第四章　國三學生幾何論證學習現況

本研究中所進行的活動呈序列性安排，每一個活動均依據前一活動之研究結果、並根據相關文獻進行研究設計，因此可由整個活動過程看出學生概念的遷移歷程。故在實施探究活動之前，研究者先對學生目前的幾何學習現況作一概括性的調查，從中分析出圖形的迷思概念及對論證形成的障礙，進而設計對於突破此一障礙有助益的相關探究活動。

因此本章主要探討學生基本幾何圖形概念及證明有效性瞭解與幾何證明之能力表現，主要由基本幾何圖形概念問卷、證明有效性瞭解問卷以及幾何證明能力問卷所收集之學生作答資料來分析，另外基本幾何圖形概念則包括了測後訪談的資料。

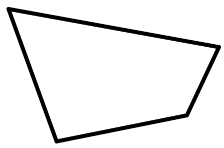
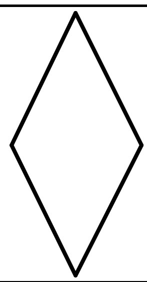
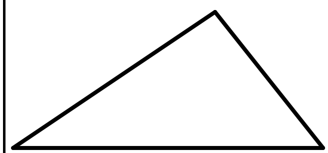
第一節　基本幾何圖形概念

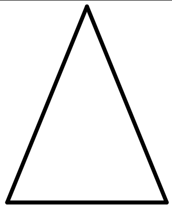
本節依基本幾何圖形概念問卷中，學生的作答來分析。問卷主要的進行方式是，先要求學生依照題目所要求的圖形來作圖，之後才要求學生由文字說明為何所繪圖形為符合題目要求的幾何圖形，因此學生所繪的圖形即為其圖形概念心像的複製，而文字說明的部份則為概念心像的描述，經由卷面分析及事後訪談以確認學生圖形概念心像以及圖形概念定義的表現，並進一步分析兩者之間的互動模式為何。

一、圖形概念心像

若針對同一學生的單一卷面來分析，每個題目依序呈現的數個代表圖形中，愈早被呈現出來的，即為學生心中最先聯想到的圖形意象，因此研究者統計了全部問卷中第一順位圖形學生的表現(附錄五)，發現幾個主要被呈現出來的典型類型，統計如表 4-1-1，這些圖形即為大部份學生對該圖形的典型概念心像：

表 4-1-1:基本幾何圖形之典型圖形心像表

幾何圖形名稱	典型圖形概念心像	圖形特徵	人數	百分比
(1)四邊形		1. 四邊邊長不刻意畫等長。 2. 角度不刻意作特殊角。	62/74	83.78%
(2)長方形		1. 兩雙對邊不等長 2. 較長一雙對邊呈水平, 另一雙對邊則呈鉛直。	68/74	91.89%
(3)平行四邊形		1. 一雙對邊呈水平 2. 水平的一雙對邊較另一雙對邊長 3. 左右的一雙對邊由右上斜至左下	56/74	75.67%
(4)菱形		1. 對角線呈水平和鉛直。 2. 鉛直的對角線較水平對角線長	45/74	60.81%
(5)三角形		1. 三邊邊長不刻意畫等長。 2. 角度不刻意作特殊角。 3. 底邊呈水平。	37/74	50.00%

(6)等腰三角形		1. 底邊呈水平。 2. 頂角向上。	54/74	72.97%

1.圖形概念心像所呈現的典型特性

由表 4-1-1 中研究者發現學生的圖形概念心像有下列兩項典型特性：(1)具水平、鉛直性、(2)缺少特例圖形，以下分別描述這兩項特性：

(1)水平、鉛直性

典型概念心像所表現出來的水平、鉛直性就是指圖形的邊長會有至少一邊以上是呈水平或是鉛直的，除了任意四邊形之外，長方形、平行四邊形、任意三角形、等腰三角形的典型圖形心像都具有這種特性，而菱形則是對角線呈水平鉛直，也具此特性，也就是說，學生的圖形心像的方位多為正的，較少出現歪斜的，如圖 4-1-1：

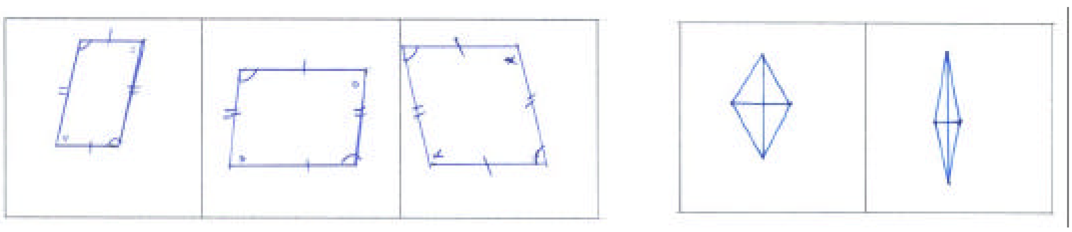


圖 4-1-1：水平鉛直之典型圖形概念心像

(2)忽略特例

在典型圖形概念心像中，僅有少部份的學生畫出該圖形的特例，例如等腰三角形，即使是後面順位出現的圖形，也只有少數的學生畫出特例正三角形；又如平行四邊形，也幾乎沒有學生畫出特例正方

形；因此大部份學生在被要求畫出與前一圖形不相同的圖形時，並沒有一個分類的原則，而僅是畫出與前一圖形「不全等」的圖形，如下圖：

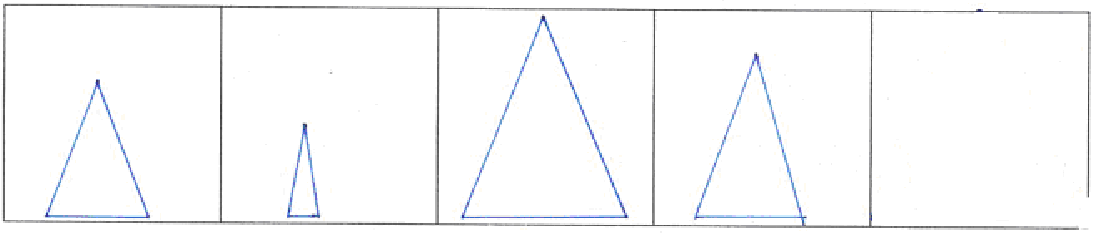


圖 4-1-2：缺少特例之典型圖形概念心像

但就上述兩個典型概念心像的特徵來說，忽略特例的情形比較多見，也就是說，第一順位之後的圖形中，出現非水平、鉛直的圖形比起特例要來得多，因此比起特例的圖形，學生的概念心像較能接受歪斜的非典型圖形。

2.圖形概念心像呈現典型特性的成因

(1)與幾何課程的學習經驗有關

Schwarz & Hershkowitz(1999)提出函數圖形的典型圖形通常是線性函數，但若函數圖形的某些點無法連成線性圖形，則被認為可能是拋物線，因此學生的典型圖形心像形成與學習經驗的內容和次序有關，學習者憶取舊經驗中接觸過的圖形表徵，及教師介紹概念時所提出的典範例，形成典型概念心像，在訪談中，就水平、鉛直性來說，小葳、阿翰也提到了以往的學習經驗：

