

方瓊婉、徐偉民、郭文金（2017）。

運用圖形拆解法提升九年級學生幾何證明的學習表現。

臺灣數學教師，38（2），1-18

doi: 10.6610/TJMT.20171005.01

運用圖形拆解法提升九年級學生幾何證明的學習表現

方瓊婉¹ 徐偉民² 郭文金¹

¹ 國立屏東大學科普傳播學系

² 國立屏東大學教育學系

本研究旨在探討運用互動式電子白板（IWB）呈現圖形拆解法進行幾何證明教學的歷程與學生的學習表現。以 IWB 為教學工具，透過研究者自編教材，對 29 位在補習班學習的國三學生進行 8 節課，共 360 分鐘幾何證明的教學。課程實施初期學生的證明技巧仍不純熟，課程實施中期學生於課堂上與研究者討論證明思考的歷程，並提出不同之證明方法，課程實施後期學生已能寫出完整證明推理的紀錄。課程實施後對參與學生進行認知與情意的測驗，發現學生在幾何證明認知測驗有 12 位的成績達 120 分以上。平均有 77% 的學生對運用 IWB 呈現圖形拆解方法進行幾何證明教學持正向的看法。

關鍵詞：互動式電子白板；幾何證明；圖形拆解

壹、前言

國中階段的證明課程可以培養學生的分析組合及邏輯推理的能力，雖然數學證明的理解與建構已成為中學數學課程學習的基本要素之一（呂鳳琳，2010），但由於數學證明牽涉邏輯推理、概念元素間互動的複雜任務，一般學生對於數學證明的方法與涵義不易掌握。Cheng 與 Lin（2007）研究國三學生學習幾何證明的結果顯示，學過幾何證明的國三學生有三分之一無法寫出幾何證明，有三分之一的學生寫出的幾何證明是不完整的；陳創義（2003）也發現在九年級三角形幾何證明的課程中，對嚴密性的論證要求及非典型範例有明顯的增加，但只有不到五分之一的國三學生能夠清楚了解有關幾何形狀敘述中的邏輯語詞以及性質的描述；Healy 與 Hoyles（1998, 2000）的研究以九年級成績前 20%~25% 的學生為對象，要求其描述證明的意義，判斷並給出證明，結果也發現在構建證明項目上的平均得分最高不到一半，只能以簡單的方式進行證明的學生有 28%~56%。顯見國中學生在幾何證明的學習成效並不理想。

因此，本研究利用互動式電子白板（Interactive Whiteboard，簡稱 IWB）作為九年級幾何證明教學的主要工具，以幾何圖形的拆解、用不同顏色標記顯示相同或相等條件的等視覺化的過程，看見圖形之間的關聯與聯想出相關的幾何性質，讓學生可以具體的看出圖形間的關聯，進而聯想到幾何證明相關的基本性質或定理，更進一步將觀察到的結果歸納、整理、及逐步寫出明確的證明過程。

貳、文獻探討

數學是一門證明與邏輯論證的科學，也是一門「證明的科學」（Reiss, Hellmich, & Reiss, 2002）。Stylianou、Blanton 與 Knuth（2009）指出如果解題是數學的心，則證明是數學的靈魂；The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]（2000）也建議中學以下的數學課程應該讓學生能夠認識推理與證明，並能選擇和使用各種適當的推理形式和證明方法。美國加州公立學校數學架構指出：數學最重要目標是教授學生邏輯推理，而八年級以上的學生，應該要強化數學的敏銳度（洪萬生，2004）。國內學生第一次接觸到形式化數學證明的課程內容是幾何課程，除了可以訓練學生的演算、推理與抽象能力，也可發展學生邏輯思考的能力，以及了解數學家工作的機會（教育部，2008a）。

數學證明過程除了透過已知條件來推論待證目標外，更重要的是在解釋說明數學思維的脈絡發展，但由於數學證明牽涉邏輯推理、概念元素間互動的複雜任務，一般不易

掌握數學證明的論證手法與涵義（左台益等人，2011），雖然幾何圖形提供學習者直觀察覺的豐富訊息，但也容易造成其解讀圖形的困難。由於人腦處理訊息的能力有限，如果學習的新概念或內容過於複雜而不易理解時，可適當地將教材進行分割，以降低學習者的認知負荷（Mayer & Moreno, 2003）。

