

國立臺灣師範大學機電工程學系

碩士論文

指導教授：陳美勇博士

應用自適應滑動模式實現於  
機械手臂之位置控制器設計

Design of Position Controller for Delta Robot Applying Adaptive

Sliding Mode Control



研究生：蔡岱桓 撰

中 華 民 國 1 0 6 年 7 月

## 摘要

本論文主要研究之目的是設計三相無刷直流馬達的位置控制器，並實現於機械手臂上。在位置控制器設計方面，本論文克服了機械手臂當中的不確定性與外界干擾的問題，並且提出強健且穩定的自適應滑動控制器設計方法。本研究選擇具有良好強健性的滑動模式控制器為主控制器。而在滑動模式控制當中有負責將系統狀態拉至滑動平面的(sign function)  $\text{sgn}(\cdot)$ 。但此函數會造成在滑動平面上  $0^-$ 、 $0^+$  附近變化，隨著滑動增益量造成滑動模式中的跳切現象。因此本研究以飽和函數(saturation function)  $\text{sat}(\cdot)$  替換符號函數，來去除滑動模式的跳切現象。但在系統在穩態時，存在穩態誤差。因此本文研究加入適應控制，對於系統附載進行估測，以消除系統在穩態時出現的穩態誤差。

本研究提出的位置控制器，可以有效率的使我們所控制的三相無刷直流馬達追上我們的目標位置。並實際解決傳統滑動控制當中的跳切現象，與系統在穩態時的穩態誤差，使目標位置與馬達位之誤差值趨近於零。在控制器設計當中，本文以 Lyapunov 函數證明系統穩定性。在馬達位置控制精確的情況下，本文結合機械手臂之正逆向運動學，以機械手臂目標位置推算馬達必須實際轉動之角度，使目標移動更加精確，並驗證控制器性能。

最後本實驗以 C# 程式語言，建立三相無刷直流馬達與電腦之間的溝通。並設計控制機械手臂之 UI 介面，並實際運作在 Windows10 作業系統中。介面內容包含馬達相對與絕對位置控制、馬達轉速設定、馬達與電腦通訊方法。調整機械手臂當中三顆馬達同時做動狀態，使機械手臂完成目標命令。

**關鍵字：**三相無刷直流馬達、機械手臂、自適應滑動控制。

## Abstract

In this study, we design an adaptive sliding mode position controller, which is applying on the three-phase DC brushless motor and using in the Delta robot arms. We remove the uncertainty and the external disturbances of a robot arm in the controller design, and proposed robust and the stability adaptive sliding mode (ASMC) control method. In this study, we choose sliding mode control (SMC) as our major controller, which has good robust appearance. There is an (sign function)  $\text{sgn}(\cdot)$  in the sliding mode control, it is using to let the system status get on the sliding surface. But the function would let the changing between the  $0^-$  and  $0^+$  on the sliding surface. And there would have some chattering, because the changing sliding gain. So in our study, we change the function into (saturation function)  $\text{sat}(\cdot)$  to remove the chattering in the sliding mode. But there are still have some steady state error, so we used the adaptive control to estimate the system's load torque to remove the steady state error.

The position control we proposed can made the three-phase DC brushless motor get on our target position. The error between the target position and the motor's position is near to zero, because we remove the chattering and the steady state error. We use the Lyapunove function to prove our controller design in the system was stability. In the study, we us the positive inverse kinematics to calculate the motor moving angle in the robot arm.

In the experiment result, communicate between the three-phase DC brushless motor and the computer is set up by the C# language. We design an UI interface working in the windows 10 system to control the robot arm. There are the relatively, absolute positon control, motor's speed setting and the communication method in the UI interface. Let the robot arm move to our target position.

Keywords: Three-phase DC brushless motor, robot arm, adaptive sliding mode control.

## 誌謝

「一個階段的結束，代表著另一個階段的開始」，經過兩年時間的訓練與學習，過程當中充滿了各種酸甜苦辣，如今碩士論文也即將進入尾聲。在這最後即將完成的階段，算是給自己、家人一個交代，同時也是一項自我肯定的證明。這段時間不僅在專業知識上有嶄新的學習，同時更提升了自己的領導能力、表達能力與解決問題的能力，並且學會以嚴謹的態度面對學習與挑戰。

在碩士學習過的階段中，首先要感謝我的指導教授陳美勇博士，在我實驗研究的過程，給予我許多豐富的實驗資源、寶貴的建議與指導。並教導我如何善用自己的時間，能夠在有限的時間內，同時完成多項任務。當然也要感謝我的口試委員蘇順豐博士、練光祐博士以及黃安橋博士，針對論文當中描述不足的地方給予指導，使得本論文可以有更好的完整性，將論文在提升一個層次。

在實驗室學習當中，首先要感謝博士班學長鍾秉剛，在我修課與實驗過程給予我許多指導與經驗分享。同時感謝碩士班學長維斌、敬棋與同學廷恩，這段時間彼此加油打氣，也藉著課業上的討論激發出我許多新的靈感。最後感謝學弟梓瑄、庭綱幫忙處理許多實驗室的工作。

最重要的是，我要感謝我的父母親在這二十幾年來對我的栽培與教養，在我人生各樣階段都給予我許多、鼓勵與付出。父母為我的付出，我深深地放在心中，若沒有家人的支持，我也不會有今天的突破與成就，我愛你們。最後，我的信仰也在這段時間，給予了我許多的幫助，謝謝為我禱告的朋友們，謝謝上帝！

蔡岱桓 謹誌

民國一零六年七月

精密運動實驗室

# 目錄

摘要.....	i
Abstract .....	ii
致謝.....	iii
目錄.....	iv
圖目錄.....	vii
表目錄.....	xi
<b>第一章 緒論</b> .....	<b>1</b>
1.1 前言.....	1
1.2 文獻回顧.....	3
1.2.1 機械運動學研究之回顧.....	3
1.2.2 控制器設計之回顧.....	4
1.3 研究動機與目的.....	11
1.4 本論文之貢獻.....	12
1.5 本論文之架構.....	13
<b>第二章 理論基礎</b> .....	<b>16</b>
2.1 無刷馬達簡介.....	14
2.1.1 無刷馬達之種類與變化.....	15

2.1.2	無刷與有刷直流馬達比較.....	16
2.1.3	三相無刷直流馬達數學模型.....	17
2.2	Delta 機械手臂運動學.....	20
2.2.1	Delta 機械手臂參數設定.....	21
2.2.2	Delta 機械手臂逆向運動學.....	23
2.3	Lyapunov 理論.....	30
2.3.1	Lyapunov 穩定性理論.....	30
2.3.2	Barbalat 引理.....	31
2.4	滑動模式控制.....	32
2.5	適應性控制.....	36
<b>第三章</b>	<b>控制器設計.....</b>	<b>38</b>
3.1	滑動模式控制.....	38
3.1.1	滑動模式控制 Lyapunov 穩定度分析.....	41
3.2	適應性控制.....	43
3.2.1	滑動適應性控制.....	44
3.2.1	滑動適應性控制 Lyapunov 穩定度分析.....	45
<b>第四章</b>	<b>實驗設備.....</b>	<b>48</b>
4.1	Delta 機械手臂控制系統.....	49
4.2	Maxon EC 45 Ø45 mm 三相無刷直流馬達.....	50

4.3 Maxon GP 52 C Ø52 mm 行星減速機.....	52
4.4 Maxon EPOS2 50/5 馬達驅動器.....	54
4.5 Twintex TP-2305 電源共應器.....	56
<b>第五章 實驗結果與討論.....</b>	<b>57</b>
5.1 控制器追跡響應.....	58
<b>第六章 結論及未來展望.....</b>	<b>62</b>
<b>參考文獻.....</b>	<b>64</b>



## 圖目錄

圖1-1	準確性與精確性示意圖.....	2
圖1-2	Delta 機械手臂設備圖.....	3
圖1-3	Delta 機械手臂運動學參數.....	3
圖1-4	系統時間響應.....	4
圖1-5	附載估測量.....	6
圖1-6	馬達轉速.....	6
圖1-7	馬達轉矩.....	6
圖1-8	馬達輸出電流.....	6
圖1-9	目標與馬達位置訊號.....	7
圖1-10	馬達位置誤差.....	7
圖1-11	滑動增益.....	7
圖1-12	滑動平面.....	7
圖1-13	馬達位置模擬.....	8
圖1-14	馬達位置實驗.....	8
圖1-15	馬達誤差模擬.....	9
圖1-16	馬達誤差實驗.....	9
圖1-17	馬達轉矩與轉矩估測量模擬.....	9
圖1-18	馬達轉矩與轉矩估測量實驗.....	9

圖1-19	滑動增益模擬.....	10
圖1-20	滑動增益實驗.....	10
圖1-21	滑動平面模擬.....	10
圖1-22	滑動平面實驗.....	10
圖2-1	無刷直流馬達架構圖.....	14
圖2-2	無刷馬達實體圖.....	14
圖2-3	馬達分類.....	15
圖2-4	無刷直流馬達架構.....	15
圖2-5	三相繞組 Y 型結構.....	15
圖2-6	馬達內部 Y 型結構圖.....	17
圖2-7	三相無刷馬達等效電路圖.....	17
圖2-8	旋轉式馬達 Delta 機器人.....	20
圖2-9	線性式馬達 Delta 機器人.....	20
圖2-10	定義 Delta 機器人參數圖.....	21
圖2-11	Delta 機械手臂俯視圖.....	22
圖2-12	Delta 機械手臂側視圖.....	23
圖2-13	Delta 機械手臂觀測圖.....	24
圖2-14	系統狀態隨時間收斂至滑動平面在到達平衡點.....	34
圖2-15	符號函數示意圖.....	34

圖2-16 飽和函數示意圖.....	34
圖2-17 自我調變控制器示意圖.....	36
圖2-18 參考模型控制器示意圖.....	37
圖3-1 三相無刷直流馬達系統架構圖.....	38
圖4-1 Delta 機械手臂之硬體結構.....	48
圖4-2 Delta 機械手臂控制系統.....	49
圖4-3 三相無刷直流馬達安裝於 Delta 機械手臂之結構圖.....	50
圖4-4 馬達外觀圖.....	50
圖4-5 馬達規格圖.....	50
圖4-6 三相無刷直流馬達連接減速機實體圖.....	52
圖4-7 減速機外觀圖.....	52
圖4-8 減速機規格圖.....	52
圖4-9 馬達驅動器實體圖.....	54
圖4-10 馬達驅動器裸視圖.....	54
圖4-11 多層次傳輸控制.....	54
圖4-12 數位定位控制器功能與接線圖.....	55
圖4-13 Twintex TP-2350 電源共應器.....	56
圖5-1 Visual Studio 2015 軟體.....	57
圖5-2 MATLAB-R2010a 軟體.....	57

圖5-3	滑動模式控制器使用 $\text{sgn}()$ 函數追跡響應.....	58
圖5-4	滑動模式控制器使用 $\text{sat}()$ 函數追跡響應.....	58
圖5-5	滑動適應性控制器追跡響應.....	58
圖5-6	滑動模式控制器使用 $\text{sgn}()$ 函數之控制量.....	59
圖5-7	滑動模式控制器使用 $\text{sat}()$ 函數之控制量.....	59
圖5-8	滑動適應性控制器之控制量.....	59
圖5-9	滑動模式控制器使用 $\text{sgn}()$ 函數之誤差.....	60
圖5-10	滑動模式控制器使用 $\text{sat}()$ 函數之誤差.....	60
圖5-11	滑動適應性控制器之誤差.....	60
圖5-12	滑動模式控制器使用 $\text{sgn}()$ 函數之滑動平面.....	61
圖5-13	滑動模式控制器使用 $\text{sat}()$ 函數之滑動平面.....	61
圖5-14	滑動適應性控制器之滑動平面.....	61
圖5-15	Delta 機械手臂系統 UI 控制介面.....	62
圖5-16	通訊方式選擇.....	62
圖5-17	馬達角度輸出.....	62
圖5-18	機械手臂第一軸馬達滑動適應性控制追跡響應.....	63
圖5-19	機械手臂第二軸馬達滑動適應性控制追跡響應.....	63
圖5-20	機械手臂第三軸馬達滑動適應性控制追跡響應.....	63
圖5-21	機械手臂第一軸馬達控制圓軌跡追蹤馬達控制量.....	64

圖5-22 機械手臂第二軸馬達控制圓軌跡追蹤馬達控制量.....64

圖5-23 機械手臂第三軸馬達控制圓軌跡追蹤馬達控制量.....64

圖5-24 Delta 手臂圓路徑命令.....65

圖5-25 Delta 手臂圓路徑實驗.....65



## 表目錄

表2-1	無刷直流馬達與有刷直流馬達比較表.....	16
表2-2	Maxon Motor EC 45 Ø45 mm 136198 三相無刷直流馬達規格介...	51
表2-3	Maxon GP 52 C Ø52 mm 223101 行星減速機規格介紹.....	53
表2-4	Twintex TP-2305 電源共應器規格.....	56



# 第一章 緒論

## 1.1 前言

隨著現代科技的進步，自動化產業的提升與普及化，使得機器人應用與需求涵蓋範圍更加廣泛。機器人從早期運用於傳統工業，執行重複制式化工作，發展至今衍生至電子業、半導體業、金屬業、醫療業、軍事等領域。而在第四次工業革命(工業 4.0)中，機器人更是扮演不可或缺的角色，工作內容包含產線運作、協調、製成等。機器人再根據是否具備移動能力可分為移動型與固定型機器人。移動型機器人由於具備高靈活性，因此常運用於探索和服務領域，而固定型機器人由於擁有固定式基底與穩定的電源供應等特性，因此常使用於生產線上。機械手臂的加入不僅能夠減少成本，增加工作時間提升產業生產量。更能夠在高精度、高可靠性感知、路徑規劃和控制性，取代人類的不足。

在產線的運作過程中，機械手臂須達到高精度的特性，因此機械手臂當中馬達的控制與馬達特性更加格外的重要。本研究運用三相無刷直流馬達作為機械手臂之控制馬達，並實現位置控制器設計於三相無刷直流馬達。而在馬達特性當中，無刷直流馬達相比傳統有刷馬達，少了電刷與軸的摩擦，具有高使用壽命、較安靜等優勢。因為少了電刷於軸的摩擦，無刷直流馬達可高速運轉且大幅降低維修機率。在自動化系統當中，無刷馬達已經逐漸取代直流馬達。就穩定性、控制性而已，無刷直流馬達是一個非常良好的驅動裝置，適合運用在各種機械結構當中。

在控制理論當中，不論是行程定位之控制或是動態軌跡追蹤的控制，都和控制的精確度和優劣息息相關。而在控制器的優劣當中，可以分為兩大類，分別為準確性(Accuracy)和精確性(Precision)。準確性為實際測量平均值和目標值一致的程度，若誤差值極小，即為準確性佳。反之若誤差值極大，則表示為準確性差。而精確性的定義則為以相同的量測過程當中，重複性的測量一樣待測物，而在每次的測量過程當中，測量值會分佈於目標值的附近。而以此分佈值擴散的程度定

義為精確程度。若每次擴散值分佈程度小，則定義為精確性佳，反之若擴散值分佈程度大，則為精確性差。即受控體在每次的測量當中，是否每次都能經去的達到目標值。整合上述之兩大性質，若我們能夠將受控體達成準確性佳與精確性佳之兩大特性，我們即為提出一項高精度之優良控制系統。

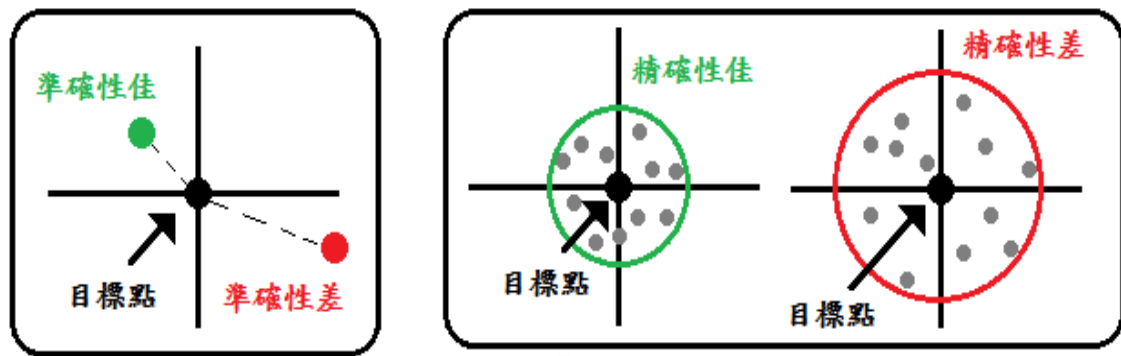


圖 1-1 準確性與精確性示意圖

在本研究當中，Delta 機械手臂控制之動態效能是必須受到關注的，在控制精準度高、系統之響應速度快、抗干擾能力強等性質，皆為 Delta 機械手臂運作需要具備之條件。在馬達驅動部分，可分為線性馬達與旋轉馬達。線性馬達具有直接驅動之優勢，可以直接解決在機械手臂機構設計當中的外界干擾因素，例如：背隙、齒隙、滑動或磨耗等干擾。但線性馬達通常在成本上，遠高於旋轉馬達之成本。而當我們使用旋轉式馬達作為驅動結構時，通常需要在機構設計當中外加齒輪、旋轉軸、連軸器等機械耦合傳輸軸承來傳遞馬達的動能。這樣的設計會造成多餘的系統耦合等干擾來源，但旋轉馬達之成本相較於線性馬達擁有更多的優勢。因此本研究在控制器設計當中來解決這些旋轉馬達之外界干擾因素，並降低機械手臂之生產成本。