(對話 4-1-1)

w123[1]	T	那為什麼你沒想到畫這個(指頂角向左、底邊非水平的等腰三角形)
w124	小葳	一般都是畫正的吧，可能很少人會想到畫反的，老師以前也都畫正的。

而在特例圖形方面，阿翰雖同意長方形為平行四邊形的一種，但表示問卷中未畫出的原因是由於以往沒有相關的學習經驗：

(對話 4-1-2)

h042	T	那他(指長方形)算不算平行四邊形?
h043	阿翰	算吧。
h044	T	算「吧」，到底算不算呢？
h045	阿翰	是符合上面條件，但一般講到平行四邊形，比較沒想到那麼多，而且我沒聽說過說平行四邊形有人畫這樣的。

因此小葳和阿翰在呈現概念心像時，並非經由概念定義來思考，而只是呈現舊有學習經驗接觸過的圖形表徵，因此在面對研究者所提出的非典型圖形(如歪斜或特例的圖形)時，兩人在與自己所寫下對圖形的文字敘述逐項比對之下，雖可同意其為該幾何圖形的其中一個範例，但仍覺得不自在。因此，在學習中缺少典型圖形外之圖形表徵的學習經驗，也是導致形成典型心像的原因之一。

(2)圖形的互斥性

在訪談中，研究者為了瞭解學生概念心像中缺少特例圖形的原因，分別詢問了小葳、阿翰、阿忠如下問題，如「等腰三角形只能兩邊等長嗎?三邊等長可以嗎?(w109)」、「長方形的兩鄰邊可以等長嗎?(h013)」…等有關圖形原始定義的相關問題，其中小葳認為若三角形三邊等長就算

[1] 對話編碼說明：第一碼英文字母代表訪談對象，w 為小葳、h 為阿翰、z 為阿忠，後三碼為流水號。

正三角形，不是等腰三角形，而阿翰則是認為長方形的鄰邊是不能相等的。

(對話 4-1-3)

w109	T	（略）…可以三邊等長嗎？
w110	小葳	那算正三角形。
w111	T	正三角形和等腰三角形是不一樣的嗎？
w112	小葳	嗯，不一樣，等腰三角形就是兩邊等長。
w113	T	不能三邊等長？
w114	小葳	應該是吧，因為我寫過的數學都是這樣。
w115	T	你是說你看過的等腰三角形都是這樣？
w116	小葳	嗯，都是兩邊。

(對話 4-1-4)

h013	T	長方形，兩鄰邊一定要不等長嗎？
h014	阿翰	不一定啊，等長就變正方形啊。
h015	T	喔，鄰邊相等就會變成四邊都相等嗎？
h016	阿翰	嗯。
h017	T	那這樣是長方形嗎？
h018	阿翰	不是，是正方形。
h019	T	所以就不是長方形？
h020	阿翰	嗯。

因此小葳和阿翰在這裡表現出的是一個圖形互斥的情形，如等腰三角形和正三角形被認為是兩種獨立的圖形種類，並沒有互相包含的關係。Gray, Pinto, Pitta & Tall(1999)認為這和語言有關，Gray 等人認為學生在處理一個複雜的問題時，一個強而有力的方法就是藉由語言來分析，一個字可能可以代表一個單一結構或概念，因此在幾何中，圖形的名稱可能或造成一個獨立的分類。另外也有可能與概念定義不清楚有關，如小葳提到等腰三角形即是「兩邊」等長，不能三邊等長，否則就是正三角形，因此在這樣的概念定義下，所呈現的概念心像，當然不具特例圖形，而這樣概念定義的形成並非課程或教師錯誤的介紹概念定義，而是又與學習過程所經驗的圖形幾乎都是典範圖形有

關。

因此 Gray 等人建議應該藉由教學、討論，來發現幾何中如階層般的包含關係，以避免概念名詞中語意的表現影響概念的形成。

(3) 情意上的因素

訪談中對於大部份的圖形都呈現水平、鉛直的特性，除了小葳、阿翰兩人表示歪斜的圖形「有點怪怪的 (w120-w122)」或「比較想不到(h024)」之外，阿忠亦表示畫正的「比較好看(z030)」

(對話 4-1-5)

4029	T	另外我發現你畫的圖好像都滿正的，例如三角形，底邊都是平的，我可以畫歪歪的嗎？
4030	阿忠	因為我覺得這樣比較好看。
4031	T	比較好看，所以你是因為比較好看，那畫歪的不行囉？
4032	阿忠	不是不行，是不好看。

因此四位學生都不否定歪斜的圖形也能作為代表圖形，但沒有畫出只是沒有想到、覺得怪怪的、甚或只是單純的覺得畫正的比較好看。而造成這樣的情意反應這也和以往幾何圖形學習經驗有關，課堂中或教材中的圖形幾乎是正的，因此學生的典型附圖也都呈現這樣的特性。

二、圖形概念定義

1.定義並非最少條件

從所有學生的問卷中研究者發現，在要求學生說明為何他所畫的若干圖形即為題目所要的圖形時，幾乎所有的學生都列舉概念心像所呈現的數個性質來說明，僅有極少數學生以概念定義的最少條件來說

明，而被列出的若干個性質中，學生亦無法辨認出其間具有邏輯的因果關係，甚至還包括了重複或互相包含的性質，例如阿翰對於平行四邊形的敘述如下：

1. 兩雙對邊平行且相等
2. 一雙對邊平行且相等　2 包含於 1
3. 兩對角相等、兩鄰角互補
4. 兩對角線互相平分
5. 平行，且是四邊形
6. 兩組面積相等的三角形所拚成的

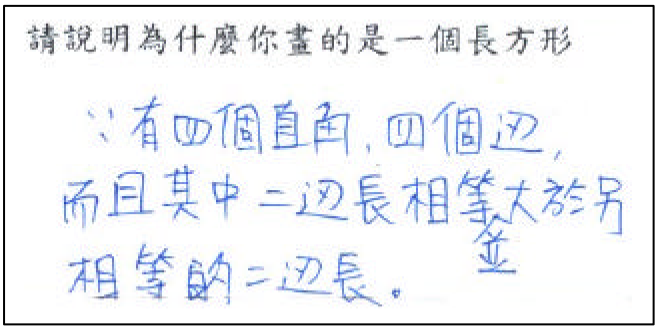
其中條件 2 包含於 1，且和條件 5 亦有重複的情形，其餘的條件之間也有因果關係，為了進一步探討阿翰的平行四邊形定義為何，進行了以下的訪談：

h028	T	好，再來談平行四邊形，你說兩雙對邊平行且相等，一雙對邊平行且相等，到底是一雙還是兩雙？
h029	阿翰	都可以。
h030	T	都可以？意思是說一雙對邊平行且相等就可以了嗎？
h031	阿翰	那第二條刪掉好了。
h032	T	所以要兩雙對邊平行且相等嗎？其他的要刪掉嗎？
h033	阿翰	不用。
h034	T	所以要看這些是不是平行四邊形，就要看有沒有平行，還有看有沒有相等?
h035	阿翰	嗯。
h036	T	可不可以只看對邊有沒有相等?
h037	阿翰	那不一定…還要看有沒有平行啊，不是平行四邊形嗎?
h038	T	那其他這些對角啦、對角線也全部都要看嗎?全部都要符合才是平行四邊形嗎?
h039	阿翰	對呀。