Duval（1995, 1998）認為幾何知識的學習有三種認知過程：視覺過程、構圖過程和推理過程；對幾何圖形的認知理解則可分成四種：知覺性理解、序列性理解、操作性理解和論述性理解。由 Duval 幾何的學習認知過程與認知理解，可以了解學生對幾何的學習，需先有圖形的視覺認知，有了基本的視覺表象認知後，產生知覺性的理解。所以讓學生從構圖中對圖形能有知覺性和序列性的理解，再透過分割拆解圖形的過程，讓學生對幾何圖形的已知條件間能有操作性的理解，進而整合已知條件，達到論述性的理解。所以，Duval（1998）指出幾何證明的理解是一個需要高度認知要求的複雜過程，因此在幾何教學上常需幫助學習者掌握其中所蘊含的脈絡訊息，透過幾何知識的學習的三個認知過程，對幾何圖形先有視覺認知，才能產生知覺性的理解，進而整合已知條件，達到論述性的理解。本研究也將透過圖形拆解的方式，將複雜且隱藏在圖形中的訊息呈現出來，希望能夠降低學生的認知負荷，提升其幾何證明的論證成效。

Van Hiele 幾何認知發展的五個層次主要是說明學習者的幾何概念發展具有層次性，且層次的進展取決於適當的教學而非年齡，所以 Van Hiele（1986）認為適當的教學比起學生的年齡或成熟度更容易提升學生的幾何思考層次。為引導學生到較高的思考層次，Van Hiele 提出五階段教學模式：（一）詢問階段；（二）引導學習方向階段；（三）表達階段；（四）自由探索階段；（五）統整階段。在完成這五個階段之後，學生應可逐漸從最基本的視覺思考層次階段開始，一層一層往前學習，最後應可到達嚴密性思考層次階段。在本研究是以 Van Hiele 的幾何學習階段做為課程實施的進行方式。

IWB 為一具有高度互動性的科技輔助工具，具有繪圖書寫及螢幕等多重功能，可完整呈現圖形的重複建構、拆解、組合和分解，提供視覺效果。Duroisin、Temperman 與 De Lièvre（2015）的研究結果顯示，使用 IWB 可增加中學二年級學生之間的互動，對學習成效也有正面的效果；Nejem 與 Muhanna（2014）的研究也顯示使用 IWB 在中學生的數學成就和保留上有正向的效果。在動機和態度上，Akturk、Mihci 與 Celik（2015）研究指出中學生對 IWB 有很高的正向看法，且可以提升學生和老師的態度；Çakir（2015）的研究結果顯示在數學課程中使用 IWB 有顯著的效益，可以提升中學生的好奇心和動機；Cakiroglu（2015）認為老師對在班級中使用 IWB 大都抱持正向的觀點，參與實驗

的老師也提到 IWB 另一個優勢是提供結合各種特性的教學的機會。

參、研究方法

本研究設計 IWB 的幾何證明教學環境，來改善學生的幾何證明學習困境，由於這是不斷的變動過程，隨時都要針對教師教學和學生學習中遇到的問題進行修正，所以本研究採用行動研究法。

一、研究對象

本研究對象為本文第一作者任教補習班的國中三年級學生，他們來自高雄市三所不同的國中，共 29 人，並由本文第一作者進行教學。雖然不同學校段考試題有難易之分，但參與本研究學生在校數學段考平均成績，約在 70 到 90 分之間，其數學學習表現屬於中上程度。

二、研究工具

(一) IWB 教學環境

本研究使用 PowerPoint 軟體設計教學環境，再透過 IWB 進行教學，IWB 同時扮演著「白板」與「電腦螢幕」雙重的角色，教師透過手指或是特殊的筆接觸電子白板之面板，可以在電子白板上書寫任何的文字、繪圖、圖畫顏色，具有繪圖、書寫及螢幕等多重功能，這也是僅單純使用 PowerPoint 加上布幕無法做到的功能，這也是本研究選擇使用 IWB 進行教學的目的。

國中數學第五冊第三章第一節幾何證明的學習目標為培養學生用推理的方式來證明一些常見的幾何性質，利用基本全等性質及相似性質以推理證明的方式來得到幾何性質及公式。故本研究 IWB 教學環境以幾何證明為主要的學習範疇，教學內容包含基本全等性質、相似性質及其應用，包括老師講解之例題 21 題，與學生課後回家練習之演練題 14 題。有些題型使用一次證明，有些則是兩次證明。一次證明是指經過一次的推理證明程序即可得到待證之結果，兩次證明是指需要經過兩次的推理證明程序才能得到待證之結果，若需透過兩次演繹推理程序才可得到待證之結果也歸類到兩次證明。

(二) 幾何證明認知測驗卷

本測驗主要參閱教育部(2008b)編訂的九七課綱中的數學領域能力指標，共 15 題，

結構表如表 1。

表 1

認知測驗結構表

年級	單元名稱	題數	題目類型	全等或相似性質
國中三年級	幾何證明	1	全等證明	ASA
		4		SAS
		4		AAS
		1		SSS
		2		RHS
		2		相似應用 平行比例線段
		1		幾何證明 三角形邊角關係應用

