

第五章 回顧和省思

第一節 教師的教學轉變

(一) 轉變的歷程

“要改變教師的數學教學概念，並非是一件容易的事”(Thompson, 1992)。因為，教師在學習教學概念時，基於其多年的學習經驗對數學教學已經累積了許多個人的看法，而這些既有的看法會深深地影響教師的學習(鄭英豪, 2000)。Zaslavsky 等人(2003, p. 878)也指出，“數學教學的專業知識是很難直接轉換的，而是需經個人的建構過程，這樣的互動過程會促成教學上的反思與調整”。許秀聰(2005)認為，質疑自身的教學信念和教學實施，於是產生新的思考及行動模式，就會進一步考慮如何轉變教學；可以藉由「感覺到問題」和「感覺和自己教學相關」，來引動教師數學教學概念的轉變(陳松靖, 2002)。而個人認為，在教師被迫自主地專業成長的年代，促進教師專業成長有兩個可能的原因，都與教學概念、信念與教學實踐的關係有關。其一是，教學概念與實踐能力之間的落差：有良好的教學概念卻欠缺施展的能力，此時，教師需要提升教學的能力，才能展現出自己的教學概念。另外，教師所持信念與實踐場域的衝突：如所在情境脈絡的限制，可能使得某些教學概念無法落實。此時，教師就必須嘗試挑戰與改變個人的教學信念。

教師必須先具備察覺力和反思力，重新將學理構念再脈絡化，以符合自己的使用目的和意圖，再將其轉化成為自己的教學概念。但是，對於一位初任教師而言，可能因缺乏教學經驗，甚至是缺乏數學知識和教學能力，而無法掌握對教材和學生的理解。亦即，要能感覺到自身的教學仍有極大成長的空間與必要性，必須被迫地專業自主。對個人而言，由於研究和進修之故，對教學相關的學理構念有了進一步的體會，而開始了教學實施的轉變。個人在這次的教學行動研究中，是想經由實作來再次學習如何教數學，首要的挑戰是：如何以更精緻、精煉的觀

點，來統整教師的教學和學生的學習活動？如何在教學實施上，以不同於以往的方式來進行數學教學試驗？隨著三階段研究的循環歷程，教學的反思來自於與學生的互動以及對學生思考的進一步理解，不僅引動了個人的教學轉變，也使得自己對教學概念(或信念)重構的歷程與內涵有更深的體認，而這個歷程包括教學概念與信念的挑戰、澄清、和轉換三個階段。

(二) 轉變的內涵

教師教學的轉變，有賴於其整體功力的提升，所以，教師功力的培養，應該涵蓋了數學教師在教室教學中所展現的相關素養(許秀聰, 2005)。個人認為，教師必須從認知、情意、和社會三個面向的觀念和行動上，來發展教學功力的內涵。而教師教學轉變的模式，也應該是一個整體運作的模式，下面就從數學功力、教學功力、和反思功力，來分析個人教學轉變的內涵，其中，三者之間是可以相互引動而彼此深化的。

在數學功力方面，個人一再反思的教學問題是：如何思考學校數學及課堂的數學活動？在教學行動研究中，藉由重新思考個人的代數學習與教學經驗以及代數相關單元的數學概念內涵，澄清和拓展自己對於代數概念的認知，並對函數概念和代數相關主題進行數學結構的分析(如圖 5-1 所示)。另外，為了預想學生在文字題的可能解題策略及其學習軌道，個人重新閱讀代數的史料並編織教學問題的情境，審慎考慮每個階段中的活動設計及佈題的困難度與延伸性。如此一來，使得個人能更深一層地認識和檢視自己的代數概念和代數教學概念，以及其間的教學連結。同時，在進行教學之時，個人又必須理解學生的數學活動，察覺並檢驗他們的多元數學解題想法，並立即給予回饋。這樣的教學省思和實作交替互動過程，激發了個人以更多元、多樣的角來預想學生的學習及數學的內涵，藉此提升了自己的數學功力，也讓個人對於代數主題的內涵、數學教學的內容和策略有更深入的體驗與認知。