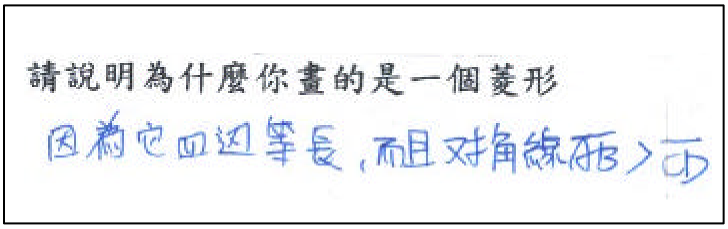
阿翰雖將重複的條件 1 和條件 2 刪去了一條，但卻是刪去了可作為定義的條件 2，而對於其他多餘的條件也表示必須保留，因此可知大部份學生無法對圖形作出形式化的定義，而僅是將列舉出概念心像所呈現的數個性質。

2.由典型心像的屬性來歸因

由於學生多由概念心像呈現的性質來寫下對圖形的敘述，而概念心像又呈現典型的類型，因此學生的敘述出現了典型圖形才有的屬性，例如小葳對於長方形的敘述為


請說明為什麼你畫的是一個長方形
∵有四個直角，四個边，而且其中二边長相等並大於另相等的二边長。

而阿翰對於菱形的敘述為：


請說明為什麼你畫的是一個菱形
因為它四边等長，而且对角線不>两

而在經過訪談之後也確認了以上的敘述即為學生對該圖形之圖形定義，此現象即為 Hershkowitz(1989)所提出典型判斷中的自我屬性歸因情形，而這種以典型心像來形成圖形概念定義，則可能造成之後幾何論證時的錯誤推論。

四、圖形概念心像及概念定義之互動模式

綜合以上所述，大多數學生在這個單純表達基本幾何圖形概念的認知工作下，概念心像及概念定義的互動模式為下圖。

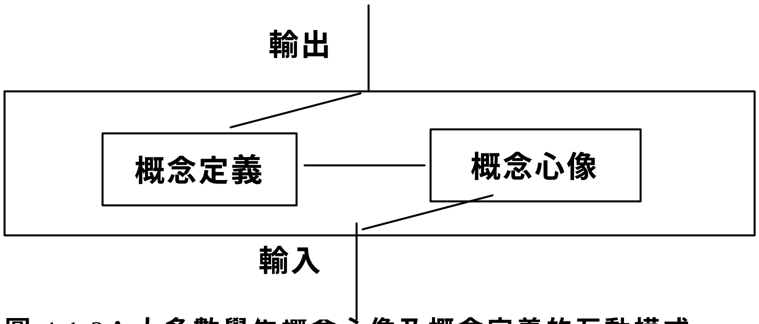
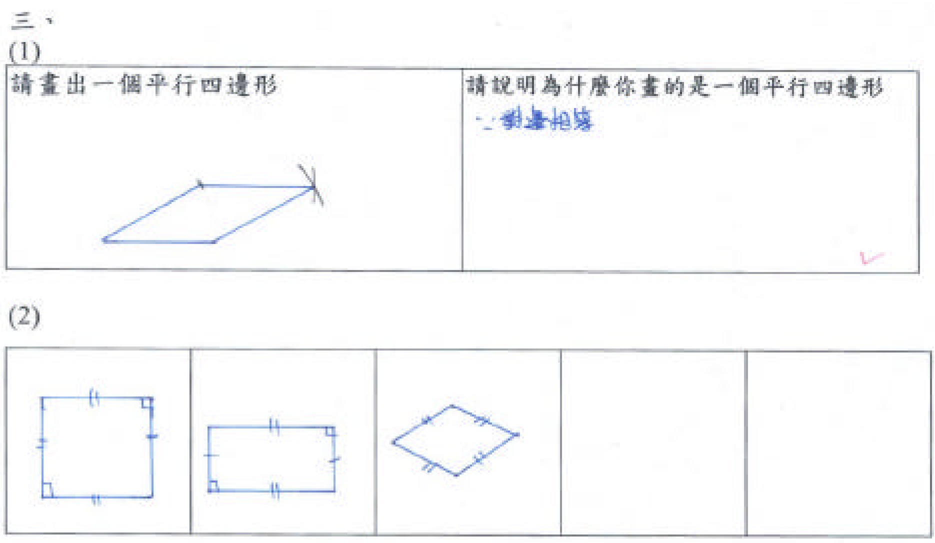


圖 4-1-3：大多數學生概念心像及概念定義的互動模式
(引自 Vinner，1991)

在 6 名探究小組的成員中，除了阿忠以外，有 5 位呈現出以上的表現，因此，大部份國三學生的圖形概念定義是由概念心像所呈現的性質而來的，而非形式化定義，且在本問卷中，由於牽涉到概念定義的表達，因此呈現了如上圖的互動模式，但若在其他不要求寫出概念定義的認知工作下，兩者的互動模式則可能跳過概念定義，直接由心像作判斷，並輸出答案。

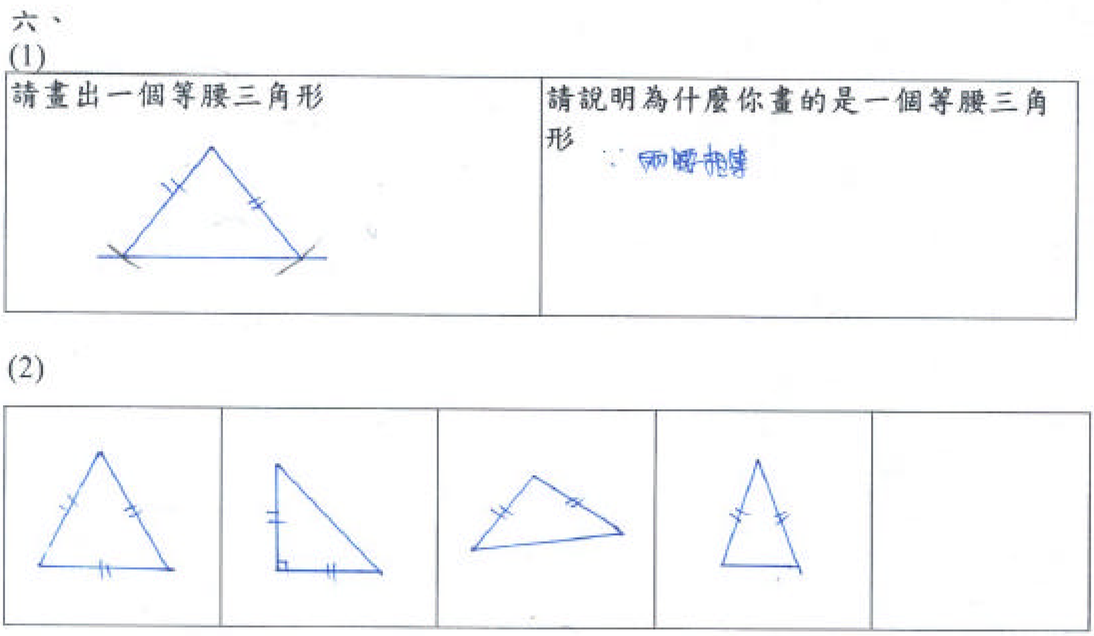
其中較特別的是阿忠的作答情形，阿忠以不同的屬性，將圖形作了近乎完備的分類，亦即所呈現的每一個圖形均為該圖形的一個特例類型，例如平行四邊形的題目中，阿忠的作答如下：



阿忠將平行四邊形的特例－正方形、長方形、菱形逐一表示出來後便停止作答，由此可知就圖形形狀來看，阿忠並不具特定的典型心

像，因此可將圖形的所有特例呈現出來，但阿忠的圖形心像仍具有典型的「水平」、「鉛直」現象，也就是說雖然他能就圖形的屬性進行分類，但所呈現的圖形還是有方位上的侷限，而由先前訪談已知為情意上之因素造成。