認知測驗給分說明如下：

- 1.證明條件是題目給定的，一條件給 1 分。
- 2.由題目所給的條件推導出的，一條件給 2 分。
- 3.寫出全等或相似的兩個三角形，給 1 分。
- 4.寫出全等或相似性質，給 3 分。能寫出全等或相似性質，表示學生對此題有整合性的理解，故給分較高。
- 5.將待證之結果列出，給 0.5 分。
- 6.有些特殊題型，需畫出輔助線才可解題，此為解題關鍵，故將證明解題關鍵之輔助線畫出，給 2 分。
- 7.若寫出的證明方式與研究者所列之答案不相似的證明解題方法，但其證明及解題方法合乎邏輯及證明順序結構，則給此題完整的分數

本測驗 1~15 題的滿分分別為 8.5 分、8.5 分、8 分、12.5 分、9.5 分、8.5 分、8.5 分、6.5 分、8.5 分、10 分、8.5 分、8.5 分、15 分、4.5 分、6.5 分，總分為 132 分。

在效度方面，測驗之內容乃依據九年一貫課程綱要之能力指標：「S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。」及「S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。」，依此兩能力指標設計認知測驗卷，三角形全等性質有五種分別為 AAS、ASA、SAS、SSS、RHS 全等性質，三角形相似性質分為 AA、SAS、SSS 相似三種，涵蓋教學實施時欲達成的教學目標，所以具有內容效度。此外也請數學

教育專長的學者及有二十年教學經驗之資深教師審閱，亦具有專家效度。評分者信度的建立，由本文的第一作者、一位有 6 年國中數學教學經驗的現職教師及一位有 18 年國中數學教學經驗的補教界老師共同評分。經分析評分者信度值為 0.98，顯示有良好的評分信度。

(三) 情意量表

本研究情意量表主要是瞭解以 IWB 進行幾何證明教學，是否能提升學生學習興趣及對幾何證明的幫助情形。本量表為五點量表，總分為 20 分。總得分在 16-20 分，表示學生非常喜歡且認為此教學方式很有幫助；得分在 12-15 分，表示有點喜歡與有幫助；得分在 8-11 分，表示學生認為此教學方式沒太大幫助且不太喜歡；得分在 8 分以下，表示此教學方式對幾何證明的學習上沒有幫助，且學生非常不喜歡。

(四) 錄影錄音工具

錄音資料為研究者於課後針對課程實施的反思札記，配合學生的課後訪談錄音，同步進行蒐集及整理資料，讓研究者可以針對學生所提出的問題及上課的流暢度與課堂上的缺失，做為後續修正教學方向的依據。

三、教學實施

本研究共實施 8 節課，每節 45 分鐘，共 360 分鐘，並依 Van Hiele 的幾何學習階段進行教學，實施的歷程說明如下：

- (一)詢問：首先呈現圖形，詢問學生在圖形中看到了什麼？
- (二)引導學習方向：將題目所給的已知條件用不同顏色標註顯示，再將待證之結果標註顏色，引導學生將已知條件與待證之結果關係找出其關聯性。
- (三)明顯化：將全等或相似三角形圖形拉出，呈現相似或全等的三角形，協助學生找出解題關鍵。
- (四)自由探索：圖形明顯化後，學生依圖形的顯示即可知道全等或相似的幾何性質為何，以圖形先做一次幾何證明。
- (五)整合：以圖形先做一次幾何證明，再以正式的條列式做完整的證明，讓學生思考及概覽所使用的方法，並請學生提出其他的解題模式，且試著去濃縮曾探索過的幾何性質方法，老師協助學生對解題做一統合概念的整合。

四、資料整理與分析

(一) 認知測驗與情意量表的分析

認知測驗和情意量表皆以描述性統計分析學生的學習成效及學習態度。

(二) 上課錄影與訪談資料

錄影與訪談的目的是讓研究者了解課程的實施時學生的反應，並做為課後反思檢討修正的依據。接著將教學錄影資料及課後訪談資料編碼，編碼以「類別－人員－日期」的方式編碼。編碼說明如表 2：

表 2
編碼方式與範例表

編碼代號	編碼類別	編碼範例
Ob	教學實施觀察影帶	Ob1025，代表 10 月 25 日教學實施觀察影帶
In	課後學生訪談紀錄	InSn1025，代表 10 月 25 日課後學生訪談紀錄
Rf	研究者課後反思紀錄	Rf1025 代表 10 月 25 日研究者課後反思紀錄

肆、研究結果與分析

一、初期實施的情形與反思

(一) 初期教學實施概況

第 1、2 節的上課內容為例題 1 至例題 9。研究者先將圖例顯示於 IWB 上，再將已知條件列出，依序塗上不同顏色，將題目完整呈現於 IWB 後，詢問學生該如何解題，但學生似乎並沒有解題的想法及對題目有太大的反應，但當圖形於 IWB 上拆解出來時，就有部分學生說出全等性質，研究者再依序先以圖形證明一次，再以正式的文字條列證明一次給學生看。教學實施步驟以其中一例題說明於表 3：

