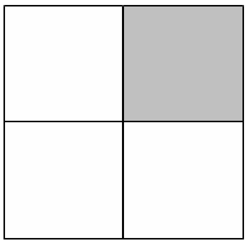
(1) $\frac{3}{5}$　　(2) $\frac{1}{4}$　　(3) $\frac{2}{3}$　　(4)以上皆非

23.(　　) 下圖中，畫斜線的部份佔全部的多少，請選出對的答案。

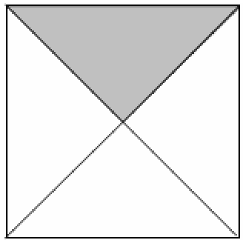


(1) $\frac{3}{4}$盒　　(2) $\frac{3}{7}$盒　　(3) $\frac{6}{8}$盒　　(4) $\frac{6}{16}$盒

24.(　　) 下圖中，這兩個正方形一樣大，請問灰色的部分，是不是一樣大呢？



甲



乙

(1)甲比較大　　(2)乙比較大　　(3)一樣大　　(4)無法比較