而在訪談中，阿忠也針對等腰三角形說明了他將圖形分類的方法，以下是他問卷的作答情形以及訪談內容



(**對話五**)

z012	阿忠	第一個就是一般的等腰，底邊不相等的，下面是正三角形、等腰直角、等腰鈍角、等腰銳角。
z013	T	就是說等腰三角形有這些種類？沒有別的了嗎？
z014	阿忠	嗯，應該沒有。
z015	T	那我如果畫這樣呢？(**頂角大小介於下方第三個圖和第四個圖之間**)
z016	阿忠	那算銳角等腰三角形，和這個一樣(**指下方第四個圖**)
z017	T	一樣？明明不一樣啊？
z018	阿忠	種類一樣啦。

因此阿忠認為其他的圖形只要能歸入這些種類就是重複的圖形，不需要畫出，而由上述兩個例子中阿忠對於圖形的敘述也可看出他已能以最少條件來描述圖形，也就是以圖形的定義來描述，至於圖

形的其他性質，則全部可由原始定義推導出來：

(對話 4-1-6)

z041	T	…(略)，另外我發現你的說明都超簡單的，一句話就解決了耶，怎麼那麼強？
z042	阿忠	一句話就可以了吧。
z043	T	不用寫太多的意思嗎？例如這平行四邊形你就只寫對邊相等，我可以再寫對角相等嗎？
z044	阿忠	對角相等？你就中間連起來就 SSS 就證出來了。
z045	T	哇…就證出對角相等了？所以只要寫對邊相等其他的都可以證出來嗎？
z046	阿忠	對啊，不是嗎?
z047	T	所以不用像阿翰寫那麼多，寫一個其他的就可以證出來？
z048	S4	（稍微瞄了一眼阿翰的作答）對。

因此阿忠對於圖形的概念定義並非由概念心像而來，反而由完整的圖形分類及最少條件的圖形定義可看出阿忠的圖形心像是根據概念定義來尋找出特例，因此阿忠的概念心像及概念定義的互動模式應為下圖，為一個具一般化及抽象化的心智作用。

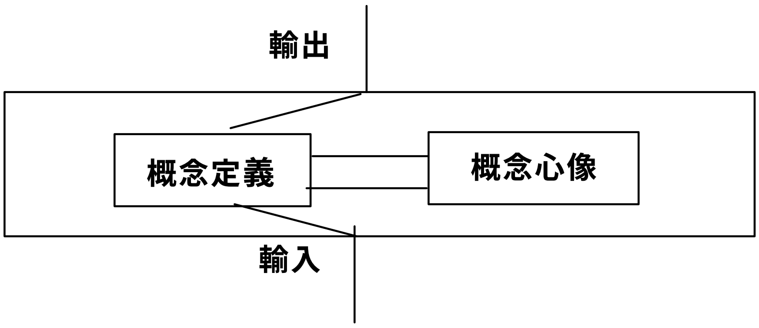


圖 4-1-3：阿忠概念定義和概念心像的互動模式

(引自 Vinner，1991)

而由 van Hiele 的思考層次來看，阿忠已具有 van Hiele 幾何思考層次中層次 3(演繹)的部份表現，也就是能辨識出正式定義的最少條件特性，並經由定義推導出其他定理。而除了阿忠以外，其餘 5 位學生均未能由圖形的性質形成定義，亦不瞭解圖形之間的包含關係，因此這 5 位學生尚未完全達到 van Hiele 思考層次的層次 2(非形式演

繹)，也就是僅能描述並確認圖形中組成元素的特性，但尚無法使用正式的定義。但由於學校課程已教授了形式的幾何證明，因此能作一些簡單的演繹證明，如小葳在說明為何平行四邊形的鄰角互補時，用了以下的演繹證明「因為總共 360° (指內角和)，然後這兩個相等，這兩個相等(指兩雙對角相等)，所以這兩個就是 180° (指兩雙鄰角)。(w046)」但在學生圖形定義不清，而勉強的進行形式幾何證明教學的情形下，則可能在後續的論證中造成障礙。

五、基本圖形概念表現

綜合本節中學生的表現，研究者將大部份學生在圖形概念定義及圖形概念心像主要的表現概述如下：(1)概念心像呈典型類型，主要呈現的特性為呈現水平、鉛直的方位及缺少特例圖形(2)概念定義源自於概念心像的表徵而列舉出數個性質，且無法辨識其相互的因果關係(3)不瞭解圖形間包含關係。

第二節　附圖改變對證明有效性瞭解的影響

在本節中，研究者根據第一節中學生所表現的典形圖形心像，先針對典型附圖完成一演繹證明，接著改變附圖形式以檢驗學生對於證明有效性的瞭解，以下則逐題分析學生的表現，主要分析探究小組 6 位成員的作答情形，並輔以統計其餘 74 位學生之作答情形，以瞭解較多數學生之作答情形，以作為設計探究活動之參考：

一、學生作答情形：

第一題

由於本題只有單一演繹步驟，學生只要擷取已知條件即可推得結論，所用的性質也只有三角形全等性質，目的只在測驗學生是否知道何謂演繹證明，並能完成簡單的演繹證明，因此大部份學生均能正確完成本題之證明。主要的答題類型分析共有二類：(1)正確解題(2)引用不當性質；引用不當性質則分為引用錯誤全等性質，以及引用視覺性質二個類型：

表 4-2-1：證明有效性瞭解問卷題(一)之答題類型

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">正確解題</th><th colspan="2">引用不當性質</th></tr>
<tr><th>引用錯誤全等性質
(SSA)</th><th>引用視覺性質</th></tr>
<tr><td>阿忠</td><td>✓</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>小嬅</td><td>✓</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>小茹</td><td></td><td>$\because \overline{AB}=\overline{AC}\ \therefore \angle B=\angle C$
又 $\overline{AM}=\overline{AM}$ (SSA)</td><td></td></tr>
<tr><td>阿智</td><td>✓</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>阿翰</td><td>✓</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>小葳</td><td></td><td></td><td>$\because \overline{AM}$ 為 $\angle BAC$ 的平分線，
$\therefore \overline{AM}\perp\overline{BC}$ 且平分 $\overline{BC}$</td></tr>
</table>

由於圖形的正確性，在視覺上呈現了並非為原已知條件的性質，小葳則將其視為已知條件進行推論，而 74 位學生中，共有 6 位學生也以這個方式進行了錯誤的推論。

第二題

本題將原來呈水平鉛直性的典型圖形經過旋轉之後，來評量學生在圖形轉變後是否認同原證明之有效性，題幹的情境則要求學生模擬老師的身分，在典型附圖的證明過程正確的前提下，對第(2)題中阿杰的證明過程給分，而阿杰對於轉變後圖形的證明則表示與第(1)小題相同。以下為 6 位學生的給分情形及給分理由，其中阿忠和小嬅可認同

演繹證明的有效性，認為圖形改變並不會影響原演繹證明，而小茹、阿智和小葳雖然在認知上認同證明的有效性，但在情意上卻認為即使證明過程完全一樣，也必須要再寫一次，否則「太懶惰」，且「得不到分」，而阿翰則是認為「圖形不一樣，證明也不一樣」