表 3

教學實施步驟表

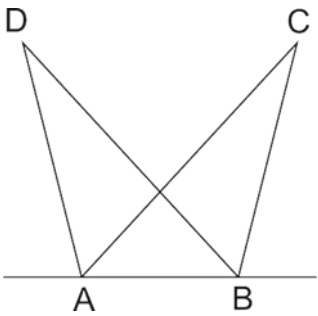
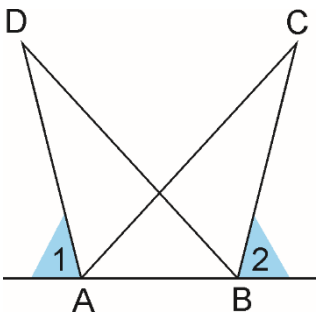
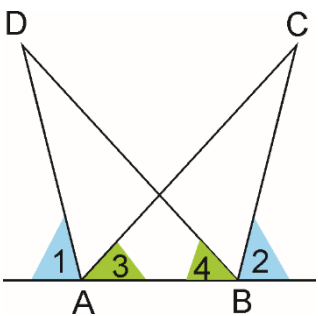
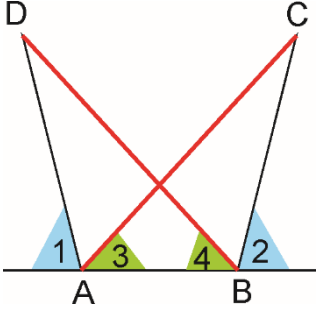
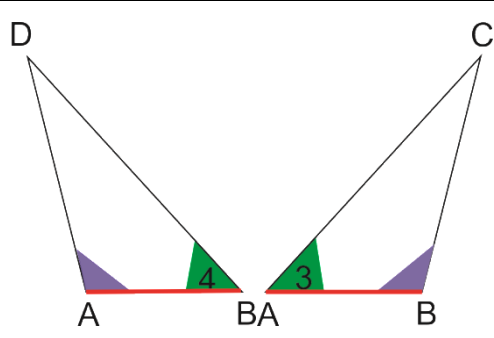
步驟	步驟說明	IWB 學習環境內容
一	先顯示題目圖形	
二	再顯示題目條件	已知 如圖， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。
三	將已知條件塗上顏色	
四	將已知條件塗上顏色	
五	將待證結果列出	求證 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。
六	將待證結果塗上顏色	

表 3 (續)

七	詢問學生有何想法及如何證明？（此時學生對題目沒有太大的感覺）	
八	將全等的兩圖形拉出	
九	此時有部份學生說出三角形的全等性質	
十	研究者利用圖形說明，並做一次全等證明	在$\triangle ABD$ 與$\triangle BCA$ 中 $\angle DAB = \angle CBA$ $\overline{AB} = \overline{AB}$ (共用邊) $\angle 3 = \angle 4$ (已知) $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ (ASA) $\overline{AC} = \overline{BD}$ (對應邊等長)

(二) 初期課堂觀察與課後訪談

經過第 1、2 節的 IWB 教學之後，想要了解學生對 IWB 的看法為何，所以將課堂上的觀察及課後訪談整理如後。

1. 學生對學習課程內容的反應

學生對 IWB 教學感到好奇，所以未把注意力放在課程內容上，只注意 IWB 上的圖形變化，對題目提供的訊息及重點不太去思考，研究者則透過不斷的提問，將學生的焦點拉回待證題目上，提醒學生注意題目要表達及訴求的重點，慢慢將焦點集中在課程內容上 (Ob1130)。

研究者以塗上顏色及拆解圖形的方式，先將圖形證明一次，再用文字列式方法證明一次 (Ob1130)。起初要學生寫出完整的條列式證明，對學生而言是件困難的事，但慢慢地一題兩題將圖形證明完後，再說明講解一次，列出論證，說明論證條列寫法，讓學生習慣書寫證明的過程，發現學生有逐漸能掌握證明的技巧及圖形的拆解方式 (Ob1130)。

2. 學生對運用 IWB 進行幾何證明的教學方式接受度

課後由另一位數學教師對參與上課之學生做課後訪談，彙整學生的反應大致分成以下三類：

- (1)有些地方會反光，看的較不清楚。字太小，坐後面較看不清楚（InS51130）。在 29 位學生中，有 9 位學生有類似的反應。
- (2)圖形比老師用粉筆畫的還要工整漂亮，圖示的標示很清楚，可以幫助理解圖形拆解完成的樣子（InS111130）。在 29 位學生中，有 7 位學生有類似的反應。
- (3)圖形已事先畫好，老師只要點一下圖就拉出來，上課速度變快了（InS161130）。