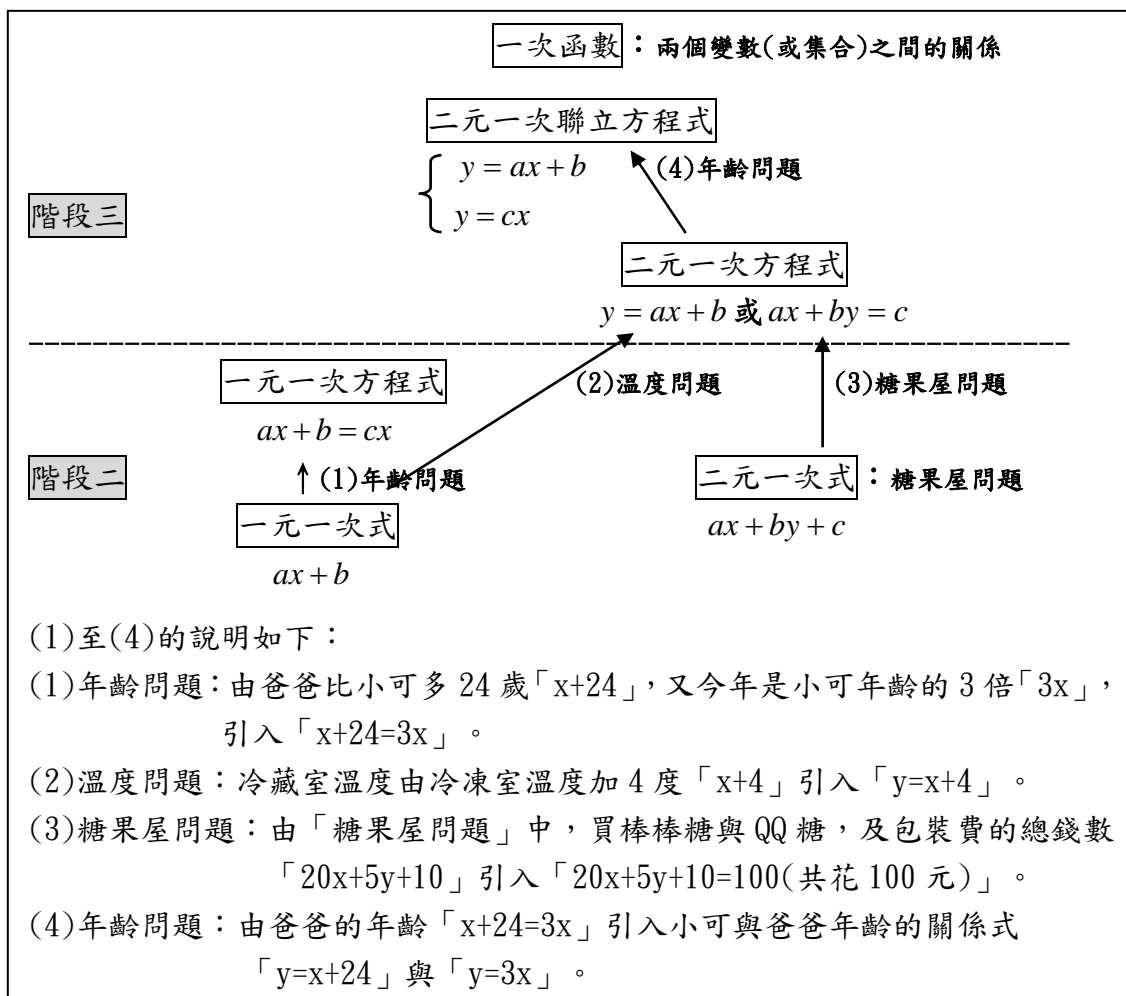


圖 5-1 相關數學結構分析

在教學功力方面，個人一再反思的教學問題是：如何設計課堂的數學活動及發展數學教學的方法？例如，在三階段的教學試驗中，個人企圖以開放式(Open-Ended)問題得知學生解題的原始想法的設計，即表示個人對學生的代數學習預設了可能的軌道，並提出相應的預設教學軌道(即 HLT)。再根據學生實際的解題思維，設計下個階段的教學活動，以便讓學生能與自己的解題思維對話。不斷地經由學生的表現與回饋，測試並修正 HLT 和 HTT，使得學生的表現逐漸更能精確地符合個人預想的 HLT 和 HTT。而 HLT 和 HTT 之間的互動，更建立了個人的教學信心與對學生理解的掌握。也更加體驗到：教師不能只根據本身的認知來教學，應該由淺入深、一連串的引導和連結，精準抓住學生學習的困難和發展起點，導引學生進行正確的數學思考，並以學生的原始思考繼續發展教學活動。個人相信，這就是教學功力的提升而直接引動了教學思維與實作的轉變。

在反思功力方面，Jaworski(1994)認為，察覺到理論和實務的反思本質，將可以促使數學教師發展思考、教學、和研究。個人在三階段的教學行動研究之中，在教學者、學習者、和研究者三個身分之間持續動態地轉換。在這樣的轉換過程中，必須持續地省思數學及教學功力的內涵與機制，以及各階段所累積的研究經驗。例如，如何設計啟蒙例以包含主題單元的數學概念，也要是學生所熟悉且連貫的情境？如何將學生提出的個人理解或疑惑，逐漸形成班級討論的議題或下階段的教學素材？如何增進個人合作學習的教學知能，來引導教室內的數學溝通？要回答這些問題，必須持續檢驗和對照 HLT，再根據每階段學生學習的迷思與困難處、或面臨的教學實務問題，進行個人的理解或請教資深教師的經驗或閱讀文獻資料，來修正當下的 HTT。另外，在教學的現場中，必須依靠臨場的反應，並保持敏感度，持續在教學行動之中反思。藉由一次又一次的教學反思循環，讓個人的反思焦點越來越明確，而逐漸地由個人轉移到學生身上。

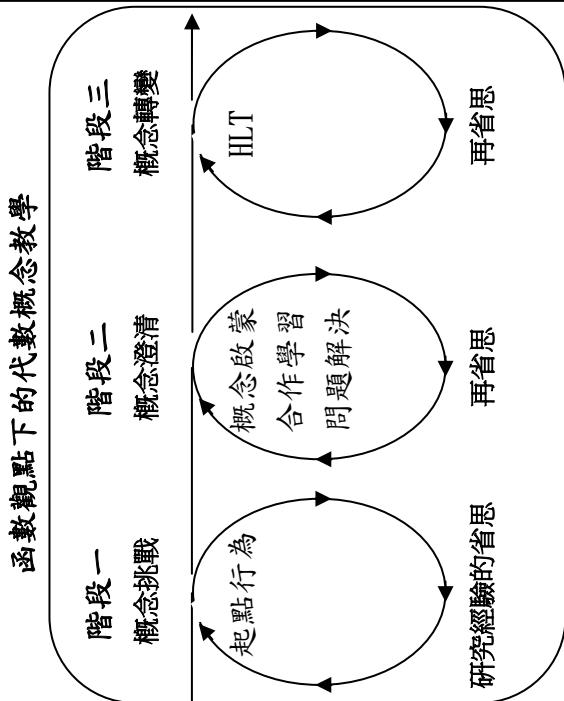
這種深化數學、教學、和反思三功力的模式，符合 Jaworski(2001)提出的「數學教師三層面的實踐和反思」主張，以及 Zaslavsky 等人(2003)經由實務而成長的三階層發展模型。個人認為，藉由專業知識的重新追求及對學生認知的理解，促成了個人教學概念的再脈絡化，引動並落實了教學活動的設計與實踐。並且，在教學的試驗過程中，不斷地藉由學生對課程與教學的反應與回饋，及察覺和思考自己的教學行動、學生活動、和兩者之間的互動關係，進行反思並改進自己的教學。亦即，持續修正之前的 HLT 和 HTT，以求更加貼近在教學之中發展而來的 HLT；接著，又能更進一步得到了專業知識及對學生認知的理解，如此不斷地循環。就如同許秀聰(2005)所說的，教學概念重構的歷程，始終牽動著教師功力深化的主軸和內涵，兩者不斷地遞迴互動。