機器人機械手臂結構及組成方式中，可分為串聯式機械手臂和並聯式機械手臂。而傳統機械手臂設計大多數為串聯式機械手臂，其設計較容易並且可藉由連桿增加工作範圍，但卻容易在連桿之間造成累積誤差。而並聯式機械手臂則為多個連桿共同連接於移動平台，其優點為剛性強、承受力佳、且連桿之間之累計誤差。本研究提出最佳化馬達控制，並實現於並聯式 Delta 機械手臂。

## 1.2 文獻回顧

關於 Delta 機械手臂領域，可分為結構、運動學、控制等領域。而大部分的論文主要爭對單一主題進行較深入的研究。因此本研究圍繞這些主題，針對不同領域主題進行深入研究與統整，並依序介紹相關研究之論文。

### 1.2.1 機械運動學研究之回顧

運動學在機械手臂當中是屬於非常重要的演算法，機械手臂可以藉由運動學來調整手臂的運動姿勢，得到各樣關節與空間中的位置與參數。在運動學當中可以分文正向運動學與逆向運動學。其中正向運動學是運用機械手臂中，每個馬達轉動之角度推算機械手臂之末端點位置。而逆向運動學則相反，運用機械手臂移動之末端點位置，得到手臂各個馬達關節之轉動角度。在機械手臂實際運作之狀況下，逆向運動學被大量使用，藉由逆向運動學使機械手臂末端點到達實際末端位置，而正向運動學多屬於驗證機械手臂之逆向運動學與目標位置是否準確。

Xuwen Yang, Zuren Feng, Chenyu Liu and Xiadong Ren 等學者 [1]，在 Delta 機械手臂正逆訓運動學推倒當中，運用了幾何的方式推導出 Delta 機械手臂之正逆向運動學。此方法不僅使運動學得到解析解之解答，也使的運動運算式更好運算。其中逆向運動學(Invers Kinematics)表示為

$$\theta_i = \cos^{-1}\left(\frac{|A_i B|^2 + L^2 - \hat{l}_i^2}{2L|A_i B|}\right) + \tan^{-1}(|C_i B|/z_b), i = 1, 2, 3 \quad (1-1)$$

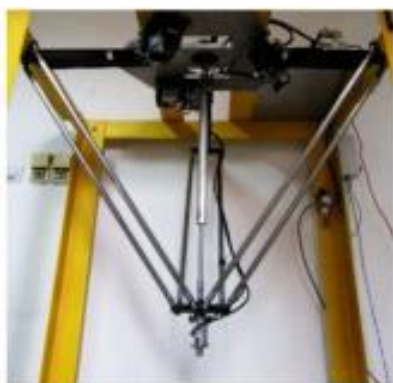


圖 1-2 Delta 機械手臂設備圖

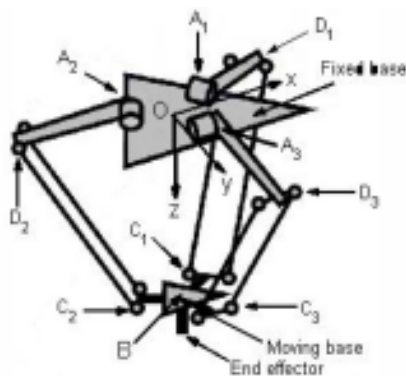


圖 1-3 Delta 機械手臂運動學參數

## 1.2.2 控制器設計之回顧

控制方法可以實際使用於馬達、機械手臂等受控體。因此在控制器設計當中，控制方法屬於非常重要的環節。好的控制器設計具備高準確性、高精確性、高強健性的特質。

Atushi Ishigame, Tadashi Furukawa, Shunji Kawamoto, and Tsuneo Taniguchi 等學者[2]提出一種滑動控制器(Sliding Mode Controller, SMC)設計的方法，並運用模糊理論，將滑動控制器模糊化。此方法可以實現於非線性系統當中，也因為滑動控制器的使用，使的整體控制系統屬於強健。而在滑動控制器使用當中，系統穩態時會造成震盪的現象。因此此篇論文將滑動控制器模糊化，已模糊方法解決滑動控制造成的震盪現象。

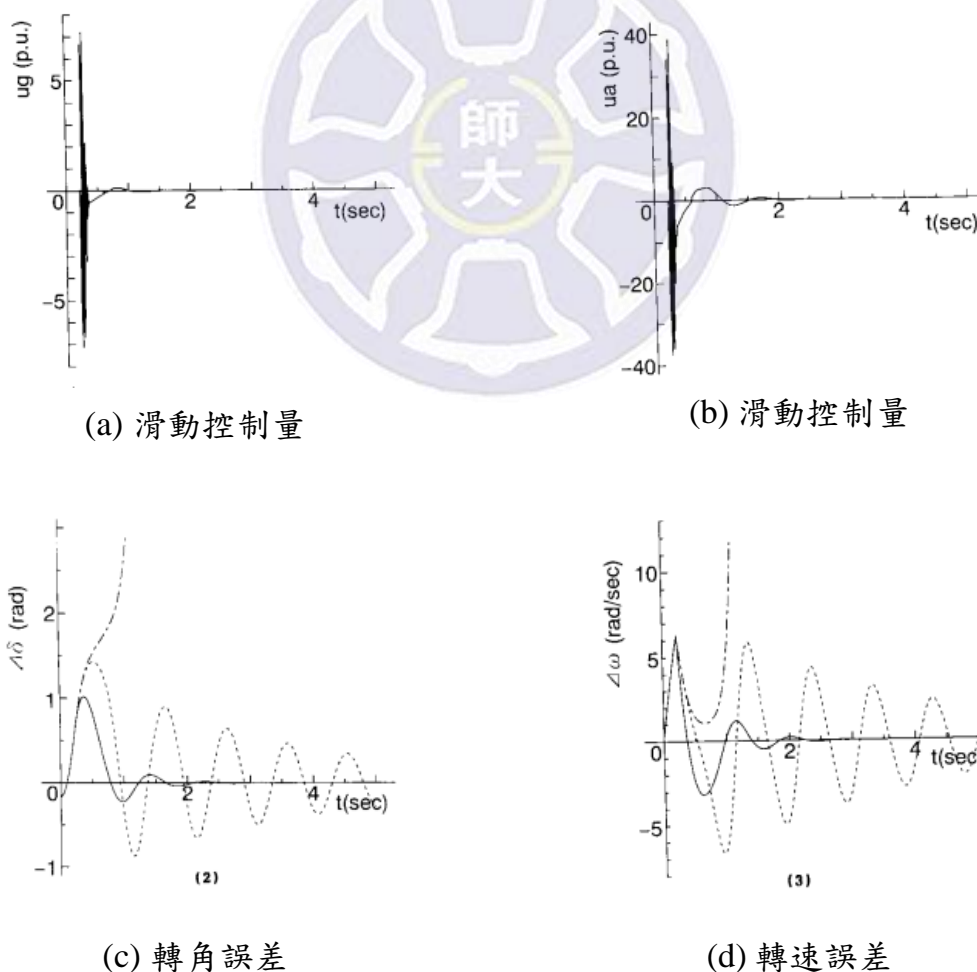


圖 1-4 系統時間響應

Oscar Barambones, Patix Alkorta, Jose Maria Gonzalez de Durana, and Enrique Kremers[3] 等學者提出一項強健的控制器設計方法，並運用於感應馬達。其控制器設計方法運用了滑動控制、適應控制(Adaptive Control, AC)、與估測器等方法，整合成一個強健的控制器。由於馬達使用上，通常會帶動附載。而在未知附載的情況下，通常需要一個附載感測器來估測附載量，並給予馬達相對的補償量，達到系統的穩定。此方法能在不同時間下估測出不同的附載量，並且在實際硬體結構上，可以省去附載估測器的安裝，大大降低硬體成本。其估測器設計方法是使用狀態回授估測之方法。先定義角加速度  $\dot{\omega}_m$  為

$$\dot{\omega}_m = -\frac{B}{J}\omega_m + \frac{K_T}{J}i_{qs}^e - \frac{1}{J}T_L \quad (1-2)$$

並定義矩陣參數為

$$z = [\omega_m \quad T_L]^T \quad (1-3)$$

$$A_z = \begin{bmatrix} -B/J & -1/J \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

$$B_z = \begin{bmatrix} K_T \\ J \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

$$C_z = [1 \quad 0] \quad (1-6)$$

因此可以將方程式與系統角速度輸出，重新以矩陣行式定義為

$$\dot{\hat{z}} = A_z z + B_z i_{qs}^e \quad (1-7)$$

$$y = \omega_m = C_z z \quad (1-8)$$

最後運用狀態回授方法，得到附載轉矩的估測量之方程式為

$$\dot{\hat{z}} = A_z \hat{z} + B_z i_{qs}^e + H(y - \hat{y}) \quad (1-9)$$

$$= (A_z - HC_z) \hat{z} + B_z i_{qs}^e + Hy \quad (1-11)$$

在實驗模擬當中，作者分別在 1.5 秒與 2.5 秒時加入了 250 *N.m* 和 350 *N.m* 的附載，藉此測試附載估測器是否能準確的估測出系統附載。由圖 1-5 可得知分別在 1.5 秒與 2.5 秒時，附載估測器準確的估測出改變的兩不同附載，因此馬達轉速也分別在兩時段有些微的震盪，以穩定系統如圖 1-6 所示。馬達轉矩也分別於兩時段，藉由估測器補償，達到 250 *N.m* 和 350 *N.m* 的轉矩量如圖 1-7 所示。

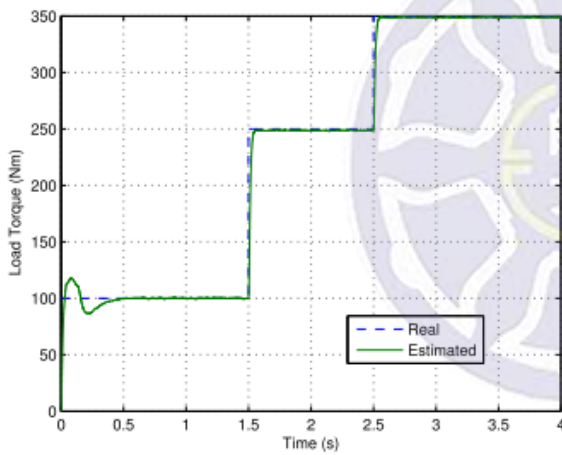


圖 1-5 附載估測量

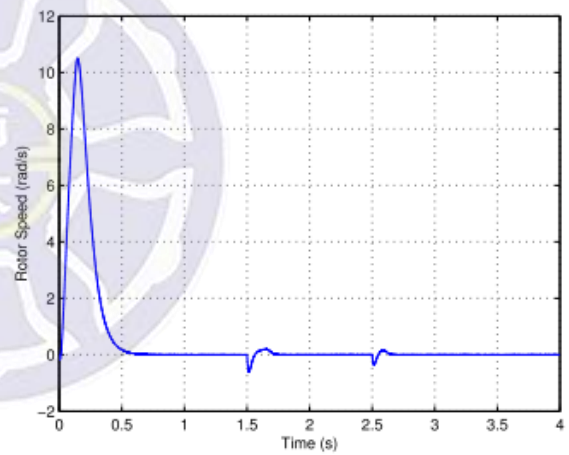


圖 1-6 馬達轉速

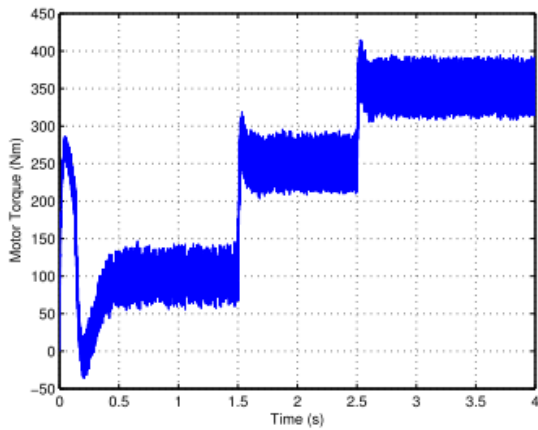


圖 1-7 馬達轉矩

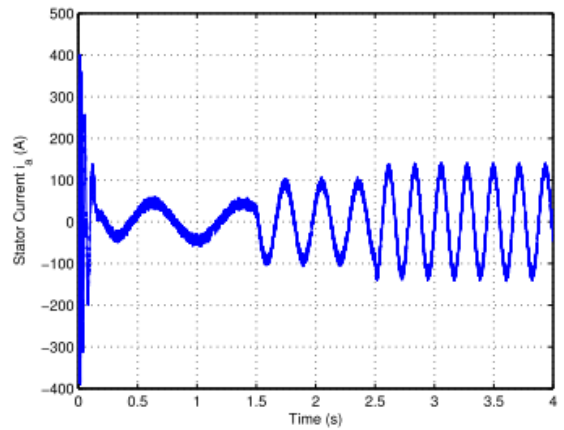


圖 1-8 馬達輸出電流

作者所設計的控制器，是以滑動模式控制作為基底。並且在控制器當中加入了適應控制，使控制器能夠呈現更好的響應結果。滑動控制具有良好的強健性的特性，適應控制則能夠面對系統的參數，具有大的不確定性。因此作者整合兩控制器的優點。作者在文章中，運用適應控制的方法，來估測滑動模式控制的滑動增益，使滑動增益能面對不同外界干擾，進行調整。由實驗結果我們可以看到，此方法位置控制器設計可以穩定的追上目標如圖 1-9 所示。馬達位置誤差量也持續維持在接近 0 的位置，而在 0 秒 1.5 秒與 3 秒附近的變化是因為給予馬達附載的改變，但由圖 1-10 可以看出誤差快速的回到 0。由圖 1-11 可以看出滑動增益因適應控制隨時間改變，系統也維持在滑動平面上如圖 1-12 所示。

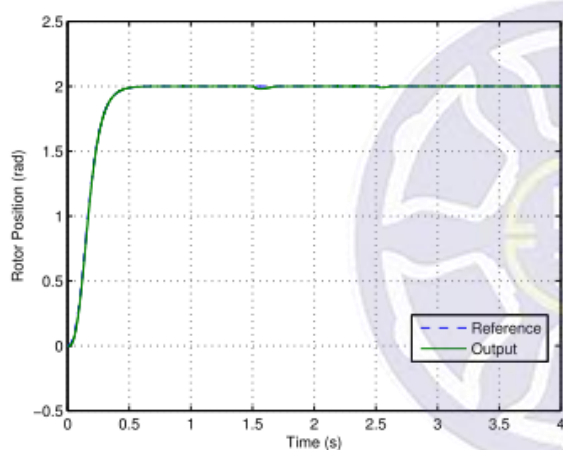


圖 1-9 目標與馬達位置訊號

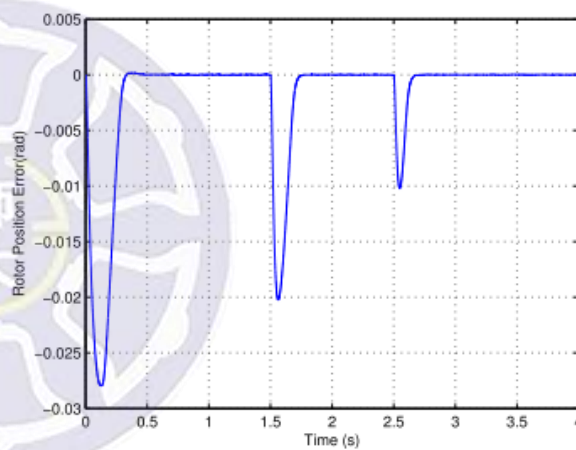


圖 1-10 馬達位置誤差

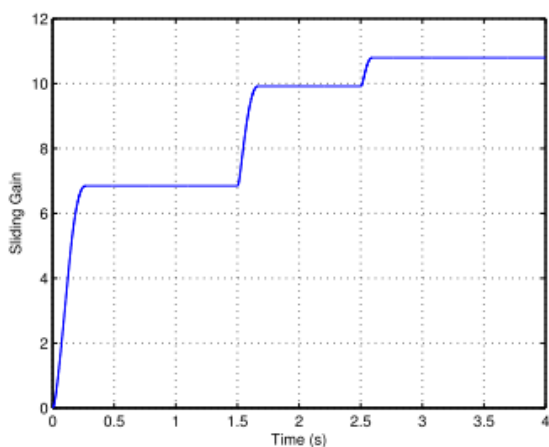


圖 1-11 滑動增益

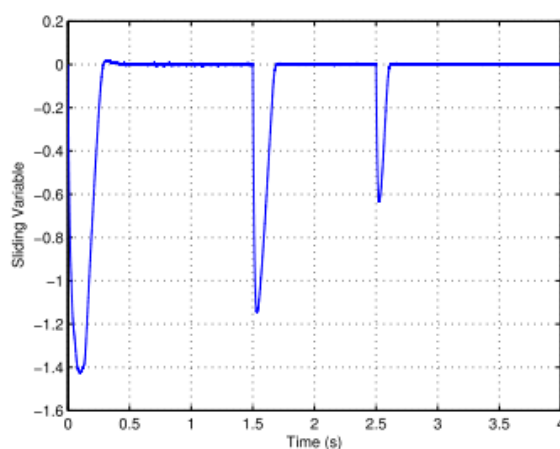


圖 1-12 滑動平面

Oscar Barambones, and Patxi Alkorta[4]等學者提出適應滑動控制(Adaptive Sliding Mode Control, ASMC)與估測器方法，運用於感應馬達。作者分別對於轉子磁通量與附載轉矩進行估測，包括電流與電壓的估測。藉由估測出轉子磁通量與附載，使系統更加穩定。作者運用同時結合滑動控制和適應控制，結合兩控制方法之優點。其中在滑動控制需要藉由符號函數使系統停留在滑動平面附近，但符號函數時常造成系統在穩態時的跳切現象。因此作者使用飽和函數來替換符號函數，以解決系統在穩態時造成的震盪。其實驗結果可分為模擬與實驗兩部分，由圖 1-13 與圖 1-14 可看到分控制器分別對於模擬與實驗都有良好的響應。其中在 1 秒與 2 秒的跳切現象，是因為作者在這兩時段加入附載干擾造成。