(三) 初期教學反思與修正

課後研究者針對學生的反應及觀看錄影後，對上課的內容及順序，再做一次反省及自我檢討，並於下次課程實施前完成修正。修正部分如下：

- 1.學生課後反應字體太小。將字體大小由原本的 14 點修改成 18 點。
- 2.將淡黃色改成藍色或淡綠色避免反光。
- 3.在上課時有些文字標示錯誤，修改後也將其他未上的例題及練習題一併再做一次校正修改。
- 4.觀看錄影後，將課程的文字說明與文字列式論證以不同顏色呈現，黑色斜體字為說明輔助，讓學生知道結果的由來，藍色字為證明過程。
- 5.研究者放慢講課速度，延長每一步驟的時間，並將圖形拉出的時間延長，原本是快閃拉出改成緩慢拉開。

研究者將依據學生對這次上課的反應，調整上課步驟，希望於下次上課時能利用節省下來的時間多與學生互動引發學生的想像與思考能力。

二、反思修改後的再次出擊

(一) 教學實施概況

第 3、4 節上課內容為例題 9 至例題 17。這次，也依據上次上課後學生所提出來的問題，將電腦化面的字體大小、顏色以及圖形拆解後拉出的時間做了修正，而且學生已較適應用 IWB 上課的方式，對呈現的已知條件有較多的想法，且會提出解題的想法。學生也對上一節課的例題提出不同的解題策略及方法，並詢問研究者其可行性及正確性（Ob1204）。研究者先將學生的解題方式，書寫於 IWB 的右側後，再將研究者的解題方

式，以不同顏色標示已知條件後，再以文字列式的方式，書寫在 IWB 的左側，讓學生知道證明的方式不只一種。舉例說明如下：

<研究者證法>

已知 如圖， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ 。

求證 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。

(已知)

$$180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - \angle 2$$

$$\therefore \angle DAB = \angle CBA$$

在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCA$ 中

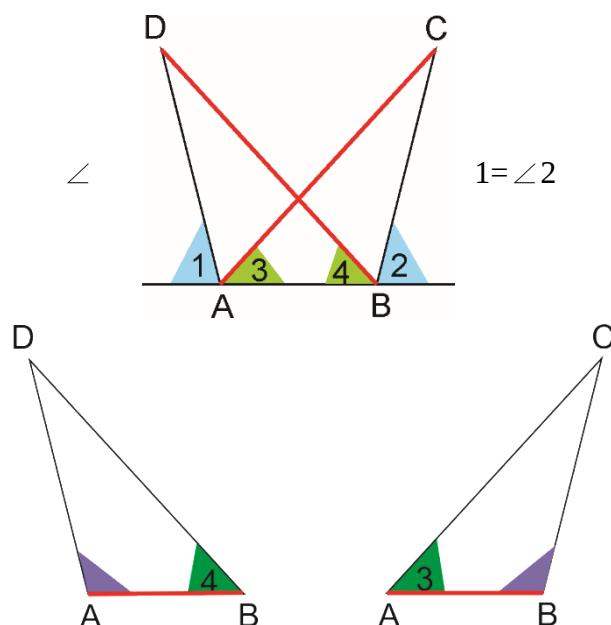
$$\angle DAB = \angle CBA$$

$$\overline{AB} = \overline{AB} \text{ (共用邊)}$$

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ (已知)}$$

$$\triangle ABD \cong \triangle BAC \text{ (ASA)}$$

$$\overline{AC} = \overline{BD} \text{ (對應邊等長)}$$



<學生提出之證法>

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$\angle 1 = \angle 4 + \angle D, \angle 2 = \angle 3 + \angle C$$

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ 故 } \angle D = \angle C$$

在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle BCA$ 中

$$\angle D = \angle C$$

$$\overline{AB} = \overline{AB} \text{ (共用邊)}$$

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ (已知)}$$

$$\triangle ABD \cong \triangle BAC \text{ (AAS)}$$

$$\overline{AC} = \overline{BD} \text{ (對應邊等長)}$$

(二) 課堂觀察

經過前次學生的建議和教學反思，經學習環境做了修正後，在這次的課堂中已沒有學生反映字體太小或太大、反光等問題，標示錯的地方也做了修正，放慢講課的速度以及延長圖形拉開的時間，由於使用 IWB 上課已先將教學內容設計好再依序呈現，也因

此教師省去了許多在黑板上作圖的時間，可有較充裕的時間清楚的看到學生的反應。經過上次兩堂課的教學後，學生對於以 IWB 為教學工具的上課方式，已經比較習慣了，漸漸的會去思考題目，也有較多的想法，並願意提出解題的想法。同時，研究者也發現多數學生會以不同的顏色將已知條件標示出來，完整的將證明過程書寫於筆記上 (Ob1204)，如圖 1。學生的筆記整理如下：