表 4-2-2：證明有效性瞭解問卷題二之答題類型

	給分	認同原證明之有效性		不認同原證明之有效性
		完全認同(c)	具情意因素(e)	
阿忠	10 分	只是圖形轉變證明不變		
小嬅	10 分	因為他也是用一樣的 AAS 證明		
小茹	0 分		即使一樣也要再寫一次	
阿智	5 分		雖然一樣，但這樣得不到分	
阿翰	0 分			圖形不一樣，證明也不一樣
小葳	5 分		照理說是可以的，但這樣太懶惰，雖然我也想和阿杰一樣，但我不是老師嘛	

而由全體 74 位學生的問卷來分析，也大致呈現了上述的幾種類型，表 4-2-3 為 74 位學生之答題類型人數統計：

表 4-2-3：證明有效性瞭解問卷題二之答題類型人數統計表

		0 分		5 分		10 分		總計	
		人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
認同證明有效性	(c)					28	37.3	28	37.3
	(e)	8	10.7	32	42.7			40	53.4
不認同證明有效性		3	4.0	3	4.0			6	8.0
未作答				1	1.3			1	1.3
總計		11	14.7	36	48	28	37.3	74	100

(c)為完全認同證明有效性、(e)為具情意因素

由表 4-2-3 可以發現，在圖形經過旋轉之後，只有 6 個學生不認同原證明之有效性，認為圖形改變則必須再證一次，分別有三人給 5 分，三人給 0 分，因此對大部份的學生來說，圖形方位上的旋轉對演繹證明有效性瞭解並沒有很大的影響。

而認同證明有效性的學生中，有 53.4%的學生並未表達出堅定的信念，而是含有情意上的表現，認為雖然證明過程和第(1)小題一樣，但也必須再寫一次，這樣的學生中約有 2/3 提出的理由為「多多練習總是好的」、「老師說多作才會有印象」，另外約有 1/3 的學生認為阿杰的寫法並不符合證明的「格式」，雖然證明過程是一樣的，但阿杰並沒有依證明的格式證出這一題，故無法給予滿分，說明給分的理由則有「有證等於沒證」、「一樣是一樣，但這樣算證明嗎」…等。

因此這裡顯示出了一個「熟能生巧」的情意觀感，在課堂中，教師常常要求學生要多作練習，無形中灌輸了學生多作有益無害的觀念，因此即使是具一般性的形式化演繹證明，在圖形轉換後，雖然在認知上某種程度認同原證明之有效性，但卻無法給予滿分的評價，而認為必須再多練習一次，即便是一字不漏的重謄一次也可接受，這種「多作無害」、「熟能生巧」的信念，則為台灣學生的特殊學習信念。

第三題

本題將已一個已完成的幾何證明，其附圖形式由原來的典型平行四邊形，改為特例長方形，檢驗學生是否能利用圖形間的包含關係，以確認證明的有效性，並探討圖形包含關係的瞭解與證明有效性瞭解之間的關係。此題的題幹與第二題相同，亦要求學生模擬老師的身分，給四位同學對於特例圖形的不同證明方法給予評價，並提出給分的理由。這四種作答各不相同，主要用以檢驗證明有效性瞭解的選項

為乙的作法，但其餘的作法亦可看出學生的證明觀，及其他因圖形造成的障礙，因此亦一併討論。

其中甲的作法錯誤地使用了 AAA 性質作為全等性質，丙的作法僅為視覺上的判斷，呈現 van Hiele 層次一的思考特性，丁的作法為原作法的重述，但將第一個步驟敘述中的平行四邊形改為長方形，其餘步驟相同，也就是完整的重證，以下分別依照學生對四個作法的看法分析如下：

(1)甲的作法

這個作法錯誤的使用了 AAA 性質作為全等性質，大部份的學生可以發現這個錯誤，但也有部份學生未偵察到這個錯誤，表 4-2-4 為 6 名學生的作答情形：

表 4-2-4：證明有效性瞭解問卷題三(甲)之答題類型

	給分	發現錯誤的 AAA 性質	未發現錯誤的 AAA 性質
阿忠	0 分	全等性質並無 AAA 性質，表示所教內容並無充分吸收	
小嬅	10 分		說明切實
小茹	5 分	應該用 SSS 全等性質	
阿智	5 分	這是證明相似的方法	
阿翰	5 分		他沒有證明 $\angle AED=\angle BEC$
小葳	5 分		沒寫出為什麼 $\angle 1=\angle 4$、$\angle 2=\angle 3$

6 人中有 3 人未發現錯誤的 AAA 性質，原因可能是對於全等及相似的性質並不瞭解，也有可能因為圖形正確的關係，藉由視覺上的觀察即已承認其全等關係，而僅將演繹過程和圖形逐步作對照，並不容易發現錯誤，表 4-2-5 為全體 74 位學生對於甲作法的給分情形，及

是否發現錯誤的 AAA 全等性質，有約 1/4 的學生未發現錯誤：

表 4-2-5：證明有效性瞭解問卷題三(甲)之答題類型人數統計表

給分 / 答題類型	10 分		5 分		0 分		總計	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
發現 AAA 性質錯誤	0	0.0	29	39.2	21	28.4	50	67.6
未發現 AAA 性質錯誤	20	27.0	0	0.0	0	0.0	20	27.0
未作答或其他	1	1.3	3	4.1	0	0.0	4	5.4
總計	21	28.3	32	43.3	21	28.4	74	100

(2)<u>乙的作法</u>

這個作法為本題中檢驗證明有效性瞭解的主要選項，表 4-2-6 為六個學生的作答類型，共有三個類型，6 位學生的答題情形大致和題(一)相同中，其中在題(一)中認同證明有效性的小嬅和小葳在本題中轉為不認同原證明的有效性，理由都是「長方形並不是平行四邊形」，而認為證明過程可能會有不同，而小茹和阿翰則和上題一樣認同證明的有效性，但仍具情意上的觀感，認為即使一樣還是必須再證明一次，而小葳則仍舊認為圖形改變則證明亦會隨之改變，唯有阿忠完全認同原證明之有效性，表 4-2-6 位 6 位學生的作答類型：

表 4-2-6：證明有效性瞭解問卷題三(乙)之答題類型

	給分	認同證明有效性		不認同證明有效性
		完全認同	具情意因素	
阿忠	5 分	長方形亦是平行四邊形的一種，所以可行，但仍應解釋理由		
小嬅	5 分			長方形不是平行四邊形，懶惰
小茹	0 分		即使作法一樣也要再寫一次	

阿智	0 分		如果這樣的話，就直接在答案中寫問老師就好，老師也不用教了	
阿翰	5 分			老師證的是平行四邊形，而這題要證明是長方形
小葳	0 分			圖是長方形，不是平行四邊形，多多少少還是有少部份不同，須寫出來

而全體 74 位學生的表現也大致如同探究小組成員的作答類型，表 4-2-7 為各類型的人數統計：

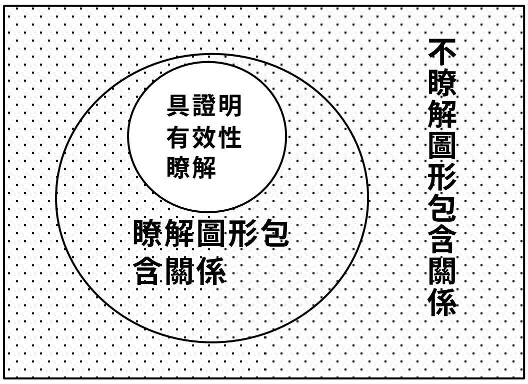
表 4-2-7：證明有效性瞭解問卷題三(乙)之答題類型人數統計表

		10 分		5 分		0 分		總計	
		人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
認同證明有效性	(c)	5	6.8	0	0.0	0	0.0	5	6.8
	(e)	0	0.0	10	13.5	5	6.7	15	20.2
不認同證明有效性		0	0.0	7	9.4	40	54.1	47	63.5
未作答		0	0.0	4	5.4	3	4.1	7	9.5
總計		5	6.8	25	28.3	44	64.9	74	100