這就是促進個人專業發展的 ZPD，其中，自我反思即是個人學習如何教數學的鷹架。個人也在學和教之間持續地轉換，體驗學習者和促進者兩種教學身分，而教學的專業就在教與學的往復當中成長。在此教學行動的試驗中，「三階段三面向的教師-學生學習狀態脈絡圖」(如圖 5-2 所示)，表徵了教(師)與學(生)的概念轉變歷程與內涵。

學生接受教學前的狀態

- **代數概念(認知面)**
 1. 算術-代數思維
 - (1) 不了解符號的意義與式子的化簡
 - (2) 等號的意義即為得到結果而非相等
 - (3) 符號表示數量關係的能力不足，尤其是涉及兩個文字符號
- 2. 函數
 - (1) 比較與表徵兩類數量關係的能力不足
- **學習態度(情意面)**
 1. 數學與學習
 - (1) 中立偏正向的數學感受
 - (2) 正向的數學學習態度
- 2. 教師與教學方式
 - (1) 師生互動少、缺乏信任、不敢表達真心話
 - (2) 沒機會、不敢發表自己的想法
 - (3) 缺乏自我思考的時間與機會
- **合作學習(社會面)**
 學生同儕間的互動少
 - (1) 缺乏合作學習的經驗與認知
 - (2) 說理的經驗與能力均不足
 - (3) 不敢發表或由固定同學發言

教學概念重構的歷程與內涵



學生接受教學後的狀態

- **代數概念(認知面)**
 1. 算術-代數思維
 - (1) 會用符號代表數並運算代數式子
 - (2) 了解未知數的值是一種變數
 - (3) 能用多元符號來表徵數量關係
- 2. 函數
 - (1) 察覺與認識兩類變動數量之間的關係
- **學習態度(情意面)**
 1. 數學與學習
 - (1) 開始體會數學的價值
 - (2) 開始發展對數學學習的自我期許
- 2. 教師與教學方式
 - (1) 喜歡課程內容的有趣、好玩、有挑戰性
 - (2) 師生互動多使得教室氣氛趨向活潑
 - (3) 開始著重自我思考的內容與時間
- **合作學習(社會面)**
 逐漸形成教室的討論文化
 - (1) 討論內容更多元
 - (2) 數學對話更頻繁
 - (3) 開始有表達的能力、勇氣、和意願

圖 5-2 三階段三面向的教師-學生學習狀態脈絡圖

圖 5-2 中包括，教師教學概念與實務的轉變和學生算術-代數思維認知、情意、與社會面的發展，形成一個相輔相成、動態互動的「雙學習環」，它們一同轉變也伴隨著發展。前者包括，個人在三階段研究進程中，以計畫、行動、觀察、和反思的階段循環步驟，進行算術-代數思維的教學試驗；以及，透過三層次的教學循環和教學概念(信念)重構的歷程(包括概念的挑戰、澄清、和轉變循環)，發展學生代數思維的幾個核心概念。教學行動的部分將於第三節中詳述。後者說明，學生接受教學前和教學後，在認知、情意、和社會三個面向的學習轉變。

以下探討教師行動和學生活動間的關係，亦即檢驗並詳述這幾個核心教學概念，如何兼顧學生的認知、情意、和社會三個面向，來引動學生的學習活動。

第二節 教師教學轉變和學生代數(函數)學習的關係

歷經此教學試驗，讓個人重新思考：數學教與學的本質，是應著重師生的對話或知識的權威。而個人則嘗試挑戰自己的既有教學概念(信念)，慎思之後選擇「數學教與學應是多面向的連結與互動」。就如同 Cooney(2001)所說的，教學設計的選擇反應了教師的價值判斷、信念、和態度。為了以函數觀點來發展學生的代數思維，個人整合相關的學理構念、函數觀點、以及算術-代數思維文獻，提出發展此教學試驗的五大核心教學概念，包括認知、情意、和社會三個面向的連結，如圖 5-3 所示。個人也企圖以多面向連結與互動的數學教學，來培養學生有關認知、情意、和社會三個面向的認知與態度。