國三數學
幾何證明 8

例題 12

已知：如圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，
 $\overline{BP} = \overline{CQ}$ 。

求證： $\angle DQB = \angle EPC$ ， $\overline{DQ} = \overline{EP}$ 。

$\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$
 $\therefore \angle B = \angle C$

又 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AE}$
 $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{AE} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{CE}$

又 $\overline{BP} = \overline{CQ}$
 $\overline{BP} + \overline{PQ} = \overline{CQ} + \overline{PQ} \Rightarrow \overline{BQ} = \overline{CP}$

在 $\triangle BDQ$ 和 $\triangle CEP$ 中
 $\overline{BD} = \overline{CE}$ ， $\angle B = \angle C$
 $\overline{BQ} = \overline{CP}$
 $\therefore \triangle BDQ \cong \triangle CEP (SAS)$
 $\therefore \angle DQB = \angle EPC$
 $\overline{DQ} = \overline{EP}$

例題 13

已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AM}$ 是底邊 $\overline{BC}$ 的中線，
 且 $\overline{BD} \perp \overline{AM}$ ， $\overline{CE} \perp \overline{AM}$ ， D 、 E 是垂足。

求證： $\overline{BD} = \overline{CE}$ 。

在 $\triangle BDM$ 和 $\triangle CEM$ 中
 $\angle BDM = 90^\circ = \angle CEM$
 $\angle DMB = \angle CME$ (對頂角)
 $\overline{BM} = \overline{CM}$ (M 為 $\overline{BC}$ 中點)
 $\therefore \triangle BDM \cong \triangle CEM (AAS)$
 $\overline{BD} = \overline{CE}$ (對應邊等長)

練習 12

已知： A 、 B 、 D 三點共線， A 、 C 、 E 三點亦共線，
 而且 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BD} = \overline{CE}$ 。

求證： $\overline{DF} = \overline{EF}$

$\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BD} = \overline{CE}$
 $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CE}$
 則 $\overline{AD} = \overline{AE}$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABE$ 中
 $\angle A = \angle A$ (公共角)
 $\overline{AB} = \overline{AC}$ (已知)
 $\overline{AD} = \overline{AE}$
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE (SAS)$
 $\therefore \angle D = \angle E$ (對應角相同)

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CEF$ 中
 $\angle D = \angle E$ (證明得)
 $\angle BFD = \angle CFE$ (對頂角)
 $\overline{BD} = \overline{CE}$ (已知)
 $\therefore \triangle BDF \cong \triangle CEF (AAS)$
 $\overline{DF} = \overline{EF}$ (對應邊等長)

練習 13

已知： $\triangle ABC$ 為正三角形，且 $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ 。

求證： $\triangle DEF$ 為正三角形

$\therefore \triangle ABC$ 為正三角形
 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ ①
 $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ ②

①-②
 $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CF} = \overline{BC} - \overline{BE}$
 $\therefore \overline{BD} = \overline{EC} = \overline{AF}$

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CFE$ 中
 $\overline{BD} = \overline{EC} = \overline{AF}$
 $\overline{BE} = \overline{CF} = \overline{AD}$ (已知)
 $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$
 $\therefore \triangle BDE \cong \triangle ADF \cong \triangle CFE (SAS)$
 故 $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{DF}$
 $\therefore \triangle DEF$ 為正三角形

圖 1 學生上課筆記

(三) 教學反思

利用四節課將 17 題例題講解完，學生對證明已有較完整的概念，雖然部分學生會提出自己的解題策略，但多數學生仍然不會主動提出解題的想法，也較不善表達自己的想法，若學生能說出題目的所以然來，表示學生已理解了，也可從中了解學生的錯誤及迷思概念在哪裡（Rf1204）。期待能找出與學生溝通及提升他們自我思考解題能力的模式。

三、IWB 教學實施後期學生的表現及回應

(一) 後期 IWB 教學實施概況

IWB 教學共實施 8 節課，後期的第 5 節至第 8 節課的主要內容是檢討學生回家功課－練習題，因學生已事先寫完，故學生對題目已有初步的概念及對這些題目的解題策略。檢討題目的順序是老師先將正確解答列出，讓學生自己批改自己的作業，之後再提出不會的題目，再由研究者講解。

(二) 後期課堂觀察與課後訪談

在後面的 4 節課中，發現學生已有自己的想法及解題策略，在檢討過程中，學生對於自己的解題錯誤非常在意，也會詢問研究者，除了研究者所給的答案外是否還有其他的解題方式；有些題型則需要畫輔助線才能進行解題，學生會提出為何不同的輔助線無法得證，研究者也針對學生的問題一一解答，很高興學生能動腦思考題目（Ob1207）。