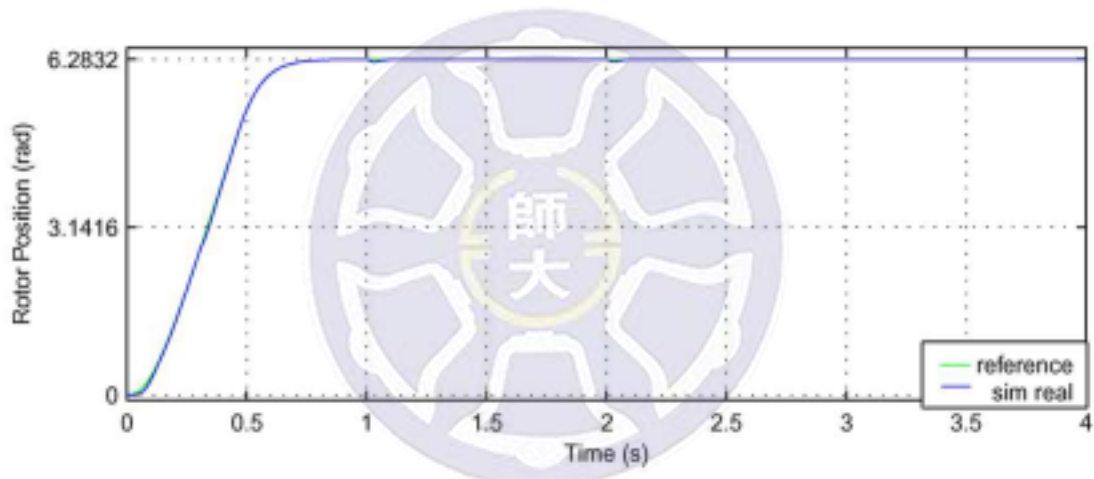


圖 1-13 馬達位置模擬

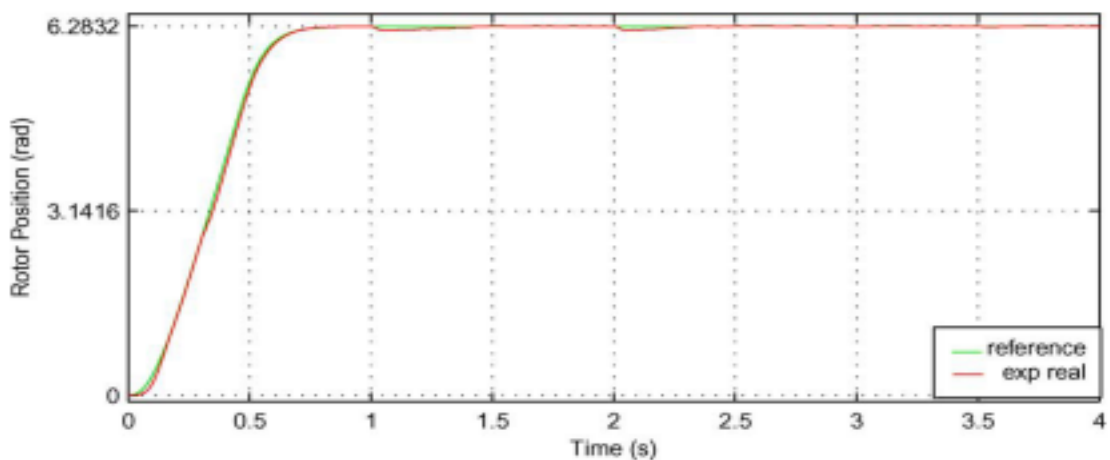


圖 1-14 馬達位置實驗

圖 1-15 和圖 1-16 分別為馬達與目標位置之誤差的實驗與模擬結果。由圖 0~0.5 秒位置可看出震盪現象，是因為系統還沒追上目標造成。而在穩太後 1 秒與 2 秒附近的震盪是因為實驗中附載改變造成。

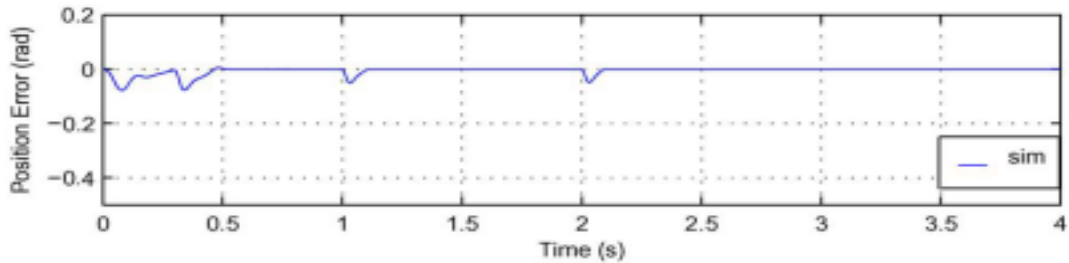


圖 1-15 馬達誤差模擬

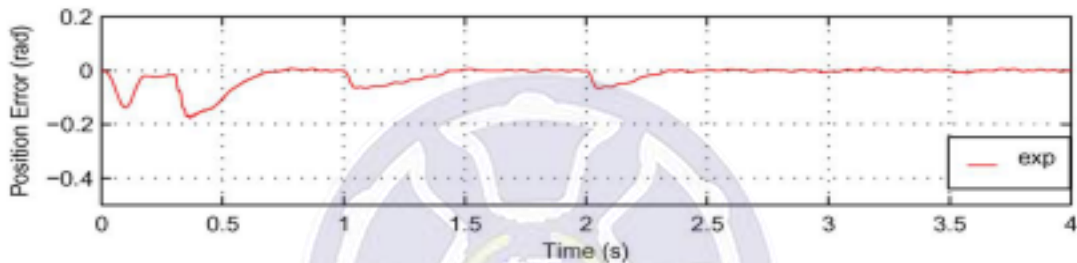


圖 1-16 馬達誤差實驗

圖 1-17 與圖 1-18 為馬達實際轉矩與轉矩估測量之模擬與實驗，由兩圖可得知，在附載改變的情況下，馬達可藉由估測出的轉矩量給予相對補償量。

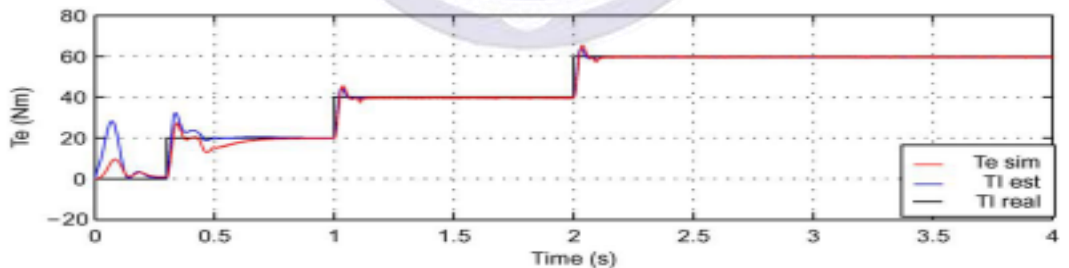


圖 1-17 馬達轉矩與轉矩估測量模擬

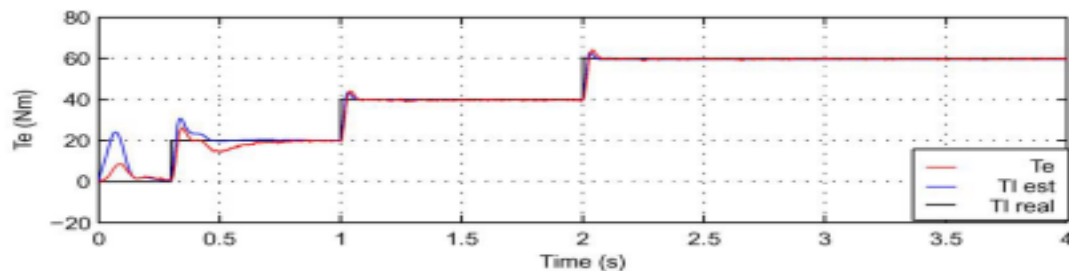


圖 1-18 馬達轉矩與轉矩估測量實驗

作者在文中將適應控制運用於滑動增益的估測，由模擬與實驗可看出滑動增益隨著系統不同的附載進行改變，如圖 1-19 與圖 1-20 所示。而滑動增益不只在 1 秒與 2 秒附載改變情況下調整，在 0~0.5 秒之間系統追上目標過程也同樣調整。

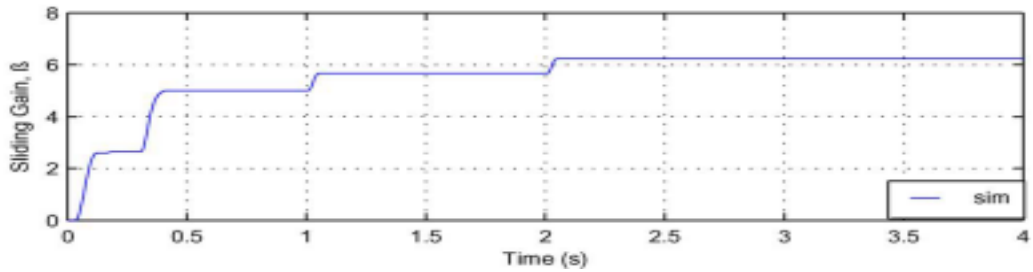


圖 1-19 滑動增益模擬

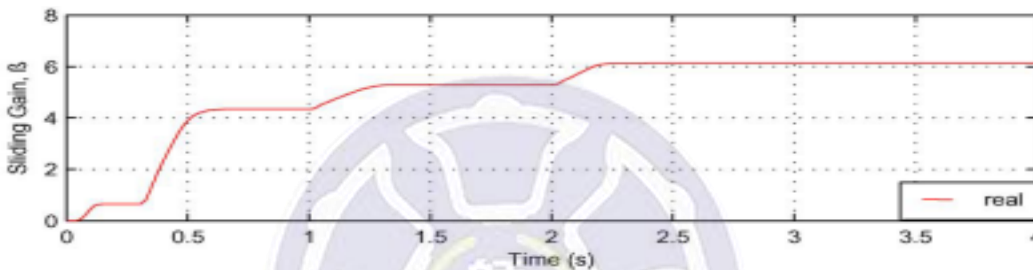


圖 1-20 滑動增益實驗

最後由模擬與實驗可看出，此控制器系統有非常好的響應。在不同附載下，系統皆可收斂致滑動平面，由圖 1-21 與 1-22 所示。

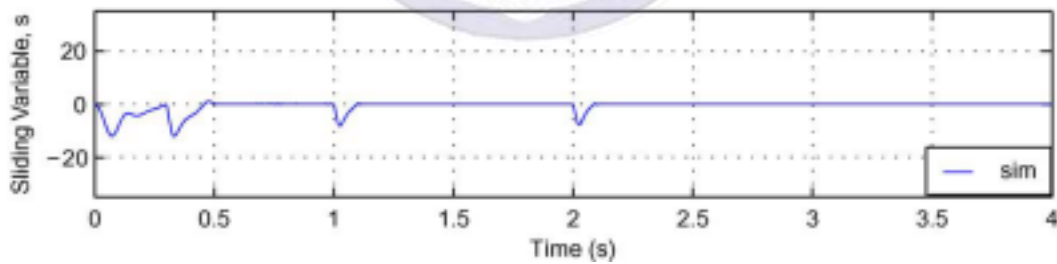


圖 1-21 滑動平面模擬

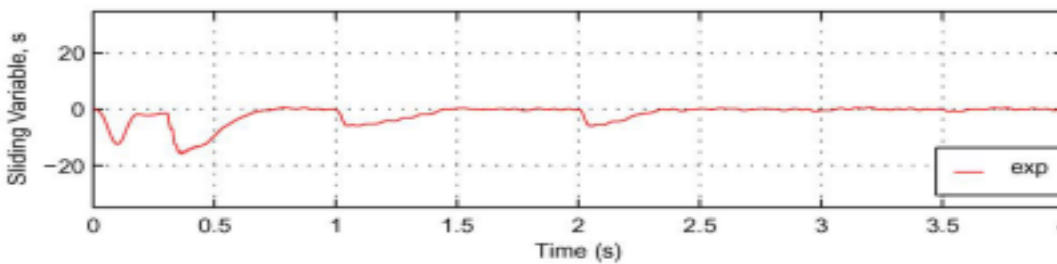


圖 1-22 滑動平面實驗

### 1.3 研究動機與目的

隨著時代與科技的進步，自動化產業的興起，機械手臂的運用變得更加廣泛與普及化。因此機械手臂的穩定性、精準性、準確性、耐用性與硬體架構強健性變得更加重要。因此本研究針對這些特性進行研究，使手臂能達成上述等特性。

目前機械手臂包含串聯式機械手臂與並聯式機械手臂，串聯式機械手臂擁有較大與靈活的移動範圍，但機械結構較為複雜。而其運作方式是藉由各關節桿件相連，與馬達轉動來對於手臂的空間位置與姿態進行調整。由於串聯式機械手臂由各關節和連桿相接，因此時常造成誤差的累積，機構穩定特性也叫並聯式手臂差。並聯式機械手臂則透過各關節的平移、旋轉，迴轉等特性來移動致空間各個位置。並聯式機械手臂在機械結構設計上，不僅較串聯式手臂單純，在硬體結構堅固性也勝於串聯式機械手臂。因此本篇研究針對 Delta 串聯式機械手臂為基礎，進行研究與發展。

在機械手臂精準性與準確性等特性中，馬達控制顯得格外重要。因此本篇文章針對馬達位置控制器進行設計與深入探討，使的馬達能夠達成良好的位置控制響應。好的控制器設計不僅對於馬達轉動精準度有良好響應。在硬體結構上，許多加裝的感測器，也能夠藉由控制器設計當中的估測器設計、控制方法來得到感測器所需之參數。因此好的控制器設計也能夠取代硬體結構上，許多感測元件，節省許多硬體成本。在馬達選擇上，我們也選用無刷馬達進行研究。因為無刷馬達少了電刷與軸的摩擦，使得馬達有更高的使用壽命和較安靜等特點。

而在機械手臂在空間中動態追跡、定位、移動等功能上，機械手臂的路徑規劃為重要的角色。而在機械手臂路徑規劃當中，包括機械手臂的運動學推導，來使機械手臂能夠移動至目標位置。在運動學推導當中，包含正向運動學與逆向運動學，其中機械手臂最常使用逆向運動學。藉由此運動演算法，得到機械手臂馬達轉動方法與角度。最後經由路徑規劃，使手臂移動軌跡更加平滑順暢。因此本研究針對上述機械手臂穩定性、精準性、準確性耐用性等特性進行研究。

## 1.4 本論文之貢獻

本論文內容主要可以分為三大架構，分別為馬達控制器設計、機械手臂定位運動學推導、機械手臂路徑規劃等三大方向。在控制器設計當中，本文設計自適應滑動模式控制器。本文控制器針對馬達機械附載，系統外界干擾等相關因素進行研究和排除。針對馬達附載，本文藉由適應控制估測出附載量，並同時借用滑動控制排除外界其他干擾，使系統能夠穩定收斂。在機械手臂定位中，本文驗證 Delta 機械手臂之正逆向運動學，使手臂能夠準確定位於目標位置。在逆向運動學當中，本文採用兩種方法推導出運動演算法。分別使用單純數學運算方法，與空間中幾何方法來求得 Delta 機械手臂之逆向運動學。藉由逆向運動學，可以從空間中座標得到 Delta 機械手臂馬達轉動之角度。同時採用正向運動學，驗證空間座標的準確性。最後建置 Delta 機械手臂移動路徑，使 Delta 手臂能夠藉由定位、移動、軌跡追蹤等方法進行路徑移動。結合上述等方法建置出一台具有良好控制性與強健性之 Delta 機械手臂。

**本研究可分為以下五項貢獻，減述如下：**

1. 分析三相無刷直流馬達之內部構造，推倒三相無刷直流馬達電器方程式與機械動態方程式。
2. 分析三相無刷直流馬達，並針對三相無刷直流馬達進行自適應滑動控制器設計，排除馬達附載與外界干擾。
3. 推導 Delta 機械手臂正逆向運動學，藉由運動學使 Delta 機械手臂能夠精準在空間中定位。
4. 以 Visual Studio C#設計 Delta 機械手臂系統之 UI 介面，包含空間位置控制，馬達控制移動功能。
5. 整理並驗證其定位效能與結果，運用定位方法件致動態軌跡路徑。

## 1.5 本論文之架構

本論文區分為六個章節，各章節之標題及內容說明如下：

### [第一章]: 緒論

說明研究背景與目標，並藉由參考文獻回顧，得知在過去相關領域研究中，Delta 機械手臂運動演算法，馬達控制器設計方法，對其效能之評估。

### [第二章]: 理論基礎

闡述本研究所使用的相關理論，其中包含 Delta 機械手臂正逆向運動學、高階控制器設計原理。

### [第三章]: 控制器設計

本篇針對所控制之三相無刷直流馬達進行控制器設計，設計方法為使用自適應滑動控制之方法。

### [第四章]: 實驗設備

針對 Maxon EC 三相無刷馬達、Maxon EPOS2 控制器、電源共應器與 Delta 機械手臂機構進行介紹。

### [第五章]: 實驗結果與討論

針對 Delta 機械手臂系統，控制器中改良部分進行比較。分別將滑動適應性控制器套用於 Delta 機械手臂系統中之三軸馬達，並展現其進行成果。

### [第六章]: 結論與未來展望

根據整體研究的效果及實驗的目標達成程度進行結論，並說明未來目標。

### [第七章]: 參考文獻

整理本研究所參考之相關引用，及參考之論文。

## 第二章 理論基礎

本章重點為本研究理論基礎之介紹，在本章當中可分為三大重點，以下章節會依據其三大重點詳細闡述。第一部分為無刷馬達的簡介和介紹，其中包含無刷馬達的基本結構、無刷馬達的數學模型、無刷馬達之驅動原理；第二部分為機械手臂的運動學介紹，包含正向運動學、逆向運動學的解說，了解機械手臂在空間中的移動規則與演算法；第三部分為高階控制器設計的原理和解說，當中包含了 Lyapunov 穩定性理論分析、滑動模式控制、適應控制等控制理論之解說。