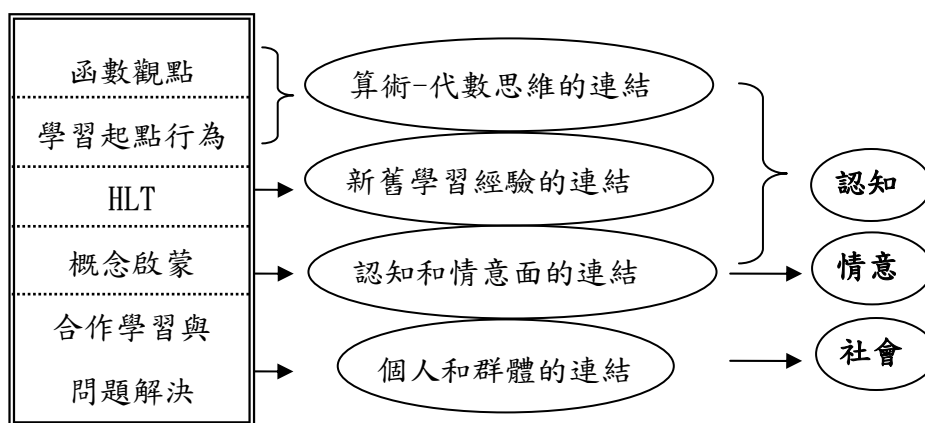


圖 5-3 教學概念與連結面向關係圖

(一) 以函數觀點發展國中生的算術-代數思維

當使用一次函數與變數的觀點來設計階段二的表示活動時，卻有學生即以 $x+10=y$ 表示加分後的分數，他們似已具備「多元」的想法。這雖然是一次函數或二元一次方程式的內容，某些學生卻能以多元的想法合理地列式。從一元一次式、一元一次方程式、二元一次式、二元一次方程式、和二元一次聯立方程式這一連串的代表、相等的概念學習中，可能因函數觀點的教學引動與貫穿以及將學生的數學思維持續地擴充和連結，而使得原本不同層次與難度的代數概念似乎變成了同一層次，只是教學時間點的不同罷了。所以，在階段三中，學習一元擴展至二元的文字符號擴展時，由這些學生「多元」的自然想法出發，而能將一元一次方程式與二元一次聯立方程式作自然的連結與比較。個人覺得整個課程的鋪陳，更突顯出學生對於文字符號的概念及其應用，不會因為符號個數的增加，而使得代數概念的層次有太大的落差。所以，個人認為，函數觀點可以達成學校數學課程與教學的潛在目標(即變數的概念)；亦即，藉由具體操作與課堂討論活動，使國中生了解符號的(變數)意義和等號的(變數)概念。

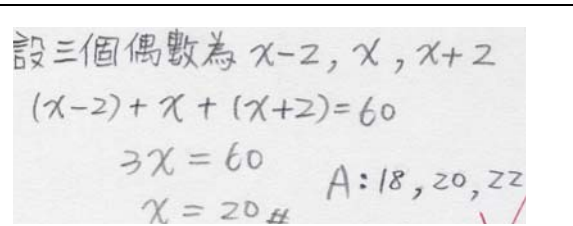
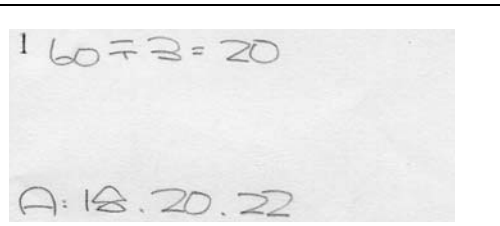
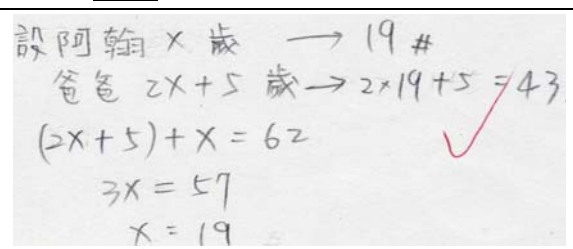
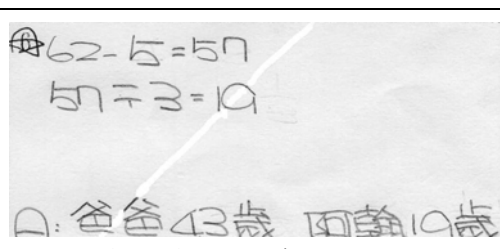
學生在接受階段二的教學之後，在代數試題方面，由原先約 26% 的學生能處理兩個文字符號的除法文字題(即層次三以上)，其中，包括 3% 的學生能將文字符號當作變數(即層次四)；進而躍升為約 60% 的學生能達到層次三以上，其中，包括 20% 可達到層次四。在階段三的教學之前，原有四位個案能達到層次三以上，包括一位可達層次四；結果在教學之後，所有個案的概念理解層次都能躍升或維持不變，其中，有五位個案達層次三以上，包括一位達到層次四。另外，在函數試題方面，全班(階段二)及個案(階段三)對於兩數量關係的比較與表徵能力，都有進步的趨勢，平均答對率分別由 45.7% 進步到 63.8% 及由 38.1% 進步到 47.6%。

教學試驗結果可以顯示，為了發展學生算術-代數思維，個人如何將相關的學理構念再脈絡化，以形成和重構五大教學概念，及如何運用(第二章所述)其發展的原則與策略。個人認為：如果教學概念能配合發展函數觀點的「三原則」，以及發展算術-代數思維的「三策略」，似乎可以部分克服算術思維與代數思維

的學習認知差異，進而局部解決代數學習的困難，詳細說明如下。

1. 表徵原則配合「以前代數為橋樑引導算術-代數兩系統間的持續轉換」策略，似可解決文字符號和解題策略認知的問題

個人以算術經驗中的數量關係、正負數的加減、和等號的意義相關概念的測驗結果，當作學生學習的起點行為，發展一系列的教學活動。並在文字符號的表示啟蒙活動中，透過數量關係的比較與表徵作為前代數的教學活動，進而將數量關係符號化(亦即，藉由算術的表徵及其操作，導入輸入-輸出變數的關係或模型中)，逐漸過渡到建立學生代數表徵與結構的學習，可讓學生在算術-代數表徵之間來回地轉換。此外，再利用應用問題，讓學生比較算術方法和代數方法的不同，並對照兩種運算之間的關係，如下圖(44)(45)(46)(47)所示。