於第 8 節下課後，立刻對參與的 29 位學生實施認知測驗，並請一位教師於測驗完成後，對學生訪談。請學生對運用 IWB 進行幾何證明教學的感覺及在學習上是否有幫助等提出感想。學生感想及反應整理後分成下列幾點：

- 1.容易反光，看太久眼睛容易酸澀不舒服（InS₂1207）。
- 2.電子白板比黑板來的整齊，但電子白板少了一點老師跟學生同步解題互動的那種感覺（InS₇1207）。
- 3.在圖形上因有顏色標示，較清楚且容易辨認（InS₂₁1207）。
- 4.圖形工整清楚，圖形可以拆解，看得更詳細明瞭（InS₂₃1207）。
- 5.使用白板上課老師節省了繪圖時間，課程進度變快，課程內容變多，可以多學些東西（InS₄1207）。
- 6.老師可以不斷的重複題目、多次重覆拆解，讓我們看得更清楚，不會像黑板一樣，在

同一圖形或線段上重複畫好幾次，愈畫愈亂（InS₆1207）。

7.顏色的劃分會比較清楚，而且圖片比較精美，圖會劃的比較清楚，作答比較容易下手（InS₁₈1207）。

（三）後期教學反思

經過 8 堂課的實施，研究者發現學生已有自己的想法並會主動提出自己的解題策略及步驟，此一進展可能是來自於研究者在課程實施中強調觀察 IWB 中的已知條件與圖形之間的關聯性，並藉由不斷的提問，觸發學生的思考，鼓勵其表達，進而提高學生的學習動機與興趣（Rf1207）。另一個令研究者好奇的是 InS₇1207 提到電子白板少了一點老師跟學生同步解題互動的那種感覺，經過詢問該位學生後，了解這位學生想要表達的是以往使用黑板教學時，老師一邊講解一邊將解題過程寫在黑板上，學生也跟著老師一起計算，學生與老師同步的跟著文字的寫出進入題目的解題過程，但電子白板老師只要一點一下解答就跳出，少了學生與老師同步解題的互動。

四、IWB 教學實施後學生表現與感受

（一）幾何證明認知測驗表現

認知測驗共 15 題，總分為 132 分，測驗結果統計如表 4：

表 4

認知測驗得分統計表

分數	30-39	40-49	80-89	90-99	100-109	110-119	120-129	130-139
人數	1	1	4	4	4	3	7	5
累計	1	2	6	10	14	17	24	29

這 29 學生從國中一年級到國中二年級下學期，在校數學段考成績平均分數，在 70~79 分的有 6 位，80~89 分的有 20 位，90 分以上有 3 位。而從表 4 可知，多數學生在此單元的後測分數表現達 80 分以上，若換算成滿分為 100 分，有 12 位學生達到 122 分以上，相當於 90 分以上。陳創義（2003）的研究指出，只有不到五分之一的國三學生能夠清楚了解有關幾何形狀敘述中的邏輯語詞以及性質的描述；Healy 與 Hoyles（1998, 2000）的研究以九年級成績前 20%~25% 的學生為對象，要求其描述證明的意義，判斷並給出證明，結果也發現在構建證明項目上的平均得分最高不到一半。本研究的結果有將近 80% 的學生分數達 90 分以上，相當於 80 分，顯示運用 IWB 進行幾何證明的教學

方式，對大部分的學生在幾何證明的學習有不錯的表現。

(二) 學生感受

情意量表的第 1 題是對運用 IWB 上幾何課程的感覺，第 2 題是運用 IWB 上幾何課程的幫助程度，第 3 題是對運用 IWB 上課的喜好程度，第 4 題是運用 IWB 拆解圖形的方式對其題目及題型理解的程度。情意量表統計如表 5。

表 5
情意量表的統計表

類別 題號	非常喜歡/ 很有幫助	喜 歡/ 有幫助	尚可	不喜歡/ 沒有幫助	非常不喜歡	平均得分
1	2	21	6	0	0	3.86
2	4	21	4	0	0	4
3	1	16	11	1	0	3.59
4	9	15	5	0	0	4.14

從表 5 來看，第 1 題平均得分為 3.86 分，第 2 題平均得分 4 分，第 3 題平均得分 3.59 分，第 4 題平均得分 4.14 分，四題總平均得分為 15.89 分，接近 16 分，顯示學生偏向喜歡以 IWB 的方式來上幾何證明的課程，同時也認為對其在幾何證明的學習上有所幫助。

從上述的研究結果顯示，在認知測驗方面除了 2 位學生表現較不理想外，其餘學生都有不錯的表現，都能透過圖形的拆解發現相對應關係與相關全等的性質，進而寫出完整的幾何證明過程。在情意方面平均有 77%以上的學生，對運用 IWB 的上課方式持正向的看法。