### 2.1 無刷馬達簡介

無刷直流電動機(俗稱：無刷馬達)也被稱為電子轉向電機，在探討無刷直流馬達以前可先探討有刷直流馬達。有刷直流馬達在 19 世紀以來一直存在著，而無電刷的技術是近期隨著科技的進步才產生的產物。無刷直流馬達產生是由於 1960 年，固態技術的進步所貢獻。而由於 1980 年代擁有更好的永磁材料，使得無刷直流馬達的技術更加成熟。因為無刷直流馬達的產生，許多相關的應用與需求也逐步出現，例如：運輸系統、加熱和通風系統、工業工程系統、運動控制系統、定位和驅動系統等，個研究開始致力於無刷直流馬達的運用與研究。

無刷直流馬達內部結構可分為旋轉式馬達定子(Stator)、轉子(Rotor)。定子是由三個繞組所構成，轉子是圍繞馬達周圍之極性相反的磁極。其內部結構與馬達使體圖如下圖 2-1 與 2-2 所示。

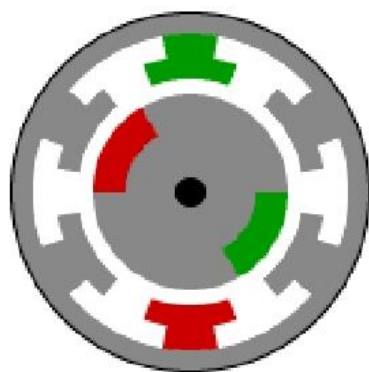


圖 2-1 無刷直流馬達架構圖



圖 2-2 無刷馬達實體圖

## 2.1.1 無刷馬達之種類與變化

隨著科技的進步，馬達在各樣產業中的運用也更加的廣泛。為了滿足各個產業中，馬達使用的不同需求，馬達的種類也產生了許多不同的變化。例如：在旋轉馬達的分類當中，就可以分為直流馬達、交流馬達、步進馬達。因此在各樣馬達分類當中，我們將其整理成下圖 2-3 所示。

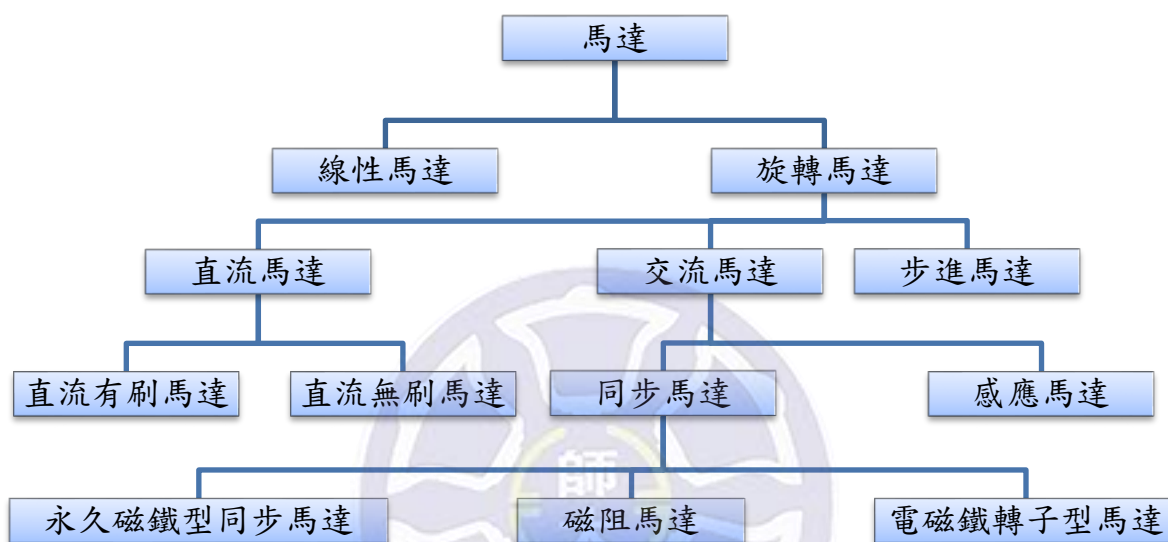


圖 2-3 馬達分類

本研究所使用的馬達為三相無刷直流馬達，其分類為旋轉式直流馬達的其中一種。其內層為圍繞馬達圓周圍極性相反的磁極所組成的轉子，外層則為電樞繞組所組成的定子如圖 2-4 所示。而三相無刷直流馬達之定子繞組是由三個繞組所構成，其最常見之結線方法為 Y 型結構如圖 2-5 所示。其運作方法為永久磁鐵產生轉子磁通，使定子產生磁極來吸引轉子。因此此方法可以免去電刷的應用[5]。

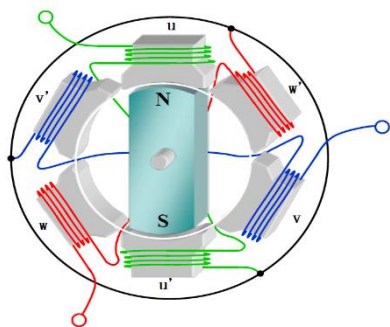


圖 2-4 無刷直流馬達架構

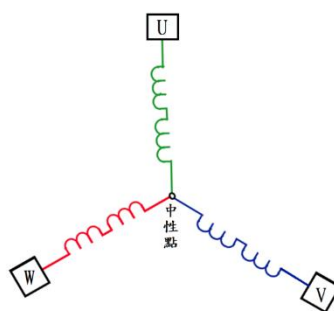


圖 2-5 三相繞組 Y 型結構

## 2.1.2 無刷與有刷直流馬達比較

直流馬達中的無刷直流馬達與有刷直流馬達之間，有著相同的物理意義，兩者皆是利用電磁鐵與永久磁鐵相互的作用產生軸心的扭力。但因為其內部結構的不同，使得其有著不同運作方式。無刷直流馬達的永久磁鐵為轉子，因為少了電刷與軸之間的摩擦，因此也有比較安靜、省電、較不易損壞等特性，同時保有了有刷馬達的加速特性。有刷直流馬達的永久磁鐵則為定子。因此本篇針對兩種驅動系統，進行不同特性的與響應比較[5]。

表 2-1 無刷直流馬達與有刷直流馬達比較表

馬達類型 比較項目	無刷直流馬達	有刷直流馬達
換相方式	霍爾位置感測器，進行電子換向	電刷和整流子
馬達維護	沒有電刷而較少需要	需定期維護電刷和整流子
馬達壽命	較長	較短
轉速-轉矩特性	額定負載下特性曲線平坦	轉速較高時碳刷的摩擦增加因而降低了可用轉矩
輸出功率	高，因無電刷的損耗	中等，因電刷的損耗
馬達體積	較小	較大
轉速範圍	較高	較低
電磁干擾	高	低
馬達價格	較高	較低
驅動器控制架構	複雜且成本高	簡單且成本低

### 2.1.3 三相無刷直流馬達數學模型 [5]~[8]

由於無刷直流馬達結構中不具備換向片與碳刷，使馬達無法自動換向，因此換向必須透過三相變流器控制馬達的換向。三相無刷直流馬達的原理是透過控制定子三相線圈合成電樞磁場，帶動轉子上的永久磁鐵，最常使用的 Y 型結構如圖 2-6 所示。其中三個定子線圈包含 u、v、w，其中每一相都是由馬達的等效電阻、等效電感與馬達旋轉所產生的感應電動勢組成，如圖 2-7 所示。其中假設三相線圈上的等效電阻、等效電感與三相氣隙皆相同，各相電流由各相端點流入中心相 n 的方向。

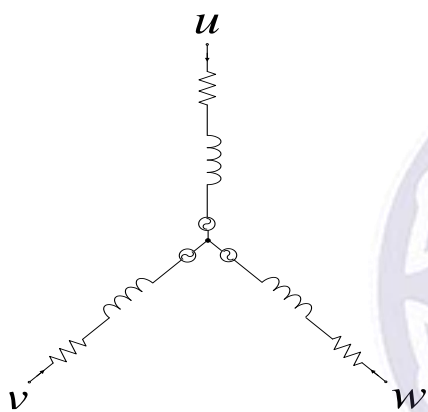


圖 2-6 馬達內部 Y 型結構圖

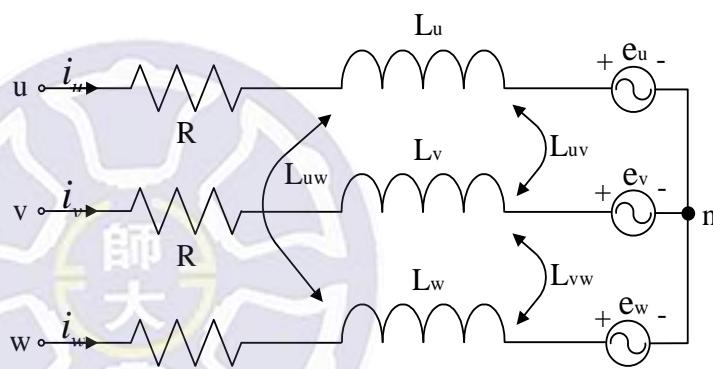


圖 2-7 三相無刷馬達等效電路圖

三相無刷馬達參數與變數定義如下：

$n$ ：中心相。

$R$ ：相電阻。

$L_u$ 、 $L_v$ 、 $L_w$ ：u、v、w 三相自感量。

$L_{uv}$ 、 $L_{vw}$ 、 $L_{wu}$ ：u、v、w 三相互感量。

$i_u$ 、 $i_v$ 、 $i_w$ ：三相電流。

$v_u$ 、 $v_v$ 、 $v_w$ ：三相電壓。

$e_u$ 、 $e_v$ 、 $e_w$ ：三相反電動勢。

因此我們可以將方程式表示如下：

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_u & L_{vu} & L_{wu} \\ L_{vu} & L_v & L_{vw} \\ L_{wu} & L_{vw} & L_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_u \\ e_v \\ e_w \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

假設三相無刷馬達定子之間的氣隙是均勻的，我們可以将三相自感量與三相互感量假設為相同值：

$$L_u = L_v = L_w = L$$

$$L_{uv} = L_{vw} = L_{uw} = M$$

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_u \\ e_v \\ e_w \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

因  $i_u + i_v + i_w = 0$

我們可以整理出 Eq.(2-3) 式

$$Mi_u + Mi_v = -Mi_w \quad (2-3)$$

最後將 Eq.(2-3) 式帶入 Eq.(2-2) 可得：

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L-M & 0 & 0 \\ 0 & L-M & 0 \\ 0 & 0 & L-M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_u \\ e_v \\ e_w \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L-M & 0 & 0 \\ 0 & L-M & 0 \\ 0 & 0 & L-M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_u \\ e_v \\ e_w \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

最後可以得出電氣方程式如 Eq.(2-6)所示：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L-M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L-M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L-M} \end{bmatrix} \cdot \left[ \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_u \\ e_v \\ e_w \end{bmatrix} \right] \quad (2-6)$$

經由 Eq.(2-6)電氣方程式，我們可以得到三相電流值。

接著我們將定義電磁轉矩方程式，與機械動態方程式所使用的參數如下：

$\omega_r$ ：轉子角速度。

$J$ ：系統慣量。

$T_e$ ：電磁轉矩。

$T_L$ ：附載轉矩。

$B$ ：阻尼係數。

電磁轉矩方程式如 Eq.(2-7)所示，藉由電氣方程式所得的三相電流，我們可以經由電磁轉矩方程式得到電磁轉矩  $T_e$ 。

$$T_e = \frac{e_u i_u + e_v i_v + e_w i_w}{\omega_r} \quad (2-7)$$

機械動態方程式如 Eq.(2-8)所示

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{T_e - T_L - B\omega_r}{J} \quad (2-7)$$

藉由上述所整理出的三相無刷直流馬達電磁方程式與機械動態方程式，我們可以建立一個無刷三相無刷直流馬達的之數學模型。藉由整理出三相無刷直流馬達之數學模型，本研究將針對此模型進行控制器之設計。

## 2.2 Delta 機械手臂運動學

運動學與物體的位置、速度、加速度有關，但在運動學當中不討論其作用力。動力學則為探討物體在有作用力的情況下，位置、速度、加速度等運動量之變化。在機械手臂的運動學當中，與機械手臂當中的幾何參數有關，而機械手臂的運動學就是在機械手臂的幾何參數的運動特性。通常在機械手臂當中，一個馬達代表一個機械手臂的自由度。因此可想而知，當一個機械手臂上擁有越多的馬達，代表此機械手臂在空間中可以更加靈活的運動。通常串聯式機械手臂擁有 6 個自由度，就可以在 3 度空間當中運動。在機械手臂的運動學當中可分為正向與逆向運動學，正向運動學表示為已知手臂馬達角度計算出機械手臂末端點位置，而逆向運動學則為經由機械手臂終端點位置計算出手臂各馬達轉動角度。

機械手臂的運動學，也和機械手臂的結構設計息息相關。通常機械手臂可分為兩個種類，一種為串聯式機械手臂，一種則為並聯式機械手臂。針對兩種不同結構的機械手臂，因為結構的差異，運動學的運算上也會有不同的方法。本研究所使用的 Delta 機械手臂，就是屬於並聯式的機械手臂，其運動學比起串聯式的機械手臂，也更加的單純。在 Delta 機器人當中，也因為馬達使用的不同，在結構上也有些微的差異，造成運動學計算的不同。如下圖 2-8 所示為使用旋轉馬達的 Delta 機械手臂，而下圖 2-9 則為使用線性馬達之 Delta 機械手臂。在推導 Delta 機械手臂運動學時，線性馬達式手臂因為少了一個連桿的连接，使的運動學更加的單純。本研究所使用的 Delta 機械手臂為旋轉式馬達 Delta 機械手臂。



圖 2-8 旋轉式馬達 Delta 機器人

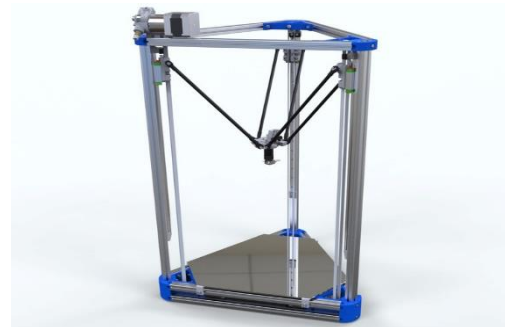


圖 2-9 線性式馬達 Delta 機器人

### 2.2.1 Delta 機械手臂參數設定 [1]

下圖 2-10 為 Delta 機器人的 3D 示意圖，Delta 機器人在結構上可分為移動基底與固定基底，由下圖可看出 Delta 機器人由三隻有相同運動學結構的手臂，並固定於一個基座上。在手臂中可分為上連桿與下連桿，其中上連桿  $A_i D_i$  連接於手臂的固定基底，而下連桿  $C_i D_i$  連接於移動基底。而 Delta 機械手臂是靠著固定於固定結構上的馬達，帶動手臂上連桿，再由手臂的上連桿帶動手臂下連桿。使三顆馬達，可以帶動手臂的末端點，再三維的空間中移動。其中手臂  $C_i D_i$  是由平行四邊形所組成，此設計方法是為了消除手臂的旋轉自由度，確保手臂在三維空間中移動。手臂的上連桿  $A_i D_i$  的長度定義為  $L$ ，而下連桿的長度  $C_i D_i$  則定義為  $l$ 。三隻手臂的順序，分別由上圖定義出第一軸手臂逆時針方向，定義出第二軸與第三軸手臂。

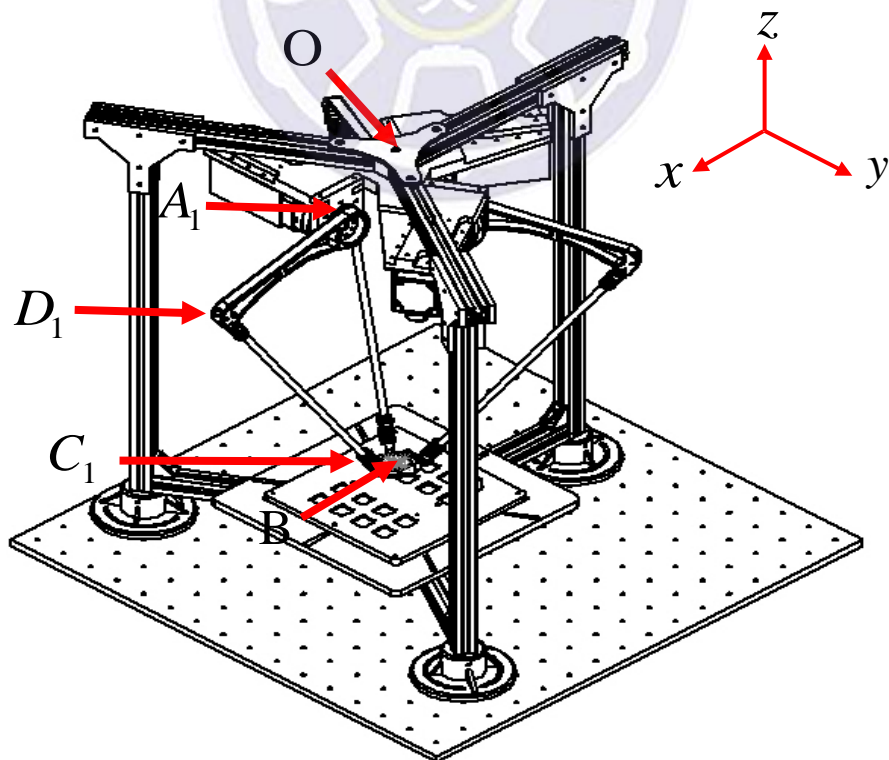


圖 2-10 定義 Delta 機器人參數圖

由圖 2-11 我們可以從看到  $z$  軸俯視 Delta 機械手臂，圖中我們可以清楚看出三肢手臂的位置。而在定義當中，我們需要先定義 Delta 機械手臂零點的基準位置。此零點位置是由三肢手臂固定點  $A_1A_2A_3$  的中心點  $O$  點定義而成，並且當我們以此三個固定點畫一圓時，我們定義此三固定點組成的圓的圓半徑定義為  $r_b$ 。而機械手臂的三個移動點  $C_1C_2C_3$  的中心點則定義為  $B$  點，由三移動點所組成的圓的圓半徑定義為  $r_m$ 。