(c)為完全認同證明有效性、(e)為具情意因素

表 4-2-7 中五位認同證明有效性的學生均明確的提出「長方形為平行四邊形的一種，所以不用再證了。」因此這本題中，具證明有效性瞭解的學生均理解圖形包含關係，但反過來說，瞭解圖形包含關係的同學則未必可接受原論證之有效性，例如有學生表示「雖然長方形也是平行四邊形，但是證明不一定會一樣。」，亦即原來的演繹證明的結果僅對該典型的平行四邊形成立，對於特例長方形來說則不一定。而不認同證明有效性的所有學生中，則沒有任何人提到圖形的包含關係，如阿翰、小葳的說法，因此是否瞭解圖形包含關係與是否具證明有效性瞭

解之間的關係如圖 4-2-1，也就是說瞭解圖形包含關係的學生未必能在圖形改變為特例的情形下瞭解證明的有效性，但不瞭解圖形包含關係的學生則完全無法瞭解原證明之有效性：



註：黑點部份則為
不具證明有效性瞭解

圖 4-2-1：是否瞭解圖形包含關係與是否具證明有效性瞭解之關係

而將表 4-2-7 與表 4-2-3 作一個比較，可發現具證明有效性瞭解的人數減少了，而認同證明有效性的學生中，仍舊有學生存在情意因素，認為「雖然證明相同，但多練習總是好的」，但亦比題一減少許多；因此表示圖形由典型圖改變為特例的圖形要比僅經過旋轉的圖形對證明有效性的瞭解影響要來的大。

(3)<u>丙的作法</u>

這個作法主要檢驗學生是否接受視覺上所呈現的全等，由於學生已接觸到形式化的演繹證明方法，因此 6 位研究對象均不接受僅是視覺上看起來全等，作答類型如表 4-2-8 ：

表 4-2-8：證明有效性瞭解問卷題三(丙)之答題類型

	給分	給　分　理　由
阿忠	0 分	眼睛看到的並不能代表一切，須提出說明。
小嬅	0 分	沒寫答案。
小茹	0 分	寫作法是要讓老師瞭解你的推理能力及思考能力，若不寫便達不到此作用了。
阿智	0 分	這樣只會讓老師認為他不懂得如何驗證。
阿翰	0 分	如果用看的就知道的話，那幹嘛還叫你寫呢(答非所問)。
小葳	0 分	欠打!證明就是要寫出來啊。

而由全部 74 位學生的作答情形來看，僅有一位學生表示可接受視覺上看起來的全等，而其餘均不同意。這些學生主要提出三種理由，第一種為阿忠的說法，完全否定視覺的判斷，認為視覺是不精準的，第二種為情意的表達，認為「這樣太混了、太懶惰」，另外則有學生提出至少必須測量看看，以測量的方式來驗證，表 4-2-9 為 74 位學生的作答類型統計表：

表 4-2-9：證明有效性瞭解問卷題三(丙)之答題類型人數統計表

		10 分		5 分		0 分		總計	
		人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
同意視覺判斷		1	1.4	0	0	0	0	1	1.4
不同意視覺判斷	(v)	0	0	2	2.7	26	35.1	28	27.8
	(e)	0	0	1	1.4	33	44.6	34	46.0
	(m)	0	0	0	0	6	8.1	6	8.1
未作答		0	0	0	0	5	6.7	5	6.7
總計		1	1.4	3	4.1	70	94.5	74	100

(v)認為視覺判斷並不精準、(e)為情意表達、(m)表示可以測量的方式驗證

(4)丁的作法

此作法為針對特例長方形作一完整的重證，證明過程和原題完全一樣，僅將證明過程中步驟一的平行四邊形改為長方形，表 4-2-10 是 6 位學生對於此作法的給分說明，主要分為兩種類型：過程完全正確、過程不完全正確：

表 4-2-10：證明有效性瞭解問卷題三(丁)之答題類型

	給分	完全正確	不完全正確
阿忠	10 分	能運用所教過之性質，但最好能再利用其他方法證明	
小嬅	10 分	說明切實	
小茹	10 分	推理得非常詳細，且全等性質和推理方式寫得很正確	
阿智	10 分	證得很好	
阿翰	10 分	寫得很好	
小葳	5 分		長方形與平行四邊形並不全等，而丁是照抄的，理應不給分，但看在他有寫出來，給一半。

丁的作法中將「$ABCD$ 為平行四邊形」改為「$ABCD$ 為長方形」，因此於乙作法中認為長方形不是平行四邊形一種，故必須再證一次的小嬅、阿翰兩人，給了丁作法 10 分，因此對他們兩人來說老師的證明和丁的證明是不同的證明，分別針對兩個獨立的圖形。而小葳則是更強烈地認為圖形不一樣，證明過程也不會一樣。

而就全體學生來看，大部份的學生也給了滿分，只有 1 人和小葳一樣表示圖形不同證明也不可能相同，另外也有少部份學生認為可以試試別的作法，認為「和老師一樣，太沒創意了」，還有 4 位學生在看過整個證明過程後，認為「證明有錯」而未給予滿分，表 4-2-11 為 74 位學生的作答情形：

表 4-2-11：證明有效性瞭解問卷題三(丁)之答題類型人數統計表

	10 分		5 分		0 分		總計	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
完全正確	59	79.7	0	0.0	0	0	59	79.7
可試其他方法	0	0.0	3	4.1	0	0	3	4.1
證明有誤	0	0.0	4	5.4	0	0	4	5.4
圖形不同證明也不會相同	0	0.0	2	2.7	0	0	2	2.7
未作答	6	8.1	0	0.0	0	0	6	8.1
總計	65	87.8	9	12.2	0	0	74	100.0

第四題

本題分為三小題，第(1)小題要求學生自行完成一演繹證明，第(2)小題僅改變原附圖的符號系統，但圖形與原題全等，僅改變圖形上的符號，以檢驗學生在這個變因下的證明有效性瞭解，第(3)小題圖形的改變並非原圖形的特例圖形，也非單純的剛性變換，而是作了伸縮、旋轉、放大、縮小…等較多的變化，視覺上將附呈現較大的改變。因此本題為兩種附圖形式的改變，表 4-2-12 為 6 位學生第(1)題~第(3)題的作答情形：

表 4-2-12：證明有效性瞭解問卷題四之作答情形

	第(1)小題	第(2)小題		第(3)小題	
		是否需要再證明	理由	是否需要再證明	理由
阿忠	正確	是	在不同的三角形中，或許有不同結果	是	邊長、角度不同或許會有其他結果
小婕	正確	否	只是符號不同，內容相同	是	圖形較易導亂人的視線，雖一樣，但值得再證
小茹	正確	否	因為只是代號不同	是	因為圖形並不相同
阿智	引用錯誤性質：中線即為角平分線	否	同理可證(用上題的方法)	否	同理可證(用上題的方法)
阿翰	正確	是	因為代號不同	否	多此一舉
小葳	引用錯誤全等性質	是	要有運動家精神	是	要有運動家精神