(1) 若三個「連續偶數」的和是 60，則這三個數各是？	
 <p style="text-align: center;">(圖 44)小稚的代數解法</p>	 <p style="text-align: center;">(圖 45)亞亞的算術解法</p>
(2) 阿翰和爸爸現在的年齡和是 62 歲，已知爸爸年齡比阿翰年齡的 2 倍多 5，那阿翰和爸爸現在年齡各是幾歲？	
 <p style="text-align: center;">(圖 46)小翰的代數解法</p>	 <p style="text-align: center;">(圖 47)亞亞的算術解法</p>
備註：此兩題為小稚和小翰所提供的「等量公理」數學寫作題，成為「應用問題」的教學素材。	

雖然，剛開始之時，學生習慣使用算術方法，但是，當題目難度增加時，學生開始覺得正面思考問題反而比算術逆推出答案更容易，算術方法反而需要進一步的說明和使用較多時間的理解，正如小浩同學所說「如何像亞亞一樣，用小學的觀念解題目？因為，我覺得這也是一項重要的基礎，但是，我無論如何思考，也無法用小學的方式

解題」。而且，全班大多數學生都認為，亞亞的算術解法是「資優生」的解法。

個人認為，學生的發展由算術轉向代數，可視為由程序性至結構性概念的演進，也應該是過程-物件(程序-結構)的過渡與適應，符合了算術-代數思維發展的歷史面和認知面。而上述有關學習起點行為和 HLT 兩大教學概念的設計，也呼應了皮亞傑的認知發展理論、布魯納的認知表徵期、和 Vygotsky 的教學與學習觀，均重視非形式與形式之間的認知 ZPD 過渡和橋接。

2. 情境原則配合「以問題解決的情境引動數學對話」策略，似可解決等號和解題策略認知的問題

在階段二的相等-等量公理單元中，為了教等式，個人再次以表示單元活動中的年齡問題列出等式，進而延伸學習引出未知數的值；並回溯到表示單元之比大小的文字符號操作活動中，藉由討論「 $3+x$ 和 $3x$ 誰大？」得知，文字符號(x)的變數情境會使得兩數的大小關係有所不同，使學生更能體會等號成立的意義代表等量的意思，而且，當等號成立的時候，文字符號所代表的數值就被固定了。透過函數觀點的情境問題，可讓學生根據情境列出等式，並以輸入-輸出數值的表格和正面運算嘗試求解的方法，求出未知數的值。其中，鈺鈺可以利用輸入-輸出數值的表格推測出，「當 x 增加時， $3x$ 和 $3+x$ 之間的差增加，或 $3x$ 增加的比 $3+x$ 快，所以，比 2 大的 x 值就不用再考慮了」。而且，她更進一步地推測，「當 x 在 1 和 2 之間時， $3+x=3x$ 。這是因為，當 $x=1$ 時，4 比 3 大 1；當 $x=2$ 時，5 比 6 小 1，那 $3+x$ 和 $3x$ 的值就會分別在 4 和 5 之間及 3 和 6 之間」。鈺鈺使用了函數比較(Yerushalmy, 2000, p. 131)的方法，形成和求解方程式；她使用了兩數量之間的對應和兩者間持續差異的變化，得到未知數 x 所代表的數值是變數數值中的一種。

個人推測，學生是因為文字符號的變數情境，而更能掌握文字符號的意義與操作。而概念啟蒙以及合作學習與問題解決兩大教學概念就是強調脈絡化的情境問題，也呼應了 Lave 和 Wenger 的情境學習、Vygotsky 的社會學習、和現實數學的似真情境，均強調社群、情境、與互動學習觀。

3. 多重數值原則配合「以模型類比發展變數結構」策略，似可解決文字符號和代數式認知的問題

階段二的表示單元中，以三個函數觀點情境問題的啟蒙例引入並以符號表示數量關係的一系列過程引導式教學。首先，建立學生文字符號的多重意義及表示法；進而讓學生認識到，文字符號可以代表「變動的數」，可以是符合情境的「某一個區塊的數」，或是受到某些限制的「多重數值」；最後，讓學生體會「兩變動數量之間的關係」，感覺到函數「由兩數的對應過渡成兩集合的對應」關係。而且，透過討論定義域和值域的觀念，可以讓學生知道數據必須符合題意，並找出適用數據的範圍，不必一一檢驗可能的數據。也在討論活動中，讓學生經驗「一個值的集合如何改變另一個值的集合」。這樣的教學意圖到了階段三的教學時，由學生的表現中得到了更大的回饋，例如，在【糖果屋問題】中，第一組和第三組能同時發表，「不管小可買了多少根的棒棒糖和 QQ 糖(即不管 L 和 S 是多少，但是，必須為正整數或 0)，都會使得結帳的總錢數 $20L+5S+10$ 的尾數必為 0 或 5(即 5 的倍數)，尾數不可能有 1 出現。」而當「 $20L+5S+10=100$ 」時，也知道「如果少買一根棒棒糖，則可加買 4 個 QQ 糖」。更進一步地，學生也能討論出「不可以不買 QQ 糖(即 $S=0$)」，婷婷表示「因為，買糖果的錢就是 90 元，即 $20L+5S=90$ ，如果不買 QQ 糖($S=0$)，那 $20L=90$ ， $L=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$ ，但糖果不能買半根(L 不能是分數)」。另外，小維和瑩瑩在【年齡問題】中說明，「 $y=3x$ 」所代表的 x 和 y 的變動關係為，「 $y=x+x+x$ ，所以，如果 x 增加 1，則 y 就增加 3 歲，即 $x+1$ ，則 $y+3$ 」。