因此由下圖 2-11 可判斷出 Delta 機械手臂三個手臂之間的位置與關係，我們定義由  $z$  軸俯視手臂的角度， $x$  位置為第一隻手臂的位置。因圓內心的夾角為  $360^\circ$ ，有此可知三隻手臂之間個夾角為  $120^\circ$ 。因此我們可以定義出三隻手臂的馬達轉動位置  $A_i$  點表示為 Eq.(2-8) 式。

$$A_i = r_b [\cos(2\pi(i-1)/3), \sin(2\pi(i-1)/3) \ 0], i=1,2,3 \quad (2-8)$$

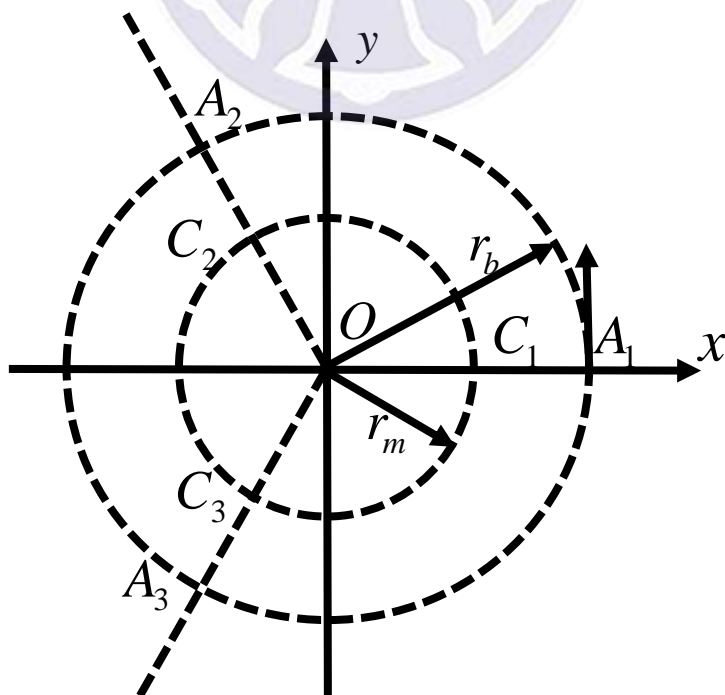


圖 2-11 Delta 機械手臂俯視圖

## 2.2.2 Delta 機械手臂逆向運動學

通常機械手臂在操作時，都是給予手臂末端點位置，計算出手臂之間每個馬達轉動的角度，此方法稱為逆向運動學。而逆向運動學的計算方法可分為許多方法，包括數值法、幾何法、和代數法。通常數值法是遇到於法求得解析解的情況所使用的方法，其運算的過程較為簡單。數值法主要是運用迭代的方式來求解，也因此求解過程當中需要花費更多時間計算；幾何法通常會搭配代數方法使用，運算過程較單純使用代數法來的複雜。而代數法則在運算過程當中則是最困難的，但因為代數法通常不會運用到幾何空間的概念，因此在理解上更加地容易。

本研究所提出的逆向運動學方法，主要為代數方法，因此在定義理解上並不會太困難。但由於使用代數方法，因此造成在數學運算過程中較複雜的情況。本研究針對 Delta 機器人進行逆向運動學運算，主要是先由我們所定義 Delta 機器人原點  $O$  點位置，與 Delta 機器人底端移動點  $B$  點位置，進行其他關節點相對位置的推導。最後以點對點之間，彼此距離的關係，求出 Delta 機器人逆向運動學。由下圖 2-12 可看出 Delta 機器人，手臂上點與點之間的關係。

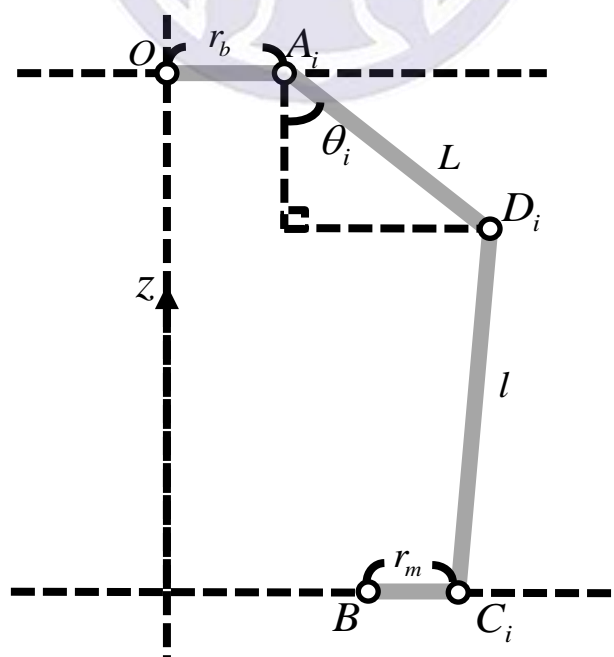


圖 2-12 Delta 機械手臂側視圖

經由上述方法我們必須先將 Delta 機械手臂上每點位置先定義出來，而在定義 Delta 機械手臂每點位置需要由 Delta 機器人的俯視圖與側視圖，觀察手臂中每個點位置之間，相對應的關係。因此我們將上圖 2-11 與 2-12 整理至下圖 2-13，使我們在觀測點位置時能夠更容易理解。由下圖 2-13(b)，我們可以從 Delta 機械手臂側視圖，定義出 Delta 機械手臂  $A_i$ 、 $D_i$ 、 $C_i$ 、 $B$  點之間相對應的關係至下列方程式。

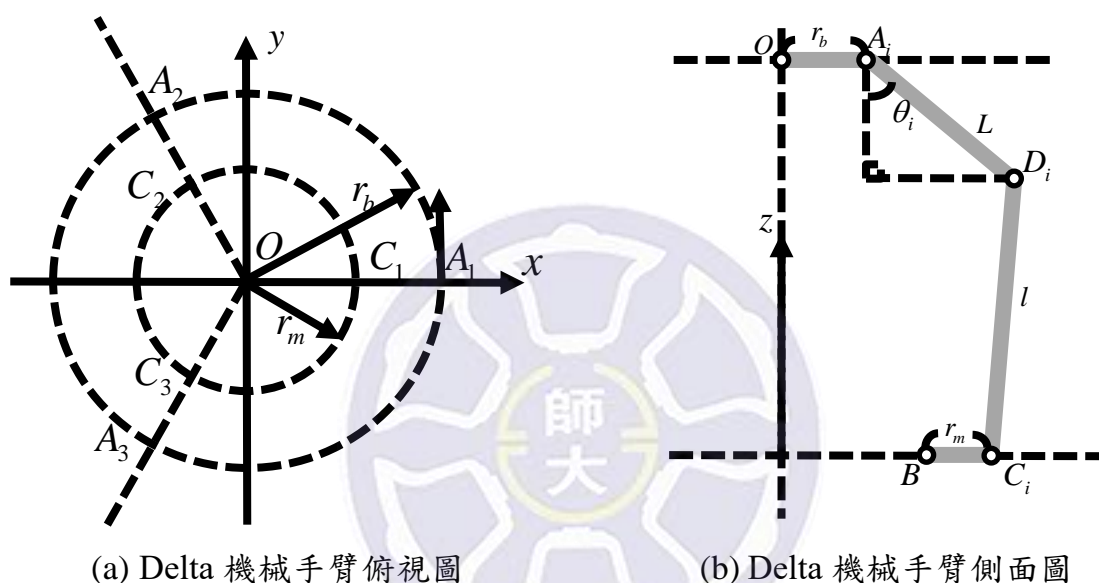


圖 2-13 Delta 機械手臂觀測圖

其中  $A_i$  點是 Delta 機械人馬達旋轉的點位置，其定義方法由原點開始，以  $r_b$  為半徑的長度，定義三隻手必馬達旋轉點  $A_i$  位置。 $D_i$  則是經由 Delta 機械手臂之上手臂長度，相對應  $A_i$  所定義。

$$A_i = r_b [\cos(2\pi(i-1)/3), \sin(2\pi(i-1)/3), 0], i=1,2,3 \quad (2-9)$$

$$D_i = A_i + \begin{bmatrix} L \sin \theta \cos(2\pi(i-1)/3) \\ L \sin \theta \sin(2\pi(i-1)/3) \\ -L \cos \theta \end{bmatrix}, i=1,2,3 \quad (2-10)$$

$B$  點則是 Delta 機械手臂末端的移動點，因此藉著  $B$  點相對應 Delta 機械手臂之下手臂長度之間關係，我們可以推導出  $C_i$  的位置。由下列方程式 Eq.(2-11) 與 Eq.(2-12) 表示為：

$$B = [x, y, z] \quad (2-11)$$

$$C_i = B_i + r_m [\cos(2\pi(i-1)/3), \sin(2\pi(i-1)/3), 0] \quad i=1,2,3 \quad (2-12)$$

因此藉著上述點座標，我們分別得到 Delta 機械手臂  $A_i$ 、 $D_i$ 、 $C_i$ 、 $B$  點的位置。由於我們的到點座標的關係式，因此我們可以以點對點之間的關係求得長度方程式。我們藉由  $D_i$ 、 $C_i$  兩點求得 Delta 機械手臂下肢長度，其關係式由 Eq.(2-13) 表示為：

$$l^2 = \overline{D_i C_i}^2 \quad (2-13)$$

為要求得  $D_i$ 、 $C_i$  兩點之間距離，我們要化簡  $D_i$ 、 $C_i$  兩點。因此以下我們以  $A_i$  相對應  $D_i$  點的關係，進行方程式化簡，藉此得到 Eq.(2-14) 式與 Eq.(2-15) 式，表示為以下數學式：

$$D_i = \begin{bmatrix} r_b \cos(2\pi(i-1)/3) \\ r_b \sin(2\pi(i-1)/3) \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} L \sin \theta \cos(2\pi(i-1)/3) \\ L \sin \theta \sin(2\pi(i-1)/3) \\ -L \cos \theta \end{bmatrix}^T \quad (2-14)$$

$$D_i = \begin{bmatrix} r_b \cos(2\pi(i-1)/3) + L \sin \theta \cos(2\pi(i-1)/3) \\ r_b \sin(2\pi(i-1)/3) + L \sin \theta \sin(2\pi(i-1)/3) \\ -L \cos \theta \end{bmatrix}^T \quad (2-15)$$

接著我們化簡  $C_i$  得到 Eq.(2-16)

$$C_i = [x + r_m \cos(2\pi(i-1)/3), \quad y + r_m \sin(2\pi(i-1)/3), \quad z] \quad (2-16)$$

另 Eq.(2-17)與 Eq.(2-18)

$$c_i = \cos(2\pi(i-1)/3) \quad (2-17)$$

$$s_i = \sin(2\pi(i-1)/3) \quad (2-18)$$

將 Eq.(2-17)與 Eq.(2-18)帶入 Eq.(2-15)與 Eq.(2-16)，替換 Eq.(2-15)與 Eq.(2-16)中的  $\cos$  項與  $\sin$  項。並化簡方程式，得到  $D_i$  與  $C_i$  兩點：

$$D_i = [r_b c_i + L \sin \theta_i c_i, \quad r_b s_i + L \sin \theta_i s_i, \quad -L \cos \theta_i] \quad (2-19)$$

$$C_i = [x + r_m c_i, \quad y + r_m s_i, \quad z] \quad (2-20)$$

當我們取得  $D_i$ 、 $C_i$  兩點後，藉由兩點算長度公式可以列 Eq.(2-21)。因此整理完的

$D_i$ 、 $C_i$  兩點，帶入 Eq.(2-13)式得：

$$l^2 = \left[ \begin{aligned} & [(r_b c_i + L \sin \theta_i c_i) - (x + r_m c_i)]^2 \\ & + [(r_b s_i + L \sin \theta_i s_i) - (y + r_m s_i)]^2 \\ & + (-L \cos \theta_i - z)^2 \end{aligned} \right] \quad (2-21)$$

整理 Eq.(2-21)得：

$$\begin{aligned} l^2 = & [c_i(r_b + L \sin \theta_i - r_m) - x]^2 \\ & + [s_i(r_b + L \sin \theta_i - r_m) - y]^2 \\ & + [L \cos \theta_i + z]^2 \end{aligned} \quad (2-22)$$

令 Eq.(2-23)

$$r_b - r_m = r_e \quad (2-23)$$

將 Eq.(2-23)代入 Eq.(2-22)後得：

$$\begin{aligned} l^2 &= [c_i(r_e + L \sin \theta_i) - x]^2 \\ &+ [s_i(r_e + L \sin \theta_i) - y]^2 \\ &+ [L \cos \theta_i + z]^2 \end{aligned} \quad (2-24)$$

把 Eq.(2-24)式所有平方項展開，整理後得：

$$\begin{aligned} l^2 &= [c_i(r_e + L \sin \theta_i)]^2 - 2c_i(r_e + L \sin \theta_i)x + x^2 \\ &+ [s_i(r_e + L \sin \theta_i)]^2 - 2s_i(r_e + L \sin \theta_i)y + y^2 \\ &+ (L \cos \theta_i)^2 + 2L \cos \theta_i z + z^2 \end{aligned} \quad (2-25)$$

繼續將 Eq.(2-25)剩餘的平方項展開，整理後得：

$$\begin{aligned} l^2 &= c_i^2 r_e^2 + 2c_i^2 r_e L \sin \theta_i + (c_i L \sin \theta_i)^2 - 2c_i(r_e + L \sin \theta_i)x + x^2 \\ &+ s_i^2 r_e^2 + 2s_i^2 r_e L \sin \theta_i + (s_i L \sin \theta_i)^2 - 2s_i(r_e + L \sin \theta_i)y + y^2 \\ &+ (L \cos \theta_i)^2 + 2L \cos \theta_i z + z^2 \end{aligned} \quad (2-26)$$

由 Eq.(2-26)可提出以下方程式：

$$c_i^2 r_e^2 + s_i^2 r_e^2 = r_e^2 \quad (2-27)$$

$$(c_i L \sin \theta_i)^2 + (s_i L \sin \theta_i)^2 = (L \sin \theta_i)^2 \quad (2-28)$$

$$(L \sin \theta_i)^2 + (L \cos \theta_i)^2 = L^2 \quad (2-29)$$

$$2c_i^2 r_e L \sin \theta_i + 2s_i^2 r_e L \sin \theta_i = 2r_e L \sin \theta_i \quad (2-30)$$

因此將 Eq.(2-27) 、Eq.(2-28) 、 Eq.(2-29) 、 Eq.(2-30)代入 Eq.(2-26)可化簡方程式，並將已知項與  $\theta_i$  項分開整理為以下方程式：

$$\begin{aligned} l^2 &= r_e^2 - 2c_i r_e x + x^2 - 2s_i r_e y + y^2 + z^2 + L^2 \\ &\quad - s_i y L \sin \theta_i - 2c_i x L \sin \theta_i \\ &\quad + 2r_e L \sin \theta_i + 2Lz \cos \theta_i \end{aligned} \quad (2-31)$$

接著繼續將 Eq.(2-31)當中的已知項、 $\sin \theta_i$  項和  $\cos \theta_i$  項，分別整理再一起得下列方程式：

$$\begin{aligned} l^2 - r_e^2 + c_i r_e x - x^2 + 2s_i r_e y - y^2 - z^2 - L^2 \\ = (2r_e L - 2c_i x L - 2s_i y L) \sin \theta_i + 2Lz \cos \theta_i \end{aligned} \quad (2-32)$$

將已知項與  $\sin \theta_i$  、  $\cos \theta_i$  項之係數以變數表示為：

$$k = l^2 - r_e^2 + c_i r_e x - x^2 + 2s_i r_e y - y^2 - z^2 - L^2 \quad (2-33)$$

$$a_1 = 2c_i r_e L - 2c_i x L + 2s_i r_e L - s_i y L \quad (2-34)$$

$$a_2 = 2Lz \quad (2-35)$$

因此將 Eq.(2-33) 、Eq.(2-34) 、 Eq.(2-35)代入 Eq.(2-32)得到：

$$k = a_1 \sin \theta_i + a_2 \cos \theta_i \quad (2-36)$$

接著我們另 Eq.(2-37)

$$\cos \phi = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \sin \phi = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad (2-37)$$

將 Eq.(2-35)同乘  $\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$  得 Eq.(2-38)

$$\frac{k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \sin \theta_i + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \cos \theta_i \quad (2-38)$$