而全體學生第(2)小題的作答情形分布如表 4-2-13，大部份學生認為只是符號不同，證明是相同的，而仍然有部份學生認知上認為證明是相同的，但仍可多作幾次練習，此外有約 1/4 的學生認為符號不同則必須再證明一次：

表 4-2-13：證明有效性瞭解問卷題四(2)之答題類型人數統計表

		不用再證明一次		還要再證明一次		總計	
		人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
認同證明有效性	(c)	41	55.4	0	0.0	41	55.4
	(e)	0	0.0	13	17.5	13	17.5
不認同證明有效性		0	0.0	19	25.7	19	25.7
未作答		1	1.4	0	0.0	1	1.4
總計		42	56.8	32	43.2	74	100.0

(c)為完全認同證明有效性、(e)為具情意因素

第(3)小題中對圖形作了較大的改變之後，學生對於原證明有效性的瞭解也有了很大的改變，大部份學生認為這這樣的圖形改變下，則必須再證明一次，也就是不認同證明有效性的學生明顯增加了，統計如表 4-2-14：

表 4-2-14：證明有效性瞭解問卷題四(3)之答題類型人數統計表

		不用再證明一次		還要再證明一次		總計	
		人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
認同證明有效性	(c)	29	39.2	0	0.0	29	39.2
	(e)	0	0.0	7	9.5	7	9.5
不認同證明有效性		0	0.0	36	48.6	36	48.6
未作答		2	2.7	0	0.0	2	2.7
總計		31	41.9	43	58.1	74	100.0

二、證明有效性瞭解表現

為了評估附圖形式的改變對於大部份國三學生證明有效性瞭解的表現，因此將表 4-2-3、表 4-2-7、表 4-2-12、表 4-2-14 中 74 位學生的作答情形綜合統計如表 4-2-15：

表 4-2-15：附圖形式的改變對證明有效性瞭解的影響人數統計表

	認同證明有效性			不認同證明有效性	未作答
	完全認同	具情意因素	小計		
剛性旋轉	37.3	53.4	90.7	8.0	1.3
改為特例圖形	6.8	20.2	27.0	63.5	9.5
改變符號	55.4	17.5	72.9	25.7	1.4
放大、旋轉、伸縮	39.2	9.5	48.7	48.6	2.7

單位：%

由表 4-2-16 的數據顯示, 特例圖形被大部份的學生視為完全不相干的圖形，而造成無法一般化論證的結果，是影響瞭解證明有效性最大的變因，倘若將圖形作了放大、旋轉、伸縮等較大的改變後，有效性的瞭解則呈兩極化的表現，認同與不認同的學生各佔了約一半，但仍對較多數的學造成了影響。

其中將圖形旋轉對證明有效性瞭解的影響程度並不大, 這是由於剛性變換保有了原圖形的角度以及長度等物理量的不變, 因此學生很容易發現圖形與原圖形的全等，而接受原證明的有效性；而改變附圖的符號則是其中影響最小的一個變因，原因則是圖形仍和原圖形全等，方位亦沒有更動，因此證明有效性被大部份同學接受，因此將以上變因對大多數學生證明有效性瞭解的影響的程度由大至小排列如圖 4-2-2：

改變為特例圖形 ⇒ 任意伸縮、放大、旋轉 ⇒ 剛性變換 ⇒ 改變符號

圖 4-2-2：附圖形式改變對學生證明有效性瞭解影響程度

圖 4-2-2 的影響程度為 74 位學生作答情形的百分比統計結果，因此僅代表在某種附圖改變下，對於多數學生的影響程度，並非對每個個體的影響層次，如 6 位探究小組成員在在由典型圖形改變為其他形式附圖的情況下，對於證明有效性瞭解的表現如表 4-2-16：

表 4-2-16：附圖形式的改變對於證明有效性瞭解的影響(6 名學生)

	改為特例圖形	放大、縮小 旋轉、伸縮	剛性旋轉	改變符號
阿忠	✓	×	✓	×
小嬅	×	△	✓	✓
小茹	△	×	△	✓
阿智	△	✓	△	✓
阿翰	×	✓	×	×
小葳	×	×	△	✓

✓：認同證明有效性、△：認同但具情意因素、×：不認同證明有效性

其中小嬅和小葳大致符合圖 4-2-2 的影響程度，而阿智則是無論附圖形式如何改變，都可認同證明的有效性，僅表達了情意上的意見，而其餘三人則有不同的表現，則可能與學生是否具圖形包含關係以及其他空間能力有關。

第三節　附圖形式對於幾何證明能力的影響

本節主要探討不同附圖形式下，對於學生做證明的能力影響，而附圖形式則以「典型圖」、「非典型圖形」、「錯誤圖形」、「無附圖」為變因，檢驗學生在做幾何證明時受到不同附圖的影響為何，是正面的輔助效果亦或是負面的障礙。

一、探究小組成員作答情形

主要根據問卷三學生的作答情形來分析，而由於問卷中均為開放式的幾何證明題，礙於研究者的時間及能力範圍所限，主要分析六名參與探究活動學生的作答，再輔以描述全體學生的大致作答情形。

此問卷共有五題，每題之題幹均相同，僅改變了題目的附圖形式，而為了避免已作答之題目影響後續的作答，因此題目的編排順序根據合作教師之建議並參照該校資深數學教師之教學經驗，原則上採由難到易的排列，排列順序為「未附圖形」→「錯誤之非典型方位圖形」→「錯誤之典型圖形」→「正確之特例圖形」→「正確之典型圖形」，以下按照題號逐題分析：

(一)未附圖

本題未附上圖形，因此大部份的學生在進行論證之前，會自行依照題目的敘述畫出附圖，題目敘述如下：

G 為 ΔABC 的外心，連接 $\overline{GA}$、$\overline{GB}$、$\overline{GC}$，若 $\angle ACG = \angle BCG$ 試證 ΔABC 為一等腰三角形。

在這樣的題目敘述之下，全體 74 位學生有 46 位自行畫出圖形，而 46 位畫出圖形的學生中，有 42 位畫出如圖 4-2-3 的典型等腰三角形，並依照一般的習慣如右圖依序標上點 A、B、C，在這樣的情況下，受到由典型心像方位的影響，幾乎所有的學生都將證明的目標定在證出 $\overline{AB} = \overline{AC}$，因此會造成已知條件不足的情形，而為了達到預定的推論目標，學生則有過度推論的情形，而產生了下列兩個主要的錯誤類型：

- 過度一般化：這類的學生利用視覺上所觀察到的性質來推理，最典型的例子如由已知中的 $\angle 1=\angle 2$ (如圖 4-2-3)，根據視覺上的對稱，過度一般化 $\angle CBG$ 亦等於 $\angle ABG$，進而導出 $\Delta AGB \cong AGC$，而推得錯誤的結論 $\overline{AB}=\overline{AC}$。

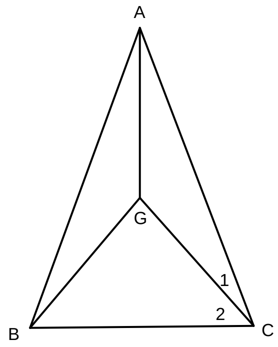


圖 4-2-3： 問卷三題(一)學生所結構之附圖

- 引用錯誤的性質：部份的學生會引用錯誤的性質來進行推導，主要引用的有下列三個主要錯誤的性質：①將 $\overline{AG}$ 之延長線視為 $\overline{BC}$ 之中垂線，再衍生出相關性質，②因 G 為外心，則 $\angle 1=\angle ABG$，③因 G 為外心，則 $\angle AGC=\angle BGC=\angle AGB$