而在配對遊戲中，將文字符號類比成數，可以讓學生經驗「文字符號當作可操作的物件」，像算術式子一樣作四則運算並符合運算的規則；也因為文字符號和數字的不同、不可合併，而將代數式當作最後的答案。例如，當問及「為什麼 $7+3xx$ 不等於 $10xx$ ？」時，婷婷回答「因為， $3xx$ 的單位是 x，而 7 的單位是 1，所以，它們是不同類」。另外，在文字符號操作活動中，由學生自行舉例說明代數式(例如 $n-3$)所代表的意思，可以讓學生更了解代數式的意義，並將其視為心智物件。亦即，學生能從代數式之中看到數字，而不是把它看作字母的組合，這似乎透露

出，學生已能掌握文字符號的使用及其意義，也有足夠的抽象能力。這符合了個人原來的教學目標：期望學生的代數學習能達到 Skemp 所主張的符號式理解，亦即，表層與深層結構之間的相互連結與同化。

另外，個人由學生代數與函數概念的理解和學生晤談中發現，學生最害怕且困擾的部分是數量關係的比較與表徵，而不是代數的運算技巧。例如，小維同學認為，「比較的題目以前沒有訓練過，而且容易想太快，例如，差幾差幾的關係。而且，這種比較關係很重要、要多訓練，因為，如果循這種模式，變化性可以有很多種，例如，差異、倍數、比例的關係，就可以用加減乘除的方法或關係來轉換式子。不過，最重要的還是要小心、想清楚再作答。」個人原先假設，數量關係為七年級代數學習的基礎，但是，到三階段研究結束之後，學生最不能掌握的仍是數量關係。學生對於「找出正確且有用的數量關係，並表徵成代數式」沒有自信；或者，學生對於兩個數或量的關係，常認為自己能夠掌握，而顯得思考不夠嚴密，以致常粗心錯誤。可見關係比較的先備能力，會直接影響到學生代數表徵與列式的學習。學生較無法比較分析數量關係的異同，及其表徵式的異同與使用時機，有時兩數量會同時具備多種關係，則會有多種的表徵式。例如，今年爸爸的年齡是小明的4倍，且仍具有差不變的關係，學生較無法掌握「到了明年，則父子的年齡仍維持差不變的關係」。所以，個人認為，代數學習困難之一是，學生在學習算術階段「關係概念的迷思」。新數學課程補充說明(草稿)(國立教育研究院籌備處, 2003, p. 40)曾提及，關係是數與量主題中的一個子題，其學習內容在探討數與數、量與量、數與量之間的關係。而個人原先認為，數量關係是學生在學習文字符號之前所須具備的能力(第二章第二節)；經過對學生反應省思之後，個人則調整為，不僅要測試學生有關數量關係的學習起點行為，更應積極地將它視為算術和代數主題學習的主要銜接課程。

雖然，函數觀點的表徵原則、情境原則、及多重數值原則可以部分提升國中生對於數量關係的掌握，但是，教師仍需要繼續加強國中生有關數量關係的能力，才能期望他們會以符號來表徵關係式。所以，教師應培養國中生從數量關係中觀察，學習「A-3-7 能察覺(簡易)數量樣式與數量樣式之間的關係(A-3-5)」，

並能比較生活中數量關係的異同，及其表徵式的異同與使用時機(A-3-4)。而這些能力指標均是橫跨國中小兩階段的類化具體表徵(第三階段)，教師們必須小心地銜接的代數學習課題，並為後續的函數概念學習鋪路。

(二) 以多面向的連結引動國中生的代數(函數)學習活動

學生在教學試驗之前，對數學學習的態度多為正向或中立，但是，對「數學很簡單」、「數學有許多公式」、和「發表自己的想法」則持較負面的態度。在接受第二階段的教學之後，八成以上的學生對數學和數學學習的態度都維持不變或有些向正面發展，例如，他們對於「此階段的數學很簡單」有了正向或採中立的態度，而有九成七以上的學生對「黃老師教學方式」和「發表自己的想法」的態度都有向正面發展的傾向。不過，學生也覺得數學課的壓力變大了。到了八年級開學的延後測時，有九成四以上的學生對數學和數學學習的態度都有正面發展的傾向，且更重視數學的價值與對數學學習的自我期許。約六成二以上的學生對「黃老師教學方式」的態度都持正面的評價，但是，對於「喜歡上黃老師的數學課」和「上課的氣氛很輕鬆」的態度卻明顯地下降。經由個案晤談的結果得知，學生學習態度轉變的原因包括：八年級課程難度的增加，面對合作學習的心理壓力，以及擔心過多的學習單。而在第三階段的教學之後，從心得感想問卷中看出，他們喜歡課程的內容和分組討論的上課方式。七位個案學生對數學、數學學習、和黃老師的教學方式的態度都有正面的評價，但是，對於「發表自己的想法」的態度下降了。個人推測，這與焦點群彼此之間的互動以及討論發表的情況有關。在三個研究進程中，全班(階段二)或個案(階段三)對於「數學很簡單」、和「數學有許多公式」都是持較負面的態度，而隨著八年級課程增深的階段三教學之後，學生對於「數學就是繁雜的計算」則採較負面的態度。這也是學生認為的「數學」，它是「不同於其他學科，必須經由公式或計算才解得出答案(小維)」。

以上的學生學習態度轉變，或許與個人的教學轉變有關。由於，個人教學概念的轉變，引動算術-代數教學內容與策略的調整，例如，在教學設計上，多了以往所沒有的學習起點行為的試探和以概念啟蒙引入算術-代數思維的學習，使

