

第一章 緒論

本研究是探討國中數學教師的幾何教學概念。以下將以兩小節分別敘述本研究的背景和動機，以及研究目的和研究問題。

第一節 研究背景和動機

本節中將從九年一貫幾何課程來描述對國中數學教師的教學期望，以及在課程的理念背景之下，教師的教學觀與其所需具備的教學專業內涵，據此闡述個人的研究動機。

一、九年一貫數學課程和教學要求

現階段國中數學課程標準包括，民國 89 年 9 月公布於 90 學年度起實施的暫行綱要和 92 年 11 月頒布於 94 學年度起實施的正式綱要，前者適用於目前的八、九年級，後者適用於七年級。課程的設計是以學生為主體和生活經驗為重心，來培養他們的基本數學能力。將學習歷程分為一至三年級、四至五年級、六至七年級和八至九年級四個階段；以及「數與量」、「圖形與空間（正式綱要中為「幾何」）」、「代數」、「統計與機率」和「連結」五大學習主題；其中，相鄰兩階段的課程內容，並非二分，而是有重疊的部分（教育部，2001）。因此，同一主題的數學概念，可以不同的形式重複出現在不同的年級，而其內容越來越廣，程度越來越深，一圈一圈愈轉愈大，這種數學課程就叫作「螺旋式課程（spiral curriculum）」（林清山，1977，p. 20）。其中，第三階段學生的學習特徵是屬於類化具體表徵，也就是說，他們能夠使用具體表徵來學習抽象概念，並且，能夠辨識出樣式與樣式之間的關係（教育部，2001）。而從個人的教學經驗中發現，七年級學生在幾何單元的學習似乎特別能夠反應出這樣的特徵，例如，他們可以透過摺紙來發現三角形的內角和是 180 度，而且，也可以辨識正方形與菱形兩者之間的關係。然而，關於「圖形與空間」的主題內容，暫行綱要指出，它是經由實地的觀察、實驗與總結而得

到的空間知識（教育部，2001）。又因為，人類對於「形」或「幾何」的直覺遠比一般人所想像要豐富，所以，正式綱要主張「幾何」不但是數學教育中的重要課題，對學生而言也是較易學習、較有趣的單元（教育部，2003）。這使得個人想去了解，教師會以何種形式的教學活動來幫助國中學生學得這些幾何概念？

另一方面，隨著課程標準取向和內涵的調整，這樣的改革趨勢對於教師課堂的教學也有不同的要求。例如暫行綱要（教育部，2001）主張，教學應該要依據教學目標選取合適的教材、佈置適當的學習環境和採用不同的教學方式；教師應該要透過引導與啟發，使學生形成解決問題所需的數學概念和技能，並讓他們體驗到生活情境和數學的連結過程；教師要讓學生透過實測與直觀來獲得數、量與形的概念，再逐步抽象化，進而體會數學的形式；而且，教師也要在教學過程中採用各種不同的評量方式。關於幾何主題的教學，則是建議教師要從學生生活經驗中較熟悉的形體入手，透過察覺、辨識、操作與實驗，以發現形體的組成要素和組成要素與形體之間的關係，進而能進行簡單推理（教育部，2001）。而正式綱要（教育部，2003）則是建議教師，應該幫助學生學習主要的數學題材；啟發他們能在不同概念或不同領域之間作連結；引導或利用學生的前置經驗（即數學的直覺或直觀），以揉合新舊學習經驗；透過理解將觀念和計算結合，重視學生的演算能力；教導他們利用數學語言來溝通數學資訊或表達自己的意思；同時，引進與教學相關的數學史題材，將抽象概念具體化。而對於幾何單元的教學，則是認為培養推理能力是國中數學的重點之一，所以，教師要以學生已有的幾何直覺經驗為前導，並且，強調觀念的明確定義以及幾何量的代數運算，對於學習內容的安排要由非形式化逐漸提昇至形式化的推理（教育部，2003）。