而以上兩種錯誤類型的起因均為典型附圖作帶來的視覺影響，表 4-2-17 為探究小組成員之作答情形，有 2 人無法根據題意畫出圖形，而其他畫出圖形的 4 人中均呈現了典型圖形，且有 3 人受到圖形影響，僅阿忠一人不受圖形影響作出正確推論：

表 4-2-17：幾何證明能力問卷題一之作答情形

	作圖情形	作答情形	附圖影響
阿忠	典型圖	正確推論	＋
小嬅	典型圖	引用錯誤性質②	－
小茹	未作圖	未作答	－
阿智	典型圖	未作答	－
阿翰	未作圖	未作答	－
小葳	典型圖	將已知條件重述即得到結論	－

＋：附圖具輔助作用、－：附圖具負面影響

(二)錯誤之非典型方位附圖

本題提供了如圖 4-2-3 的附圖，因此若在題(一)中畫出相同圖形的學生，作答情形也大致相同，因此主要檢驗在題(一)因未能畫出相關圖形而未作答的學生於本題的推論情形如何。如小茹、阿智及阿翰，在本題由於提供了附圖，三人均根據該附圖開始作答，但仍呈現題(一)中的幾個錯誤類形，另外小葳則表示圖形不標準($\angle 1 \neq \angle 2$)，因此根本無法得到結論，表 4-2-18 為六人作答情形：

表 4-2-18：幾何證明能力問卷題二之作答情形

	作答情形	附圖影響
阿忠	正確推論	＋
小嬅	引用錯誤性質③	－
小茹	引用錯誤性質②	－
阿智	引用錯誤性質①	－
阿翰	引用錯誤性質③	－
小葳	批評圖形不標準，無法作答	－

＋：附圖具輔助作用、－：附圖具負面影響

(三)錯誤之典型附圖

本題的附圖中，將欲證相等的兩腰以一般典型的形式呈現於左右兩側，但兩腰刻意畫不等長，如圖 4-2-4。在這樣的附圖形式下，大部份學生所訂定的推理目標仍為左右兩側的 $\overline{AB} = \overline{AC}$，但由於為已知條件可推導出的結果，因此作答率及正確率亦提高。但因圖形

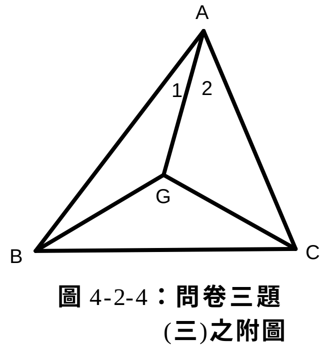


圖 4-2-4：問卷三題(三)之附圖

視覺上呈現的長度是 $\overline{AB} = \overline{BC}$，因此亦有學生(如:小茹)則以此為推論的目標，而作出錯誤推論，另外小葳則仍舊表示在不標準的圖形下無法作答，由本題中發現小嬅和阿智由於推論目標正確，因此證明能力則在這樣典型的附圖形式下有了提昇，表 4-2-19 為學生之作答情形：

表 4-2-19：幾何證明能力問卷題三之作答情形

	作答情形	附圖影響
阿忠	正確推論	＋
小嬅	正確推論	＋
小茹	引用錯誤性質②，推出 $\overline{AB}=\overline{BC}$	－
阿智	正確推論	＋
阿翰	引用錯誤性質③	－
小葳	批評圖形不標準，無法作答	－

(四)正確之特例圖形

本題附圖如圖 4-2-5，外心於三角形之邊上，因此為特例直角三角形，如圖 4-2-5，但由於圖形為一標準之等腰三角形，導致學生在推論過程中使用了視覺上呈現的性質，主要的錯誤情形為將 $\overline{AG}$ 視為 $\overline{BC}$ 的中垂線，因此 $\overline{AG}\perp\overline{BC}$、$\angle AGB=\angle AGC=90^{\circ}$，和題一之中的錯誤性質①相似(以①’表示之)，而阿智則是用尺規測量的方式驗證 $\overline{AB}=\overline{AC}$，表 4-2-20 為學生之作答情形：

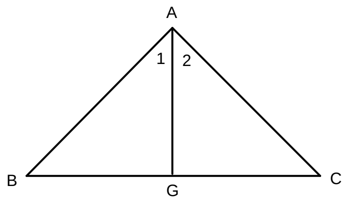


圖 4-2-5：問卷三題(四)之附圖

表 4-2-20：幾何證明能力問卷題四之作答情形

	作答情形	附圖影響
阿忠	正確推論	＋
小嬅	表示同題三	＋
小茹	正確推論	＋
阿智	以尺規測量	－
阿翰	引用錯誤性質①’	－
小葳	引用錯誤性質①’	－

由表 4-2-20 發現，小茹做證明的能力在這個附圖形式下得到了提升，但阿智卻反而以測量的方式來驗證，呈現一個不同的證明觀，認為在無法提出形式證明的情形下，以測量的方式亦可驗證。另外，在

本題中圖形的正確性似乎作阿翰和小葳沒有正面的幫助，反而造成了負面的影響。

(五)正確之典型附圖

本題中的附圖為標準之典型等腰三角形，因此大部份學生在圖形的輔助下，均能正確的做出完整證明，但另一方面由於圖形正確性，呈現出其他並非為已知條件的性質，而被學生用以進行推論的現象仍舊存在。例如仍有少部份的學生仍將 $\overline{AG}$ 之延長線視為 $\overline{BC}$ 之中垂線，另外阿翰亦引用了錯誤的性質③，表 4-2-21 為學生的作答情形：

表 4-2-21：結構證明能力問卷題五之作答情形

	作答情形	*附圖影響*
阿忠	正確推論	+
小嬅	正確推論	+
小茹	正確推論	+
阿智	正確推論	+
阿翰	引用錯誤性質③	−
小葳	表示同題一的作法	−

二、幾何證明能力部份表現

這個部份 6 名學生在幾何證明能力的表現的確受到不同附圖形式的影響，而被影響的程度大小，則如同原先所預期的依序為：「未附圖形」→「錯誤之非典型方位圖形」→「錯誤之典型圖形」→「正確之特例圖形」→「正確之典型圖形」，表 4-2-22 為 6 名學生分別在五個題目中的表現

表 4-2-22：不同附圖式下 6 名學生的幾何證明能力表現

	未附圖	錯誤、非典型方位	錯誤、典型方位	特例圖形	正確典型
阿忠	＋	＋	＋	＋	＋
小嬅	－	－	＋	＋	＋
小茹	(未作答)	－	－	＋	＋
阿智	(未作答)	－	＋	－	＋
阿翰	(未作答)	－	－	－	－
小葳	－	－	－	－	－

＋：於該附圖形式下做出正確證明、－：受到圖形影響無法做出證明

由問卷三學生的作答情形，主要將學生受到附圖形式所影響而產生的錯誤類型主要分為以下三類：(1)依照典型圖形訂定出錯誤之推論目標(2)錯誤圖形所呈現的視覺表徵導致引用錯誤性質而無法進行推論(3)正確典型圖下的過度推論。因此將於後續研究中根據這三個錯誤類型設計相關探究活動以突破圖形在幾何證明過程中所造成的障礙。