伍、結論與建議

本研究運用 IWB 呈現圖形拆解法進行幾何證明學習的行動研究，期間歷經學習環境編修及教學反思修正，以下將針對研究目的來說明整個研究的發現：

一、運用 IWB 呈現圖形拆解法進行幾何證明的教學可提高學生在幾何證明

的學習興趣與動機

本研究依據 Duval 認知過程、Van Hiele 的幾何學習設計學習環境並教學，學生從不知如何證明、隨意猜用全等性質、注意力大都焦點在 IWB 上，到能在課中與研究者互動並說出正確的全等性質、討論回家作業並提出自己的解題策略，到後期則能完整的證明過程，都可看出運用 IWB 呈現圖形拆解法的教學方式，可提高學生在幾何證明的學習興趣與動機。

二、運用 IWB 呈現圖形拆解法進行幾何證明的教學，可提升大部分學生在幾何證明的學習成效

Van Hiele (1986)曾提及教師應以適合學生的層次及學習經驗進行教學，才能讓學生融入教師的教學中，得到良好的學習成效。此外，教師在教學過程中，除了將概念傳授給學生外，還要讓學生真正的理解，才能在學習的過程中不斷提升自己的數學能力，並將資訊轉化為知識與能力。IWB 將已知條件塗上顏色、拆解圖形的方式，可提高學生的學習興趣及動機外，更可進一步提升大部分學生幾何證明的學習成效。

根據研究過程及結果提出兩點建議：

- (一) IWB 呈現圖形拆解法在幾何證明單元的學習上，可提高學生的學習興趣及學習成效，但在數學其他單元的學習上是否有相同的成效？未來研究可針對不同的單元測試其學習興趣及學習成效上的效益。
- (二) 建議未來的研究可針對其他應用在數學教學的電腦輔助軟體，如動態幾何、GoeGebra 等軟體在幾何證明的輔助教學上做進一步的研究。

參考文獻

- 左台益、呂鳳琳、曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君（2011）。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明的影響。教育心理學報，43，291-314。doi: 10.6251/BEP.20110517
- 呂鳳琳（2010）。幾何證明不同文本呈現方式對學生認知負荷與閱讀理解影響之研究。（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。
- 洪萬生（2004）。教改爭議聲中，證明所為何事？師大學報，49（1），1-13。doi: 10.6300/JNTNU.2004.49(1).01

- 陳創義 (2003)。青少年的數學概念學習研究—子計畫六：青少年的幾何形狀概念發展研究 (2/2)。行政院國家科學委員會補助專題研究計畫 (編號：NSC-91-2522-S-003-007)。
- 教育部 (2008a)。中小學資訊教育白皮書**2008-2011**。台北市。
- 教育部 (2008b)。國民中小學九年一貫課程綱要。台北市。
- Akturk, A. O., Mihci, S., & Celik, I. (2015). Metaphors of high school students about the concept of “interactive whiteboard”. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 3(2), 120-131. doi: 10.18404/ijemst.01532
- Çakır, A. (2015). Effects of Using Interactive Whiteboards at High School Mathematics Classrooms. *Journal of Education*, 4(1), 17-23.
- Cakiroglu, O. (2015). Teachers' views on the use of interactive whiteboards in secondary schools. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(2), 251-259.
- Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2007). *The effectiveness and limitation of Reading and coloring strategy in learning geometry proof*. ISSN 0771-100X, 113.
- Duroisin, N., Temperman, G., & De Lièvre, B. (2015). Restrict or Share the Use of the Interactive Whiteboard? The Consequences on the Perception, the Learning Processes and the Performance of Students within a Learning Sequence on Dynamic Geometry. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 14(2), 144.
- Duval, R. (1995). Geometrical Picture: Kinds of Representation and Specific Processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with computers in Mathematics Education*, pp. 142-157. Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive of view: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century*. An ICMI Study, pp.37-52.
- Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics, executive summary*. London: Institute of Education, University of London.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428. doi: 10.2307/749651
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

- Nejem, K. M., & Muhanna, W. (2014). The Effect of Using Smart Board on Mathematics Achievement and Retention of Seventh Grade Students. *International Journal of Education*, 6(4), 107-119. doi: 10.5296/ije.v6i4.6753
- Mayer, R. E., & Moreno, R. (2003). Nine ways to reduce cognitive load in multimedia learning. *Educational Psychologist*, 38(1), 43-52. doi: 10.1207/S15326985EP3801_6
- Reiss, K., Hellmich, F., & Reiss, M. (2002). *Reasoning and proof in geometry: Prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students* In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 113-120), Norwich, England.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth E. J. (2009). *Teaching and Learning Proof Across the Grade: a K-16 perspective*. London: Routledge.
- Van Hiele, P. V. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York.