得對國中生的數學學習經驗和學校數學課程的內涵有更深一層的理解。因為，嘗試合作學習和問題解決的教學設計，不僅更貼近學生的思考和語言溝通的模式，也拓展了個人數學教學概念的版圖。還有，透過平時課堂的觀察與主動介入，才有機會更寬廣、更多元地得知學生的想法。因此，也從多方面獲得教學反思的素材，例如，在第三階段的研究中，增加了「以學生的原始思考出發」繼續擴充學生思考，成為教學的素材之一；並藉由學生對教學的反應與回饋，來進行個人對教學實務的反思；儘可能地預想和調整學生的 HLT 與個人的 HTT，而使得學生在數學概念、教師在教學概念的學習上，都能有更深一層的展現。而且，也在同一階段中，為考慮數學概念的結構、教材內容的連貫性與延伸性，而有了更深層、更多元的教學反思，之後，更以「新舊學習經驗的連結」繼續擴展學生的代數思維，讓學生不覺得「二元」是一個全新陌生的課題，而是將舊經驗延伸到新學習。這樣對於數學內涵的構思與連結，也提升了自己的數學功力與教學功力。

由於教學概念的轉變，改變了個人以往的教學模式與風格。所以，課堂的教學實施調整了自己的教學且不同於以往，例如，在學生的學習情意方面，概念啟蒙增進了學生學習數學的動機與興趣，感覺數學是易學的，且樂於學習它。合作學習和問題解決此教學元素，讓教室裡的數學溝通除了能提供情境引起學生的討論之外，還特別注意情意面(自主與自信)的經營，讓學生有機會去體驗自己想數學、做數學；不僅提高了學生學習數學及解決問題的自主和自信，也因而改變了師生互動的關係。由於師生互動關係的改變，讓個人有機會與學生分享他們的原始解題想法，進行更深度的數學對話；進而能在學生同儕之間形成討論的文化。另外，藉由重視學生的學習起點行為、新舊學習經驗、及 HLT，並融入教學素材當中，讓學生有被關懷的感覺，對於「老師怎麼會記得我說過的話、寫過的作業，或是將學生的解題想法當作教學題材(音音)」，而感到不可思議且特別懷念，這使得課堂上常有學生相互觀摩的請教聲或歡笑聲，也增添了不少課堂學習的氣氛。

第三節 教師教學轉變和專業發展的關係：教學功力的深化引動專業 知能的成長

鄭英豪(2000)認為，教師的專業成長是在其教學脈絡中，藉由反思和實作引動的；而教學概念可成為不斷教學反思的焦點，兼具單元數學知識和學生學習特性的教學概念，可以扮演引導教師在其教學脈絡中反思、探究教學問題，並成為持續發展教學思維的重要角色。所以，數學教師除了藉由教學實踐與反思的互動過程，經由教學反思-概念調整的循環進程，能夠習得相關的教學專業素養之外，更能持續個人的專業成長。

從「三階段三面向的教師-學生學習狀態脈絡圖」(請參見圖 5-2)可以顯示出，個人教學概念和信念的轉變，促成了每階段教學活動的設計與調整，並在實際的教學行動之後，省思研究的經驗，再次引動下階段的教學概念和信念的轉變。這樣計畫、行動、觀察、和反思的教學行動研究，形成一個不斷循環的歷程。個人認為，自身的教學實踐與反思，已由以往只考慮教學的數學內涵(第一層)，轉向 Jaworski(2001)的第二層次邁進，更關心是否能以學生為教學的主體，來發展課堂的數學教學活動。個人這樣的教學概念(信念)轉變、教學活動調整、以及研究經驗省思三者之間的互動循環，可以用圖 5-4 表示。