在美國，「學校數學課程與評鑑標準（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, NCTM, 1989）」指出，教師應該幫助學生從數學課程中學到數學的價值、利用數學來溝通、進行數學推理，並且，對自己的數學能力有自信以及成為一個數學問題的解決者。其中，5至8年級幾何課程的目標是想幫助學生表達和理解所生活的世界，而且，在解決代數或測量問題時，也可以利用幾何的觀點，增加學生對抽象表徵的理解。

所以，教師在進行幾何概念的教學時，要讓學生去建構、繪圖、測量、想像、比較、轉換和分類幾何圖形，並且，幫助學生利用幾何概念的定義和圖形與圖形之間的關係，來發展非形式化的推理。另外，「數學教學的專業標準（Professional Standards for Teaching Mathematics, NCTM, 1991）」也提到，為了幫助學生達成課程目標，教師不只要締造一個鼓勵學生學習的課堂環境，也要選擇有意義的數學教學活動，以建立和促進課堂討論，並且，從中分析自己的教學活動和評量學生的學習成效。因此，「學校數學的評量標準（Assessment Standards for School Mathematics, NCTM, 1995）」即建議教師在評量時，必須要能測出學生「必須學會」和「已經學得」的數學知識，以有效推論學生的學習情況，進而修正自己的教學過程或是進行補救教學。

因此，從國內外的數學課程中皆可以發現，對於幾何單元的課程目標大都是相近的，也對教師的幾何教學提出許多相似且關鍵的建議。另外，就幾個審定版課本（如翰林版）的 93 學年度課程內容來看，依據暫行綱要其編排順序大致是，7 年級學習簡單的平面幾何圖形和幾何圖形的變換，而在 8 年級學習尺規作圖和三角形全等性質，和 9 年級學習幾何推理和相似形。這樣的縱向課程安排，應該是想以七年級習得的初步幾何概念，作為八、九年級學習更抽象幾何概念的基礎。所以依據暫行綱要，個人選擇了七年級（目前是八年級）的簡單平面幾何圖形和圖形的變換這兩單元，作為瞭解教師幾何教學思維和教學實作的研究單元。

二、數學教師的教學觀

暫行綱要（教育部，2001）強調學生應具有「帶得走的能力」，也希望「80%的學生能夠學會」綱要中所描述的指標能力。因此，在這樣的課程理念之下，教師會針對每一教學單元，依據教學情境中所應關注的各個面向，去思考自己的教學策略和教學實作內容，以幫助學生學習數學概念，同時，也希望能夠滿足社會對國中教師的期待。Fennema & Franke（1992）就曾經指出，教師對於數學、數學表徵和學生認知的知識，以及關於

教學和決策的一般知識之理解，不只會影響自己的教學活動，也會影響到學生的學習。其中，就教師的教學活動而言，Jackson (1968；引自 Brown & Borko, 1992) 指出了教師在教學前、教學中和教學後三個不同的時期，都會進行教學構思。Wilson, Shulman & Richert (1987) 也認為，教師會在教學前和教學中思考各種教學問題，從中不斷地作出適合學生的教學決策，而且，也需要仰賴自己豐富的知識來進行教學構思與教學實作。Artzt & Armour-Thomas (1999) 的研究結果顯示，教師的知識、信念和目標會直接影響其教學前、中、後的思考，並且會直接左右教師的教學行為。所以，教師的教學實作是與其對教學的認知是息息相關的。Blanton & Kaput (2005) 的研究結果也顯示，教師若是以有計畫和自發式的方式將代數推理整合至自己的教學實作中，則可以提升學生的代數推理能力。因此，個人若是想要探究教師在課堂中的教學實作活動，就必須先瞭解教師是如何利用自己的知識和信念來構思教學？以及，影響教師教學構思的因素有哪些？