將 Eq.(2-36) Eq.(2-37)代入 Eq.(2-38)得

$$\frac{k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \cos \phi \sin \theta_i + \sin \phi \cos \theta_i \quad (2-39)$$

由三角函數的合角公式可由 Eq.(2-38)得：

$$\frac{k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \sin(\phi + \theta_i) \quad (2-40)$$

接著反函數得：

$$\phi + \theta_i = \sin^{-1} \left( \frac{k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) \quad (2-41)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{a_2}{a_1} \right) \quad (2-42)$$

由 Eq.(2-42)反函數得到  $\phi$  之角度，代入(2-41)可以得到  $\theta_i$  之角度。因此推導出 Delta 機械手臂逆向運動學 Eq.(2-43)。由上圖 2-13 可得知  $\theta_i$  為手臂與 Z 軸之夾角，因此將  $90^\circ - \theta_i$  則為 Delta 機械手臂水平位置與手臂轉動角度之夾角。

$$\theta_i = \sin^{-1} \left( \frac{k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{a_2}{a_1} \right) \quad (2-43)$$

## 2.3 Lyapunov 理論

一般在一個控制系統當中，確認控制系統的穩定性，式控制系統當中第一重要的任務。而在過去的古典理論當中所使用的 Routh-Hurwitz 和 Nyquist 穩定性理論，則都是通過決定系統的穩定性來確保系統的穩定。但這些方法只能運用在線性且非時變的系統當中，當面對非線性系統時，這些穩定性方法就不能使用了。

因此我們在這裡介紹 Lyapunov 穩定性理論，Lyapunov 理論是由俄羅斯的科學家 Aleksandr Mikhailovic Lyapunov 提出的。此方法主要是來證明一個動力系統或在自製的微分方程當中的穩定性，此方法使用於在控制系統當中，檢驗其系統在平衡點附近的穩定度。此方法可以判斷系統在空間狀態中的非線性、時變系統的穩定性。此方法的最大特色為不需要針對複雜系統的狀態方程式進行求解，此方法帶給控制理論分析極大的貢獻。

### 2.3.1 Lyapunov 穩定性理論

我們在此假設一個非線性系統 Eq.(2-44)，來解說 Lyapunov 穩定性理論。

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \forall t \geq 0 \quad (2-44)$$

假設存在一個 Lyapunov 函數  $V(t, x)$ ，並且此函數屬於正定函數  $V(t, x) > 0$ ，而此函數可以構成一個有界的區域。我們則可以針對此 Lyapunov 函數進行一次微分，來分析此非線性系統的穩定性。而針對 Lyapunov 函數進行一次微分，可分為不同的情形。因此以下針對 Lyapunov 函數一次微分穩定性判斷，可分為以下三種情形進行討論：

1.  $V(t, x) > 0, \dot{V}(t, x) < 0, \forall t \geq 0$ ，此時系統為漸近穩定。
2.  $V(t, x) > 0, \dot{V}(t, x) > 0, \forall t \geq 0$ ，此時系統為無法保證穩定。
3.  $V(t, x) > 0, \dot{V}(t, x) = 0, \forall t \geq 0$ ，此時系統為臨界穩定。

經過上述 Lyapunov 穩定性理論的介紹過後，我要需要更加進一步的探討系統狀態有界與漸進穩定收斂的判斷。當我們的 Lyapunov 函數經過一次微分過後得到的狀態為  $\dot{V}(t, x) \leq 0$  時，而且此時在證明當中又很難得到  $\dot{V}(t, x) < 0$  的關係。這時我們必須引用 Barbala's 引理來判斷非自主性(Non-autonomous)系統之穩定性狀態。藉由 Barbala's 引理，我們能夠判斷是系統是否為有界，並藉由判斷系統有界證明穩定性收斂。

### 2.3.2 Barbalat 引理

Barbalat's 引理通常運用在當無法確定 Lyapunov 函數是否為穩定或是臨界穩定時使用。在這裡假設  $f(t)$  為可以可微分的函數同時在  $t \rightarrow \infty$  時為有現值，並且此函數一次微分  $\dot{f}(t)$  唯一均勻的連續函數時，則當  $t \rightarrow \infty$  時  $f(t) \rightarrow 0$ 。但如果此時  $\dot{f}(t)$  為一個均勻連續函數的條件很難判斷時，我們則利用此函數兩次微分  $\ddot{f}(t)$  判斷其是否為有界。當我們判斷出  $\ddot{f}(t)$  為有界時，則可以證明  $\dot{f}(t)$  為一個均勻連續的函數。藉此證明當  $t \rightarrow \infty$  時， $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ 。

經由上述界上 Lyapunov 理論過後，我們在此補充注意事項：

- 一、 上述的 Lyapunov 四種穩定性判斷原則，皆具有充分的條件具不可逆性。
- 二、 至今目前為止，如何選擇一個 Lyapunov 函數  $V$ ，並沒有完整建構此函數的流程。因此目前在設計 Lyapunov 函數  $V$ ，建構此函數還是以個人經驗為主要之依據。
- 三、 Lyapunov 函數具有下述幾項相關特質
  1. Lyapunov 函數屬於一項純量之函數。
  2. Lyapunov 函數恆為一項正定函數。
  3. Lyapunov 函數  $V$  不具唯一性。
  4. Lyapunov 函數  $V$  之時間導數為非正定函數。

## 2.4 滑動模式控制

本篇將介紹滑動模式控制(Sliding Mode Control, SMC)，前蘇聯學者在 20 世紀 50 年代提出可變結構控制，其中滑動模式控制為其中主要應用之主軸。其原理是根據系統所期望的動態特性來設計系統的超平面，在藉使系統到達所設計之超平面上。當系統到達超平面時，將由控制器的切換函數使系統到達平衡點。

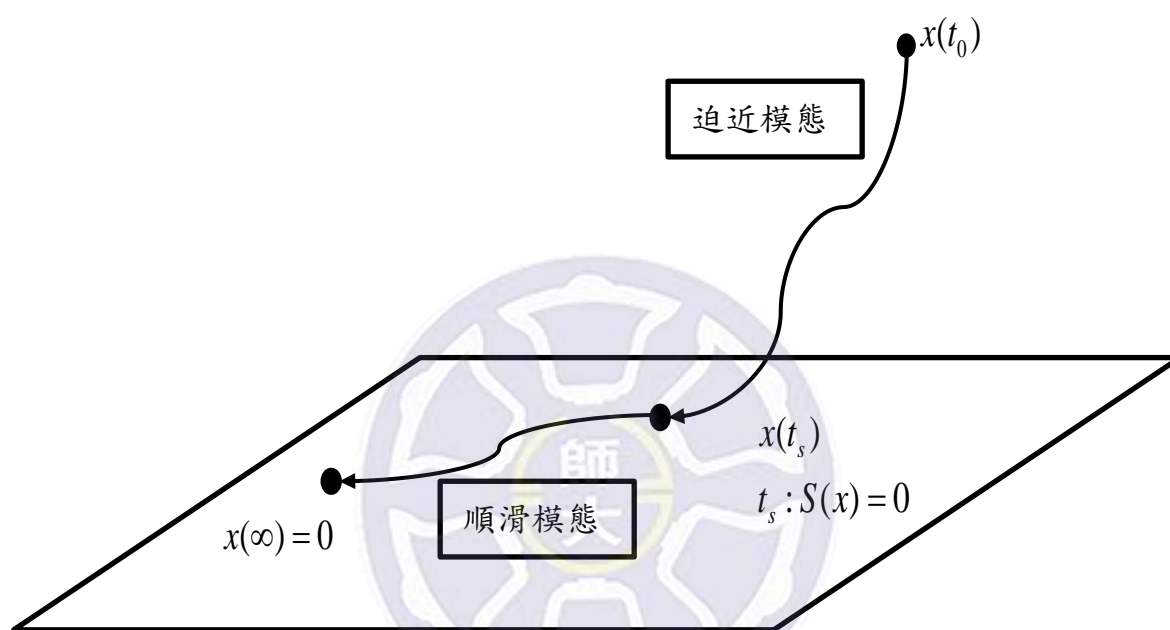


圖 2-14 系統狀態隨時間收斂至滑動平面在到達平衡點

由上圖 2-14 所示，滑動模式控制的主要目的為將系統變數的初始值  $x(t_0)$ ，接著透過迫近模式使系統在時間  $t_s$  中到達切換平面，使系統變數  $x(t_s)$  可在超空間  $S(x)=0$  上。接著藉著等效控制的方法，產生滑動模式的順滑層並同時使系統維持在順滑模態上。最後系統狀態在順滑層，藉由切換函數使系統到達平衡點，以此完成整個滑動模式控制。

藉由上述介紹滑動模式的方法，使滑動模式運作方式更加明確。滑動模式能夠克服系統的不確定性，並且在對抗干擾與未建置的動態模型具有很好的強健性。尤其是對於非線性系統，滑動模式控制具有非常良好的控制效果。能夠使系統快速的進入滑動平面，且使系統收斂。

藉由上述滑動模式的介紹，我們將以一個二階的系統為範例，對滑動模式進行詳細的推導與解說。由 Eq.(2-43)的二階系統，為本章節所使用的範例，其動態方程式如下

$$\ddot{x} = ax + bu \quad (2-45)$$

為了使我們的狀態  $\dot{x}$  和  $x$  可以收斂到 0，因此我們定義滑動平面函數

$$s = \dot{x} + \lambda x \quad (2-46)$$

我們定義滑動平面  $s = 0$

$$s = \dot{x} + \lambda x = 0 \quad (2-47)$$

藉由 Eq.(2-47)我們可以推導出 Eq.(2-45)

$$x = e^{-\lambda t} \quad (2-48)$$

因此由 Eq.(2-45)我們可以得知，當時間  $t \rightarrow \infty$ ， $x$  會趨近於 0 並且在收斂時的收斂速度，會隨著滑動增益  $\lambda$  的影響。

經由上述我們定義系統方程式 Eq.(2-45)，與滑動平面 Eq.(2-47)。我們可以藉由 Lyapunov 穩定性分析，並在 Lyapunov 穩定性分析過程中進行控制器設計，推導出滑動模式控制的控制率 Eq.(2-49)

$$u = u_{eq} + u_{sw} \quad (2-49)$$

其中

$$u_{eq} = -b^{-1}(ax + \lambda \dot{x}) \quad (2-50)$$

$$u_{sw} = -b^{-1}k \operatorname{sgn}(s) \quad (2-51)$$

在滑動控制的控制率當中，可以分為兩個部分。一個是等效控制量  $u_{eq}$ ，其目的是用來消除系統模型的影響，通常是藉由 Lyapunov 穩定度分析時，將系統的已知項消除。另一個部分則為滑動模式之切換項  $u_{sw}$ ，其目的是要將系統狀態維持在滑動平面上。而在滑動模式的切換項  $u_{sw}$ ，包含著符號函數(sign function)  $\text{sgn}(\cdot)$ ，而其會造成  $s$  在  $0^-$  和  $0^+$ 。而滑動模式的控制量也會隨著滑動增益  $\pm k$  大小變化，而此變化就是滑動模式控制常見的跳切現象。由於  $\text{sgn}(\cdot)$  是在  $\pm 1$  之間切換如圖 2-15 所示，造成跳切現象。因此許多文獻使用飽和函數(saturation function)  $\text{sat}(\cdot)$  如圖 2-16 所示，來抑制  $\text{sgn}(\cdot)$  巨大變化造成跳的切現象。下式 Eq.(2-49)與 Eq.(2-50) 則為  $\text{sgn}(\cdot)$  與  $\text{sat}(\cdot)$  之方程。

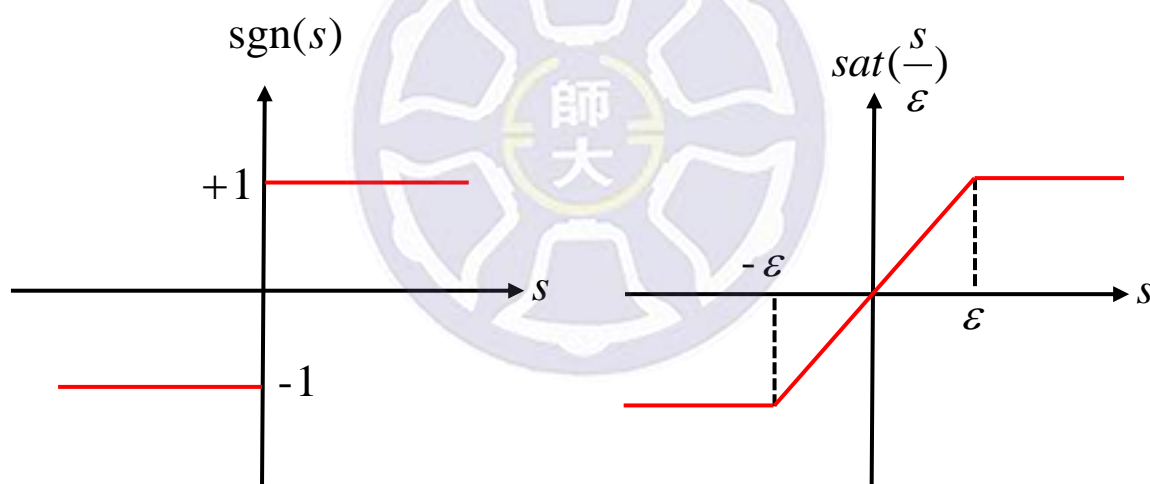


圖 2-15 符號函數示意圖

圖 2-16 飽和函數示意圖

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} +1, & s > 0 \\ -1, & s < 0 \end{cases} \quad (2-52)$$

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \begin{cases} +1, & s > \epsilon \\ \frac{s}{\epsilon}, & -\epsilon \leq s \leq \epsilon \\ -1, & s < -\epsilon \end{cases} \quad (2-53)$$

接下來我們要針對此滑動控制器進行 Lyapunov 穩定度分析，藉由 Lyapunov 穩定度分析證明此滑動控制器是穩定的。首先我們針對此滑動控制器需要收斂的滑動平面  $s$  來選擇我們得 Lyapunov 函數，如 Eq.(2-51)所示：

$$V = \frac{1}{2}s^2 \quad (2-51)$$

接著針對 Lyapunov 函數進行一次微分

$$\dot{V} = s\dot{s} \quad (2-52)$$

將我們的滑動平面一次微分項代入 Eq.(2-52)得到 Eq.(2-53)

$$\dot{V} = s(ax + bu + \lambda\dot{x}) \quad (2-53)$$

接著將我們的滑動控制律代入 Eq.(2-53)，而通常在設計控制器時，主要是由此階段設計控制器之控制率

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s(ax + \lambda\dot{x} - ax - \lambda\dot{x} - k \operatorname{sgn}(s)) \\ &= -sk \operatorname{sgn}(s) \end{aligned} \quad (2-54)$$

最後整理 Eq.(2-54)得 Eq.(2-55)

$$\dot{V} = -k|s| \quad (2-54)$$

因為設計  $k$  為正實數，由此證明  $\dot{V}$  小於等於 0

$$\dot{V} = -k|s| \leq 0 \quad (2-54)$$

在滑動模式的特性當中，其具有良好的強健性。而系統的不確定項(uncertainty)或干擾(disturbance)可以透過調整  $k$  值大小，使 Lyapunov 函數一次微分  $\dot{V} \leq 0$ ，讓系統保持穩定。

## 2.5 適應性控制

適應控制是一種對於系統當中的參數變化，具有適應能力的一種控制方法，此控制方法也屬於非線性控制的一種。在一些系統當中，具有一些較大的參數不確定性，如附載、干擾等因素，這些不確定性會隨著時間改變。因此適應控制，主要是針對這些系統參數不確定性，進行估測並給予相等之控制量。其控制方法最早是在 1950 年代時被提出的，其主要概念是控制器能夠根據外界環境的變化，再經由控制器做回授調整。使控制器能夠根據外界不確定性，隨著時間進行自我適應性的調整。在目前的研究當中，適應控制的方法已經具有一定的成熟度，也有許多文獻提出新的自適應性控制的架構。而在適應控制當中，可以分為兩大類。其中一類是自我調變控制器，如圖 2-17 所示，其為自我調變控制器之流程架構圖。

自我調變控制器，主要為針對系統未知參數進行估測。其作用方式主要為，當我們設計一個控制器需要系統未知參數時，這時我們便需要設計一項針對這些未知參數的估測器，並且把估測器的估測值給控制器使用。其優點為使用上較為彈性，因為其就容易結合不同得控制器與估測器一起使用。但其缺點就是估測到參數的正確性較差，也因此會造成系統最後的響應較差。