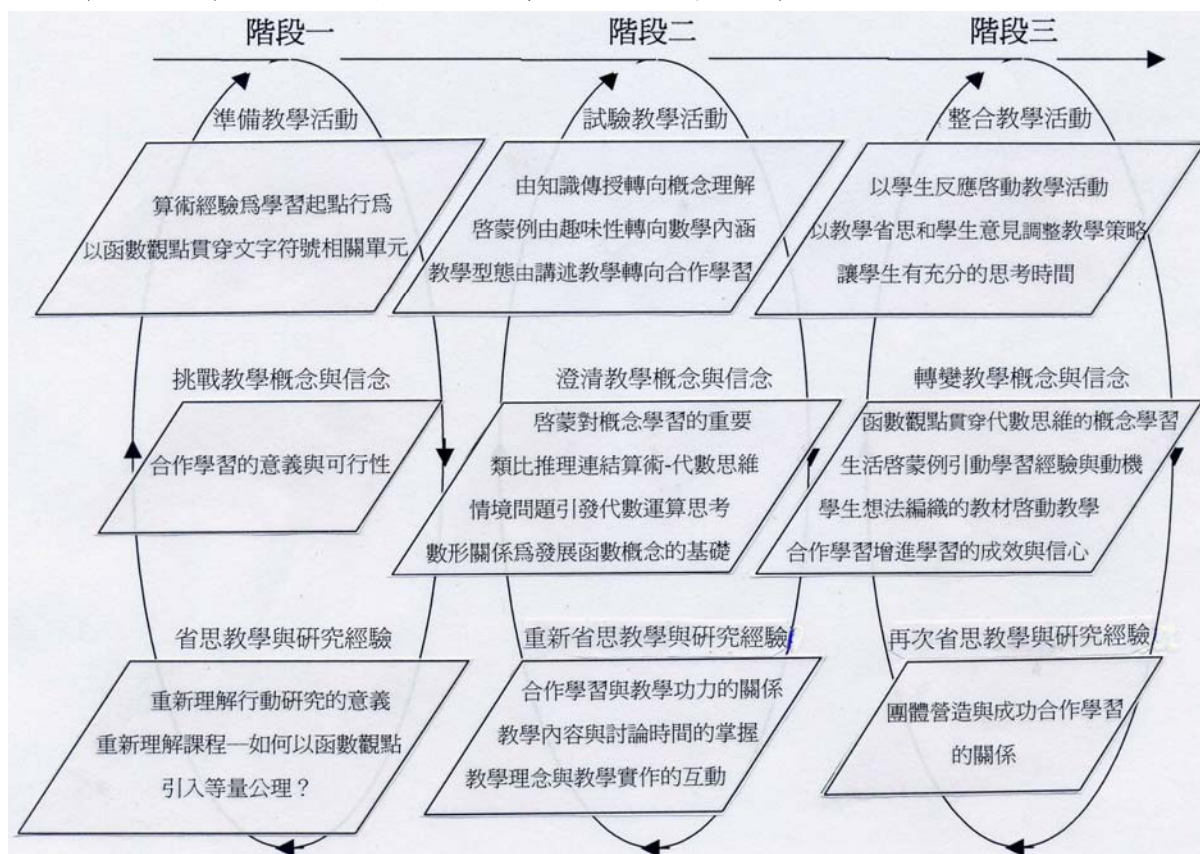


圖 5-4 三階段三層次的教學循環圖

個人教學的內部思維活動是，根據學生對課程的反應和回饋，對先前所提出的 HLT 進行調整與修正。而一再循環的內容則是，以函數觀點繼續發展學生的代數思維：由函數情境與現象問題揭開代數學習的開始——文字符號的意義，接著，以代數式描述輸入-輸出變數表格的一般性，進而能對代數式、或關係(方程式)進行符號的操作。另外，在這樣的過程中，個人的教學概念與信念的轉變和教學調整之間，會相互地引動。所以，可由兩者的互動看出，個人教學概念再脈絡化的歷程。回顧這樣的再脈絡化過程，個人的教學概念似有以下的轉變：關心的對象由課程內容的照本宣科，轉為對課程的重新理解、並重視學生的學習起點行為；教學的重心由知識的傳授轉為概念的理解；啟蒙例的設計由只重趣味或挑戰性轉向更重數學概念的內涵；教學的型態由講述教學轉向合作學習；以及，更著重以學生反應來啟動教學，以教學省思和學生意見調整教學策略，以及讓學生有充分的思考時間。這些轉變意味著，個人關心的焦點(Fuller, 1969)，由初期的關心自己轉向關心數學的內涵；再由關心數學的內涵轉向關心學生。所以，這次教學行動研究的經驗對個人而言，最大的學習不在習得教學的技巧與設計，而是學會以學生學習的觀點，不斷地反思自己的教學活動，觸發更深層地思考：如何以學生學習為考量來設計教材或重編內容？在此次行動研究的歷程中，個人關心的焦點由照本宣科，轉為教材的安排，更進而關心學生的學習，這也同時顯示了個人數學教學概念的成長和轉變。

透過行動研究的計畫、行動、觀察、反思、修正、和再行動這一連串的循環歷程，不僅促成了個人教學概念的轉變與擴展，也同時提升了行動研究的知能。其中，在合作學習與教學功力的發展歷程中，個人體會到，教師對教學的認知與能力，會直接影響教學活動的進行和學生學習的發展，這也就是，計畫(教學設計)與教學(真實教學)之間的落差。個人思考其中的可能原因是，尚無法掌握學生的學習軌道，而使得教的層次高於學的層次？在迷惑的當下，不斷地摸索、嘗試、和修正教學的內容與策略，這樣的歷程不僅支持個人繼續堅持自己的教學信念，也提升了自己的教學知能。以下有關合作學習概念發展的個人教學省思札記即可說明：

階段一開始時，在對合作學習的認知和能力不足的情況下，不僅懷疑它在自己教學場域中的可行性，也挑戰自己的教學信念，因而開啓了合作學習的新嘗試。到了階段二，雖然教室的師生互動和學習氣氛改變了，但是，由於合作學習教學技巧的不精熟和討論時間的不足，有時個人仍會指導性地介入學生的討論及探索活動；另外，也出現了教室的秩序與常規的班級管理問題。此時即體驗到，要實施合作學習的教學，教師必須先熟悉合作學習的技巧，留些空白時間給學生思考與討論，並注意討論的有效性。否則，合作學習的教學活動會變得，有一些被省略、一些則以傳統式教學法進行，如此，將會失去合作學習教學的精神，其效用也就難以完全發揮了。到了階段三，考慮運用分組教學中的特殊個案成爲研究焦點群，並開始進行異質分組。研究經由分組教學，全班能透過團體互動的歷程來學習數學，增進學習的成效與信心。可是，7位個案焦點群卻喜歡自己思考，使得討論情況反而不熱烈。雖然，表達能力是當初篩選個案的考量，但是，當同學的表達能力都很不錯時，學習活動設計就不能以「能力取向」爲考量，而是「必須取每個人不同的優點，靠合作學習才能完成的工作」。另外，「團體營造」是分組時首要的考量，必須培養組員之間的信任與共識。此時，更進一步地體認到，不一定要以分組討論的方式，才能達到合作學習的效果。教師應長期培養學生的討論及發表能力，塑造班級的討論文化，並在討論的過程中製造探究、猜想、和辯論的機會與感覺。教師本身也該多增長這方面的知能，才能在掌握班級狀況之下，發揮合作學習的效果，則學生求知的動力和學習的效果會隨著教師教學功力而一起提升。