Wohlhuter (1998) 分析了五位數學教師的幾何教學活動後發現，教師對於幾何本質的信念、是否將自己視為課程的規劃者以及依據自己專業發展經驗去尋找最適合學生學習幾何的教學方式，是促使教師會有不同的教學決策，並呈現出不同的幾何課堂面貌的重要因素。Moore & Bintz (2002) 則是認為，中學的幾何教學是以操作性活動 (manipulative activities) 為主，因此，建議教師可以善用教學目標和自己的背景知識，選用符合當下社會背景的文學作品，並從文章之中建構出相關的幾何意義以進行教學。在國內，吳勝安 (2005) 針對九年一貫的能力指標「S-4-13」發展了「幾何教學模組」，讓國中教師可以依據此教學模組的研究歷程，自行編寫出一套符合課程綱要的教材，使學生能進行有意義的學習。因此，若是從學生學習幾何的歷程來看，學生的幾何學習過程主要是經由實際動手操作、觀察來探索幾何性質，進而透過思考，以發現幾何的奧秘和學習方法，所以，教師若採用操作、觀察與思考的教學歷程來配合學生的學習，是可以培養他們創造思考的能力 (謝豐瑞，1994)。從這些研究中可以發現，教師會受到自己對於數學、數學教學、課程和學生學習的知識和信念的影響，而影響其教學的構思，進而選用自己認為適合學生學習的教學實作方式。這使得個人更想知道：國中教師在教幾何單元時，運用了哪些相關知識？換言之，個人想了解：七年級數學教師如何設計和

進行簡單平面幾何圖形和圖形變換兩個單元的教學活動？

在個人所服務的學校中，數學科的同事們常會在教學研究會中討論各自的教學心得，大多數的教師認為，課本在幾何單元添加了許多可以讓學生動手操作的活動，並且，學生並不需要準備複雜的工具和豐富的背景知識就能順利操作。因此，多半會讓學生從操作的過程中去體驗數學學習的成就感。此外，學校為了顧及學生的適性發展，也在每年級中都設置了美術資優班（簡稱美術班）、體育資優班（簡稱體育班）和普通班三種類型的班級。在這樣的教學環境背景下，每位教師對不同類型班級的教學方式都會有不同。再者，國內外關於幾何方面的研究（例如，梁勇能，2000；van Hiele, 1999），多數是以學生的幾何概念學習或發展為主，而且 Clements & Battista (1992, p. 457) 也指出，關於幾何教學的研究並未獲得適當的關注。基於這些原因，使個人想去探究：本校七年級的數學教師會基於何種考量而在不同類型班級的教學中，呈現出不同的教學構思和教學實作？以及，教學構思與實作之間一致或不一致的緣由為何？

三、數學教師的教學專業內涵

大家皆能認同教師是教育的第一線工作者，面對數學課程和教材不斷更新的同時，也必須兼顧到每位學生的學習需求，無論是對新手或是專家教師來說，即使擁有豐富的數學知識和教學策略或經驗，在構思和實施教學活動時，仍會遭遇到許多的教學問題。因此，在教學即解題的觀點下，教師若要有效解決自己的教學問題，就需要具有豐富的數學教學知識和彈性的教學思維（林福來，1997）。Clark & Peterson (1986) 認為，教師的教學思考在教學中扮演著重要的角色，而且，教師在教學時會持續不斷地構思，以作出適當的教學決策，並且，教師對教學的理解、設計和實作也會受其知識和信念的影響。所以，我們從教師教學思考的相關研究可以推論得到，教師的教學構思是與其關於學生學習的知識、課程知識和學習歷程的知識相關（Wilson et al., 1987）。另外，Koehler & Grouws (1992) 比較了多個關於教師教學實作的研究觀點發現，學生並非是被動的知

識接受者，他們也會主動地去學得知識和學習策略，因此，認為教師應該是一位具有豐富知識和反思能力的教學決策者。Senger（1999）也指出，當教師發現自己在教學實作和信念上的需求時，就可能以潛在的形式和緩慢的步調來調整自己的教學實作。