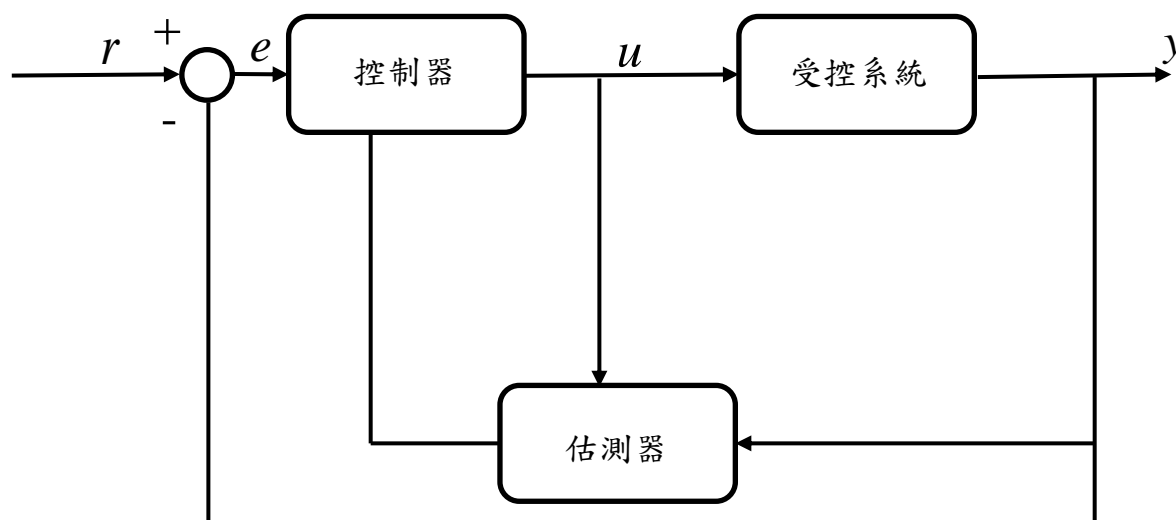


圖 2-17 自我調變控制器示意圖

在適應控之當中的另一大類則是模型參考自適應控制器(Model Reference Adaptive Controllers, MRAC)，而參考模型控制器之流程示意如下圖 2-18 所示。其主要運作方式為定義一個理想閉迴路的參考模型，藉由自適應機制再利用參考模型的輸出調整控制器的參數。而將參考模型全部規劃在一個控制系統的閉迴路時，可以反映出特定閉迴路的穩定度、暫態規格、安定時間、與穩態規格等。當設計出一個參考的閉迴路模型時，其輸出則代表受控系統希望得到的響應。接著與真實的響應後廂比較後，得到其誤差，再經由適應律輸出調整控制器，使我們的受控系統可以輸出我們動態符合的期望。

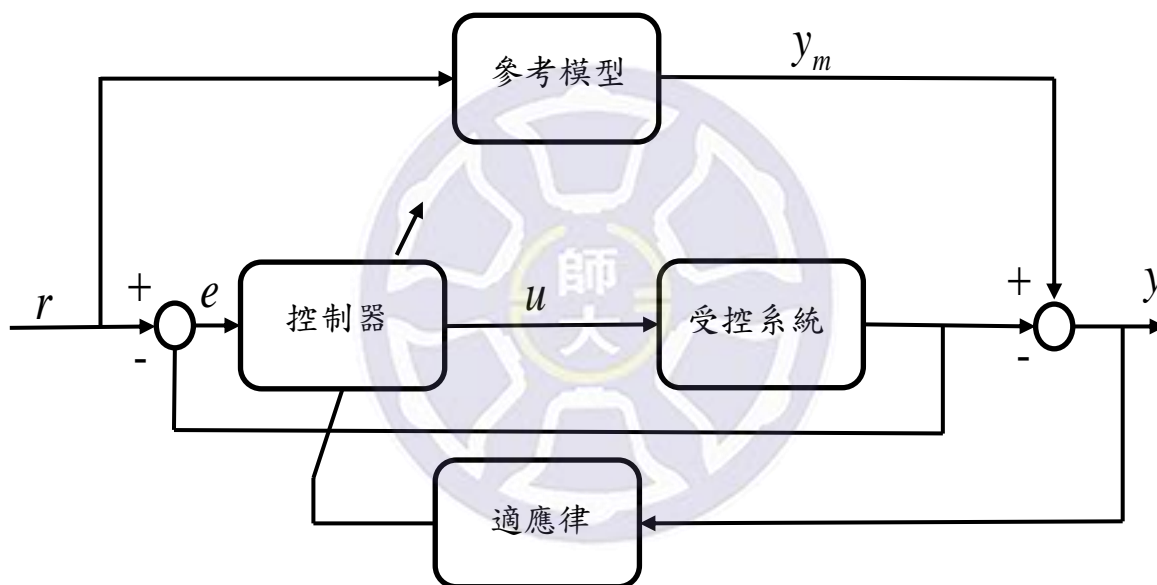


圖 2-18 參考模型控制器示意圖

本研究所使用的自適應控制方法，則是屬於參考模型自適應控制器設計之方法。本研究所使用的受控體為三相無刷直流馬達，其控制器設計需要注意的有系統與外界的干擾，另一項則是我們馬達所乘載得附載。而在實驗過程當中，發現系統在進入穩態時會有一定的穩態誤差。因此本研究使用參考模型適應控制的方法，來估測馬達的附載量，使控制器可以給於系統相對的控制補償量。並且利用模型參考適應控制的方法，可以省去在實驗設備成本上的附載感測器部分。此方法可以使控制器，得到相當完善的響應結果。

### 第三章 控制器設計

本章重點為針對三相無刷直流馬達進行位置控制器的設計，其目的在於藉由我們所設計的控制器，使三相無刷直流馬達可以順利到達我們所給予的命令目標位置。而在控制器內部實際運作主要方法是藉由輸入的位置命令與目前馬達轉動角度之位置所產生的誤差，藉由控制器內部的設計方法，輸出相對應的馬達控制量。使馬達位置誤差可以收斂至零，藉此使馬達轉動至命令位置。本章節在設計控制器部分，可分為三大架構重點。首先是滑動模式控制器，我們運用滑動模式控制作為主控制器的部分。接下來將適應控制結合到我們的主控制器，滑動模式控制中。最後針對此控制器進行穩定度分析，並證明其穩定性。

#### 3.1 滑動模式控制

首先在設計控制器之先，我們必須先考慮三相無刷直流馬達之機械動態方程式，如下所示：

$$J\ddot{\theta} + B_m\dot{\theta} + T_L = T_e \quad (3-1)$$

而其系統架構圖如下圖 3-1 所示

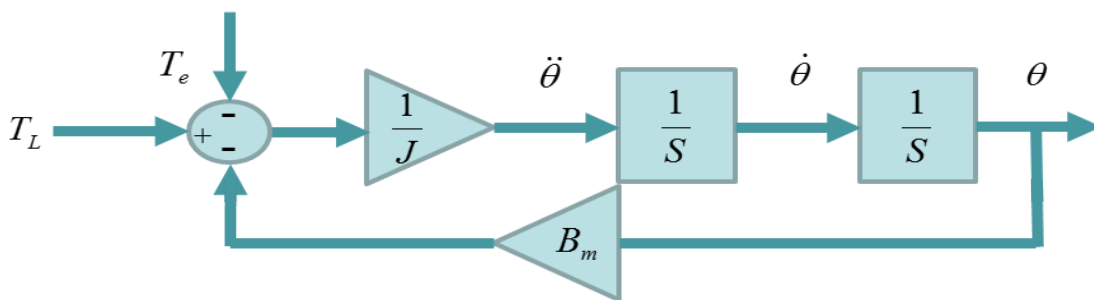


圖 3-1 三相無刷直流馬達系統架構圖

其中在動態方程式中的參數部分， $J_0$  為系統慣量（包括馬達與負載）、 $B$  為阻尼係數、 $\ddot{\theta}$  為馬達轉動之角加速度、 $\dot{\theta}$  為馬達轉動之角速度、 $\theta$  則為馬達轉動之角度、 $T_e$  為電磁轉矩、 $T_L$  為負載轉矩。

接著我們將三相無刷直流馬達之機械動態方程式 Eq.(3-1)，經過整理。並同時考慮機械手臂對馬達未知項影響後，得到 Eq.(3-2)

$$\ddot{\theta} = \frac{T_e - B\dot{\theta} - \Delta J_0 \ddot{\theta} - \Delta B \dot{\theta} - T_L}{J_0} \quad (3-2)$$

並且將其機械動態方程式以陣列形式來表示為 Eq.(3-3)

$$\dot{x} = Ax + Bu + D \quad (3-3)$$

其中陣列分別為

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J_0} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{J_0} \end{bmatrix}^T \quad (3-4)$$

$$x = [\theta \quad \omega_r]^T, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J_0}(\Delta J_0 \ddot{\theta} + \Delta B \dot{\theta} + T_L) \end{bmatrix}^T$$

而我們的干擾項，為三相無刷直流馬達上之負載，我們在陣列  $D$  中表示系統之不確定項，並以 Eq.(3-5)表示之

$$d = -\frac{1}{J_0}(\Delta J_0 \ddot{\theta} + \Delta B \dot{\theta} + T_L) \quad (3-5)$$

由於我們的控制器控制量  $u$ ，為三相無刷直流馬達之電磁轉矩。因此由 Eq.(3-6)表示

$$u = T_e \quad (3-6)$$

因此我們可以將 Eq.(3-3)以陣列形式表示為 Eq.(3-7)

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_r \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_0} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

我們將設計我們的主要控制器，滑動控制器。而在設計滑動控制器之先，我們必須先定義滑動模式控制器之切換函數  $\sigma$  為

$$\sigma = \dot{e} + \lambda e \quad (3-8)$$

而滑動平面則為 Eq.(3-9)，當系統進入滑動平面則可以收斂至穩定

$$\sigma = \dot{e} + \lambda e = 0 \quad (3-9)$$

而在滑動平面中的誤差  $e$  則表示為 Eq.(3-10)

$$e = \theta - \theta_d \quad (3-10)$$

其中  $\theta_d$  為馬達轉動之命令角度，而  $\theta$  則為馬達目前轉動之角度。

而在一般情況下，滑動模式控制的控制律可以分為兩個部分。一個部分為滑動模式控制之等效控制量，其目的是用於消除系統當中模型的影響，通常我們以  $u_{eq}$  表示之。另一個部分則為滑動模式控制切換項  $u_{sw}$ ，此控制量則是藉由切換函數，使系統可以保持在滑動平面上。因此結合兩個部分，定義出滑動控制律  $u_{smc}$  為 Eq.(3-11)

$$u_{smc} = u_{eq} + u_{sw} \quad (3-11)$$

而本研究所設計之等效控制量  $u_{eq}$  為

$$u_{eq} = B\dot{\theta} + J_0\ddot{\theta}_d - J_0\lambda\dot{e} \quad (3-12)$$

切換項  $u_{sw}$  則為

$$u_{sw} = -J_0 k \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (3-13)$$

### 3.1.1 滑動模式控制 Lyapunov 穩定度分析

針對三相無刷直流馬達之滑動模式控制器設計完成後，我們必須針對此控制器進行穩定度分析，確保系統控制器之穩定。而為了確保系統是穩定的，我們必須確認滑動控制器之切換函數  $\sigma$  內的誤差必須是穩定的。因此，我們選擇 Lyapunov 函數如下 Eq.(3-14)。而 Lyapunov 函數之設計沒有一定的規範，主要以經驗法則設計之。

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (3-14)$$

將 Eq.(3-14)作一次微分後得到  $\dot{V}$

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} \quad (3-15)$$

接著將滑動模式之切換函數，做一次微分後。代入 Eq.(3-15)並將方程式經過整理得 Eq.(3-16)

$$\dot{V} = \sigma(\ddot{e} + \lambda\dot{e}) \quad (3-16)$$

同時將滑動平面之誤差兩次微分  $\ddot{e}$  代入 Eq.(3-16)得，並由滑動平面兩次微分  $\ddot{e}$  中得到  $\ddot{\theta}$

$$\dot{V} = \sigma(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d + \lambda\dot{e}) \quad (3-17)$$

由 Eq.(3-17)我們可以得出三相無刷直流馬達之機械動態方程式，因此我們接著把機械動態方程式代入 Eq.(3-17)中。並將其方程式經過整理，得到 Eq.(3-18)式之整理結

$$\dot{V} = \sigma\left(-\frac{B}{J_0}\dot{\theta} + \frac{u}{J_0} + d - \ddot{\theta}_d + \lambda\dot{e}\right) \quad (3-18)$$

由 Eq.(3-18)式經過整理後，我們可以得到控制律在 Eq.(3-18)中。因此將我們所設計的滑動控制律，代入 Eq.(3-18)得

$$\dot{V} = \sigma \left( -\frac{B}{J_0} \dot{\theta} + \frac{B}{J_0} \ddot{\theta} + \ddot{\theta}_d - \lambda \dot{e} - J_0 k \operatorname{sgn}(\sigma) + d - \ddot{\theta}_d + \lambda \dot{e} \right) \quad (3-19)$$

而我們所設計的滑動控制律，可以將系統的已知項消除，因此整理出 Eq.(3-20)

$$\dot{V} = \sigma(d - k \operatorname{sgn}(\sigma)) \quad (3-20)$$

$$\dot{V} = d\sigma - k\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)$$

在 Eq.(3-20)中，我們可以整理  $\sigma$  項與  $\operatorname{sgn}(\sigma)$  項之乘機得 Eq.(3-21)

$$\dot{V} = d\sigma - k|\sigma| \quad (3-21)$$

藉由我們所設計的 Lyapunov 函數經過整理後，最後可以得到 Eq.(3-21)式。而藉由 Eq.(3-21)式，我們最後可以整理出以下幾項結論：

1. 為了使我們所設計的滑動控制器穩定，必須將滑動控制之切換增益  $k$  設計大於系統未知干擾項  $d$ 。
2. 藉由設計滑度增益  $K$  大於系統中未知干擾  $d$ ，我們可以得到 Lyapunov 函數之一次微分項  $\dot{V} < 0$ 。
3. 由於得知 Lyapunov 一次微分項  $\dot{V} < 0$ ，因此證明隨著時間  $t$  至無窮大時，Lyapunov 函數  $V$  會收斂至 0。

經由 Lyapunov 穩定度分析，且系統設計符合上述三項條件。由此證明，我們所設計之滑動模式控制器式穩定且收斂的。因我們所設計之滑動模式控制器，可以使系統抑制於滑動平面。而此滑動模式控制器，具有好的強健性並且可以抑制系統之不確定性與干擾等特性。

## 3.2 適應性控制

在我們完成設計本研究之主控制器，滑動模式控制器後。得知系統當中有一項未知干擾項，因此我們藉由適應性控制之方法來估測系統的未知干擾 $d$ 項。使系統可以藉由估測到未知干擾項 $d$ ，得到更好的響應。首先定義適應控制之干擾誤差為

$$\tilde{d} = \hat{d} - d \quad (3-22)$$

其中 $d$ 為系統干擾實際值， $\hat{d}$ 則為系統干擾之估測值。因此可以得到適應控制之干擾誤差為 $\tilde{d}$ 。而在系統干擾部分，假設干擾之改變是出現於某區段時間內。因此我們可以将系統干擾部分考慮為恆定訊號，以常數表示。因此我們將考慮系統干擾，一次微分項表示為 Eq.(3-23)

$$\dot{d} = 0 \quad (3-23)$$

再針對系統干擾誤差項一次微分可得

$$\dot{\tilde{d}} = \dot{\hat{d}} - \dot{d} \quad (3-24)$$

$$\dot{\tilde{d}} = \dot{\hat{d}} \quad (3-25)$$

而在系統進行設計後，我們將系統干擾估測一次微分項設計為

$$\dot{\hat{d}} = \sigma \quad (3-26)$$

最後我們將適應控制之適應律以 Eq.(3-27)表示之

$$u_{adap} = J_0 \hat{d} \quad (3-27)$$

### 3.2.1 滑動適應性控制

在完成針對三相無刷直流馬達的滑模式控制器設計，與適應模式控制器設計後。我們將兩樣控制器結合再一起，使控制器可以擁有同時兩項控制器之優勢。首先我們所設計的滑動適應性控制器，藉由滑動模式控制作為我們的主控制器。使控制器具有好的強健性、快速響應時間、並且抑制系統的不確定性與干擾。同時加入適應性控制，使我們可以藉由適應控制，來估測系統負載這部分之不確定項。而藉由適應控制估測出負載之不確定項，給予系統相對應之補償控制量。使系統達到更好的響應時間與穩態響應。藉由結合兩控制器，我們可以設計出滑動性適應控制之控制律如下 Eq.(3-28)所示

$$u = u_{smc} + u_{adap} \quad (3-28)$$
$$u = B\dot{\theta} + J_0\ddot{\theta}_d - J_0\lambda\dot{e} - kJ_0 \operatorname{sgn}(\sigma) + J_0\hat{d}$$

但由於滑動控制中，符號函數會造成系統在穩態時嚴重的震盪現象。因此我們將其中的符號函數以飽和函數形式取代，以消除滑動模式在穩態時的震盪現象。因此我們將滑動模式的控制律重新改寫，以 Eq.(3-29)之形式呈現

$$u = B\dot{\theta} + J_0\ddot{\theta}_d - J_0\lambda\dot{e} - kJ_0 \operatorname{sat}(\sigma) \quad (3-29)$$

因此，經由滑動模式中之符號函數以飽和函數形式替代，我們將針對三相無刷直流馬達的滑動適應性控制器之控制律以 Eq.(3-30)方式呈現。藉由此設計方法，不僅使控制器達到更快速的響應時間，也同時移除掉穩態時的震盪現象。

$$u = u'_{smc} + u_{adap} \quad (3-30)$$
$$u = B\dot{\theta} + J_0\ddot{\theta}_d - J_0\lambda\dot{e} - kJ_0 \operatorname{sat}(\sigma) + J_0\hat{d}$$

### 3.2.2 滑動適應性控制 Lyapunov 穩定度分析

在完整設計完滑動適應性控制器後，我們需再次針對此控制器進行穩定度分析。而為了確保系統之穩定性，控制器中的切換函數 $\sigma$ 與未知系統干擾估測項 $\tilde{d}$ 之誤差必須收斂。因此我們將 Lyapunov 函數選擇如下 Eq.(3-31)所示

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\tilde{d}^2 \quad (3-31)$$

將 Eq.(3-31)式對時間作一次微分後得到 $\dot{V}$

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} + \tilde{d}\dot{\tilde{d}} \quad (3-32)$$

接著將滑動模式之切換函數，一次微分項代入 Eq.(3-32)當中。將方程式經過整理，獲得 Eq.(3-33)

$$\dot{V} = \sigma(\ddot{e} + \lambda\dot{e}) + \tilde{d}\dot{\tilde{d}} \quad (3-33)$$

同時將滑動平面之誤差兩次微分 $\ddot{e}$ 代入 Eq.(3-33)

$$\dot{V} = \sigma(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d + \lambda\dot{e}) + \tilde{d}\dot{\tilde{d}} \quad (3-34)$$