以幾何單元而言，Henderson（1988）研究五位職前中學數學教師的幾何理解與教學提問形式、調整教學能力之間的關係發現，職前教師的幾何概念理解可以有助於其進一步了解學生學習幾何的方式，並且，可以依據學生的幾何推理來調整自己的教學實作。Swafford, Jones & Thornton（1997）的研究結果則指出，當在職教師的幾何知識和關於學生幾何學習知識提升之時，教師的幾何教學內容、方式和特徵都會發生改變。Strutchens, Harris & Martin（2001）利用 NAEP（National Assessment of Educational Progress）評量學生的幾何理解發現，學生必須學習更多的幾何圖形，也要發展將幾何圖形和性質視覺化的能力，因此，建議幾何的教學活動要能使學生利用幾何屬性將圖形分類、依據幾何性質來區分圖形以及用最精簡的性質來描述特定圖形。

從上述這些研究中可以發現，教師會在教學構思和實作活動中展現其教學專業的內涵。Fennema & Franke（1992）就曾經提到，教師是富有思想的專業人士，具有計畫、執行、評量和反思自己教學的能力，而且，教師的信念、知識、判斷和思考對其教學決策會有深遠的影響，其中，影響教師教學構思的主要因素就是知識。所以，教師的專業知識應該包含學科知識（Content Knowledge, 簡稱 CK）、一般教學知識、課程知識、教學內容知識（Pedagogical Content Knowledge, 簡稱 PCK）、關於學生的知識、關於教學環境脈絡的知識和關於教育目標及其他的知識（Shulman, 1987）。Even & Tirosh（1995）的研究提到，教師的 PCK 與其構思學科內容的表徵方式相關，而 CK 和關於學生學習的知識則是 PCK 的主要來源。Peterson（1988；引自 Fennema & Franke, 1992）認為，教師的 CK 必須伴隨著三類知識，它包括學生是如何思考數學、如何促進學生思考的發展以及如何促進學生對於自己認知過程的察覺。Brown & Borko（1992）提到，教師教學專業的認知面向就是指「教師的 PCK 和教學推理能力」，其中，教師專業知識的主要範疇包含了 CK 和 PCK，而教學推理能力則展現在教師的教學構思和教學實作中。因此，

教師需要將自己的 CK 轉換成各種有效的教學形式，來讓不同能力的學生學習，所以，教師的教學推理特徵是可以用來解釋其教學行爲，而且教學推理的過程是構成有效教學的基礎（Shulman, 1987）。

綜上所述，教師教學專業內涵的核心之一就是自身的專業知識，而教師的專業知識總括來說是以學科知識、教學內容知識和關於學生學習的知識為主，而且，教師的專業知識及教學推理能力正是其教學概念的主要內涵。因此，在本校的教學環境脈絡下，個人想嘗試瞭解：不同數學教師在相同幾何單元中的教學專業內涵及其教學構思與教學實作的情形。

第二節 研究問題和目的

在本研究中，個人將教師的知識、教學構思和教學實作視為一個整體，亦即教學概念，而想要探究的是：本校七年級數學教師在不同類型班級的數學-幾何教學概念，意即探討他們在幾何單元的教學構思和教學實作活動。因此，本研究的目的是：

1. 瞭解教師的一般數學教學概念和幾何教學概念。
2. 探討影響教師幾何教學構思與實作的主要因素。
3. 瞭解不同教師在不同類型班級的幾何教學構思與教學實作的異同。

根據上述的研究目的，本研究的研究問題包括：

1. 教師有哪些一般數學教學概念和幾何教學概念？
2. 教師構思與進行教學的主要考量因素是什麼？以及構思與實作之間是否一致？有哪些影響因素？
3. 不同教師在不同類型班級的教學構思與教學實作有何異同之處？