並整理 $\sigma\lambda\dot{e}$ 項得 Eq.(3-35)

$$\dot{V} = \sigma(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d) + \sigma\lambda\dot{e} + \tilde{d}\dot{\tilde{d}} \quad (3-35)$$

接著我們將三相無刷直流馬達，機械動態方程式代入 Eq.(3-35)中。整理出方程式，獲得 Eq.(3-36)

$$\dot{V} = \sigma\left(-\frac{B}{J_0}\dot{\theta} + \frac{1}{J_0}u + d - \ddot{\theta}_d\right) + \sigma\lambda\dot{e} + \tilde{d}\dot{\tilde{d}} \quad (3-36)$$

將 Eq.(3-36)經過整理後得 Eq.(3-37)

$$\dot{V} = \sigma \frac{u}{J_0} - \sigma \frac{B}{J_0} \dot{\theta} + \sigma d - \sigma \ddot{\theta}_d + \sigma \lambda \dot{e} + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} \quad (3-37)$$

方程式經過整理後，我們得到 Eq.(3-37)中的控制項。因此我們將所設計的滑動適應性控制律帶入 Eq.(3-37)中得

$$\dot{V} = \sigma \frac{B}{J_0} \dot{\theta} + \sigma \ddot{\theta}_d - \sigma \lambda \dot{e} - \sigma ksat(\sigma) + \sigma \hat{d} - \sigma \frac{B}{J_0} \dot{\theta} + \sigma d - \sigma \ddot{\theta}_d + \sigma \lambda \dot{e} + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} \quad (3-38)$$

將 Eq.(3-38)經過整理後得到

$$\dot{V} = -\sigma \hat{d} + \sigma d + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} - \sigma ksat(\sigma) \quad (3-39)$$

由 Eq.(3-39)我們可以得到未知負載項之誤差，因此將 Eq.(3-40)整理後得

$$\dot{V} = -\sigma \tilde{d} + \tilde{d} (\dot{\tilde{d}} - \dot{d}) - \sigma ksat(\sigma) \quad (3-40)$$

接著將我們先前所設計的  $\dot{\tilde{d}} = \sigma$  代入 Eq.(3-40)中，得 Eq(3-41)。而由先前所設計的  $\tilde{d}$ ，可得知其目的是為了能夠消除 Eq.(3-39)中之系統干擾估測誤差項。使 Lyapunov 函數能夠獲得更加單純的結果

$$\dot{V} = -\sigma \tilde{d} + \sigma \tilde{d} - \tilde{d} \dot{\tilde{d}} - \sigma ksat(\sigma) \quad (3-41)$$

最後運算將 Eq.(3-41)經過整理後，得到 Lyapunov 函數經過一次微分後之結果。並將此結果以 Eq.(3-42)呈現之。而由於 Lyapunov 一次微分後結果，包含飽含函數  $sat(\sigma)$  項。因此我們必經針對飽和函數，分別進行討論

$$\dot{V} = -\left(k\sigma sat(\sigma) + \tilde{d} \dot{\tilde{d}}\right) \quad (3-42)$$

我們假設  $\tilde{d}\dot{d}$  有界，且  $|\tilde{d}\dot{d}| \leq \delta$ 。接下來討論 Lyapunov 一次微分項結果中，包含飽和函數項。因此我們針對飽和函數項，分別由兩個事件進行討論。首先討論當  $|\sigma|$  大於等於 1 時， $\text{sat}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$ 。因此 Lyapunov 一次微分式，由 Eq.(3-43) 表示

$$\dot{V} = -k|\sigma| + |\tilde{d}\dot{d}| \quad (3-43)$$

因此設計滑動增益  $k > \delta$ ，可以得到 Lyapunov 一次微分小於 0，證明系統穩定

$$\dot{V} = -k|\sigma| + |\tilde{d}\dot{d}| < 0 \quad (3-44)$$

而當  $|\sigma|$  小於 1 時， $\text{sat}(\sigma) = \sigma$ 。因此 Lyapunov 一次微分式，由 Eq.(3-45) 表示

$$\dot{V} = -k\sigma^2 + \tilde{d}\dot{d} \quad (3-45)$$

並且設計  $k > \frac{\tilde{d}\dot{d}}{\sigma^2}$ ，同樣可以得到 Lyapunov 一次微分小於 0

$$\dot{V} = -k\sigma^2 + \tilde{d}\dot{d} < 0 \quad (3-46)$$

由上述設計方法中，可以證明 Eq.(3-47)

$$k > \delta > \frac{\delta}{\sigma^2} > \frac{|\tilde{d}\dot{d}|}{\sigma^2} > \frac{\tilde{d}\dot{d}}{\sigma^2} \quad (3-47)$$

由 Eq.(3-47) 證明，同樣設計滑動增益  $k > \delta$ ，可以得到 Lyapunov 一次微分小於 0，證明系統穩定。最後我們將所得到的結果，整理出以下結論：

1. 為了確保 Lyapunov 一次微分項小於 0， $k$  必須設計為正實數且大於  $\delta$ 。
2. 由於設計  $k > \delta$ ，使得  $\dot{V} < 0$ 。證明隨著時間  $t \rightarrow \infty$  時  $V \rightarrow 0$ 。
3. 此控制器具有良好的強健性，且快速的響應時間與穩態效果。

## 第四章 實驗設備

本章節將介紹本研究當中所使用的實驗設備，『Delta 機械手臂控制系統』。在『Delta 機械手臂控制系統』當中的硬體設備包含機械手臂使用的三相無刷直流馬達、馬達控制器、馬達減速機、Delta 機械手臂之機械結構、以及電源供應器等設備。而其中『Delta 機械手臂控制系統』之硬體結構，由圖 4-1 所示

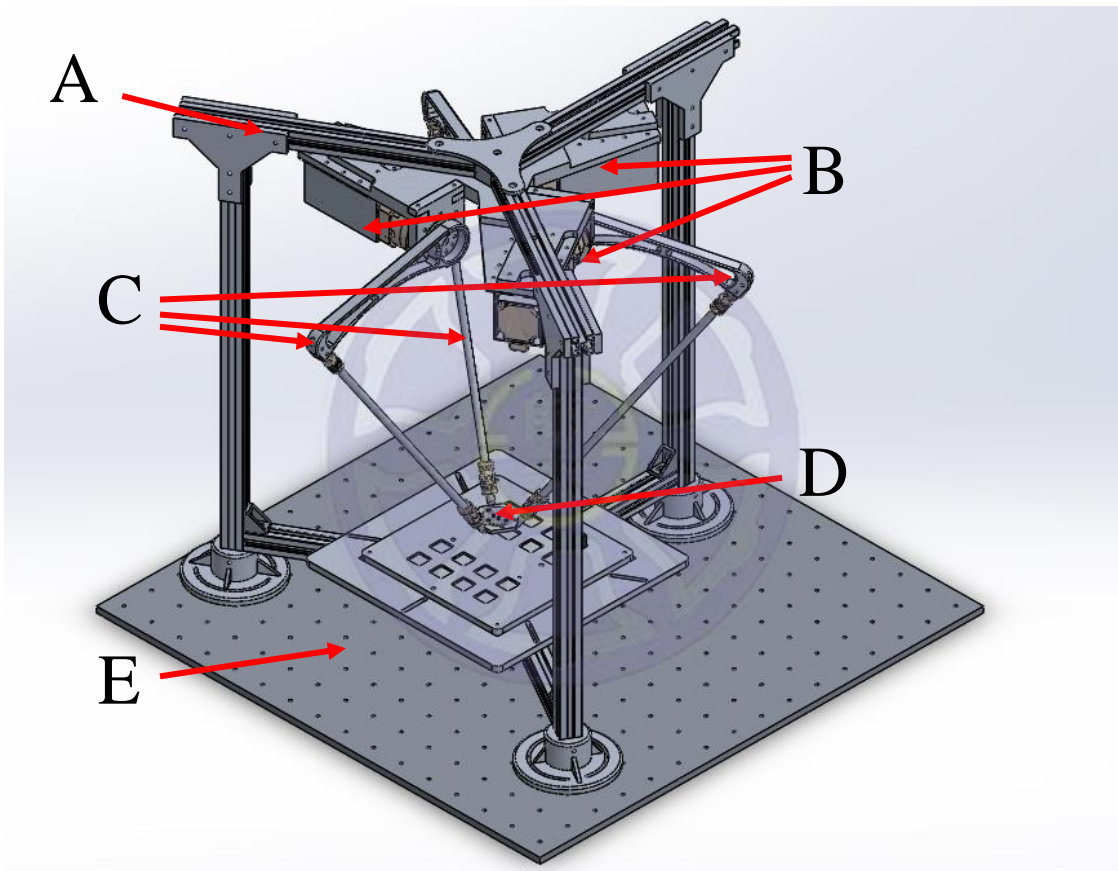


圖 4-1 Delta 機械手臂之硬體結構

- A—Delta 機械手臂外部硬體骨骼架構，Delta 手臂之骨架。
- B—Delta 機械手臂三顆三相無刷直流馬達(136198)位置。
- C—Delta 機械手臂三隻手臂位置，由上手臂與下手臂組成。
- D—Delta 機械手臂底部圓盤，其包含 Delta 手臂之移動點。
- E—Delta 機械手臂骨架固定基座。

## 4.1 Delta 機械手臂控制系統

本研究當中的『Delta 機械手臂控制系統』，其手臂的移動包含三維空間  $xyz$  軸方向的移動路徑。因此下圖 4-2 將『Delta 機械手臂控制系統』之硬體機台與設備分別由不同位置方向呈現，了解『Delta 機械手臂控制系統』不同角度所呈現出的樣式。

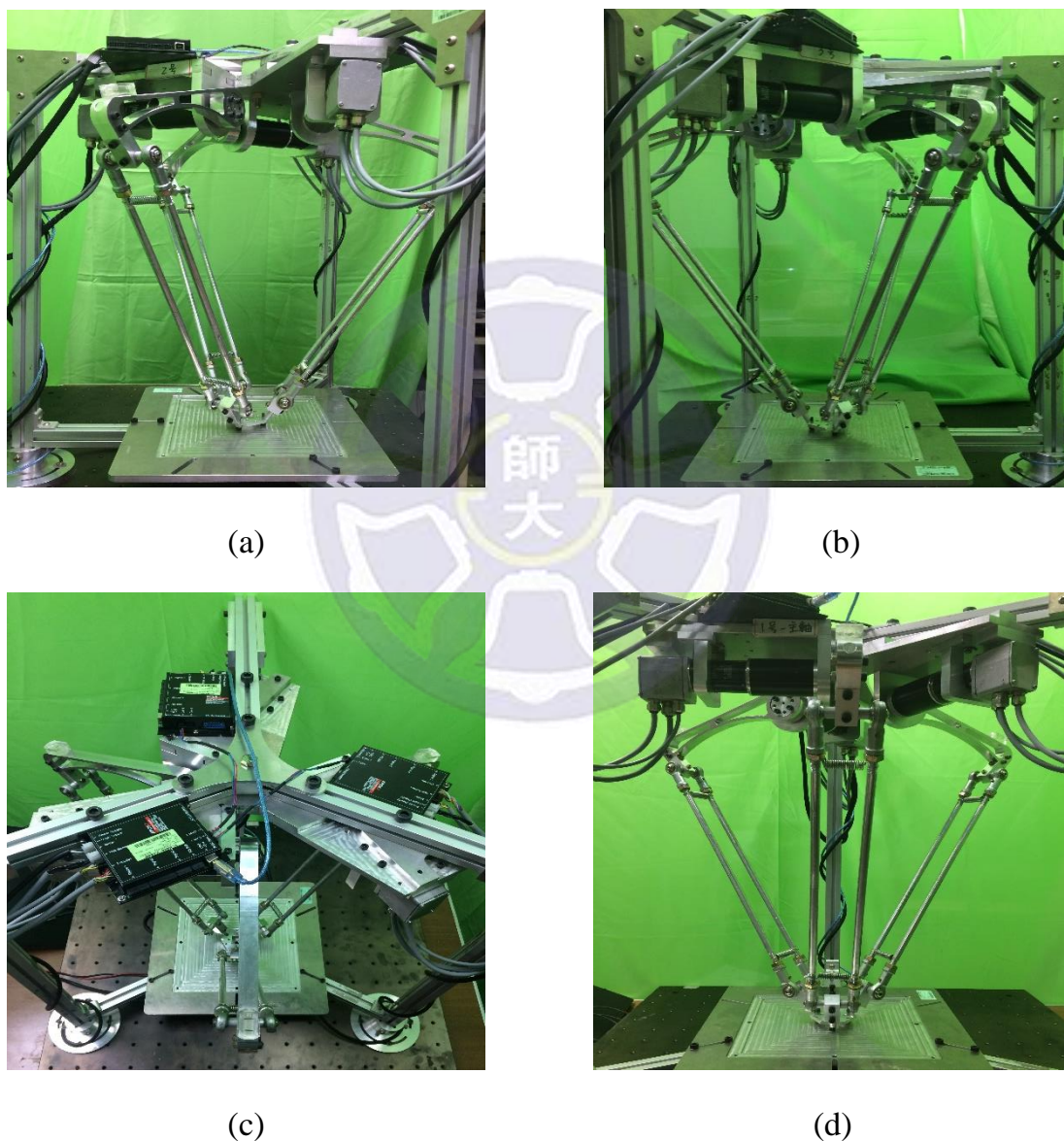


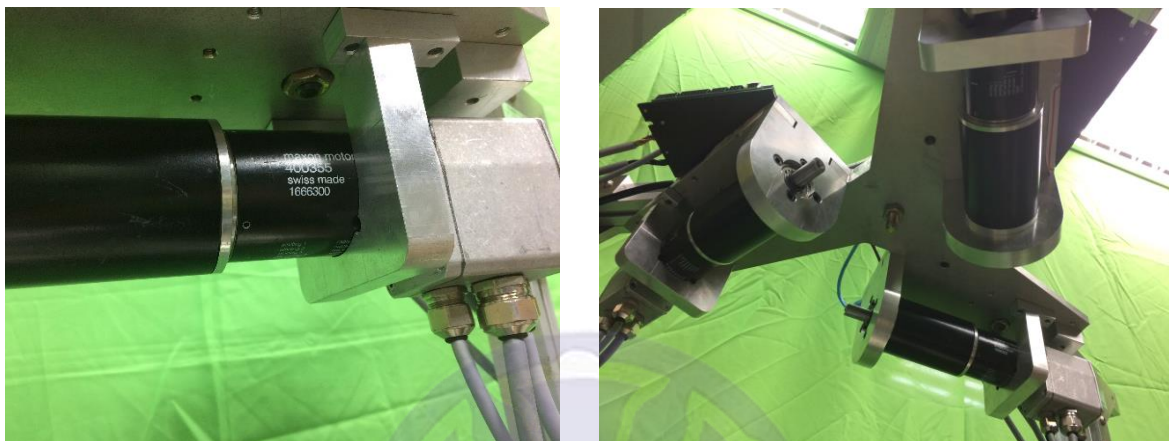
圖 4-2 Delta 機械手臂控制系統

(a) Delta 機械手臂左視圖、(b) Delta 機械手臂右視圖

(c) Delta 機械手臂上視圖、(d) Delta 機械手臂正視圖

## 4.2 Maxon EC 45 Ø45 mm 三相無刷直流馬達

三相無刷直流馬達，屬於 Delta 機械手臂當中之驅動系統。並且其為 Delta 機械手臂整體系統當中的運動核心，也是主要提供 Delta 機械手臂動力之來源。其安裝於 Delta 機械手臂之結構與位置，由下圖所示



(a) 三相無刷直流馬達側視圖

(b) 安裝於 Delta 手臂下視圖

圖 4-3 三相無刷直流馬達安裝於 Delta 機械手臂之結構圖

上述為 Delta 機械手臂之驅動結構，由三顆三相無刷直流馬達所組成。其中，此馬達選用 Maxon Motor 公司的三相無刷直流馬達，其型號為 EC 45 Ø45 mm 136198。下圖 4-4、4-5 為此三相無刷直流馬達之外觀與其尺寸規格圖。而馬達的參數與規格，如下表 4-1 所示。



圖 4-4 馬達外觀圖

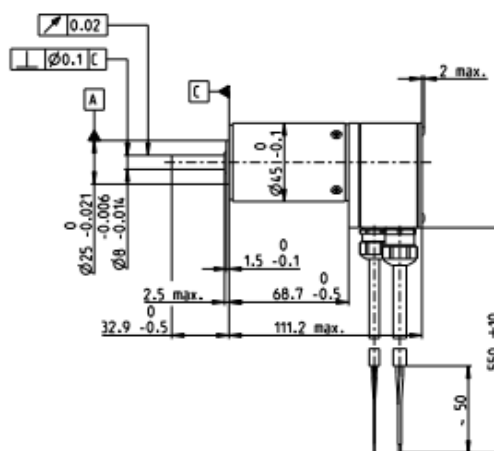


圖 4-5 馬達規格圖

表 4-1 Maxon Motor EC 45 Ø45 mm 136198 三相無刷直流馬達規格介紹

額定電壓值		
馬達規格	EC 45 Ø45 mm 馬達	計量單位
額定電壓	24	V
空轉轉速	6090	rpm
空載電流	328	mA
額定轉速	4840	rpm
額定扭力 (最大連續扭力)	183	mNm
額定電流 (最大連續電流)	5.13	A
堵轉扭力	952	mNm
啟動電流	25.6	A
最大效率	79	%
特徵值		
終端電組	0.936	$\Omega$
終端電感	0.275	mH
扭力常數	37.1	mNm/A
轉速常數	257	rpm
速度/扭力常數	6.49	rpm/mNm
機械時間常數	8.08	ms
轉子慣量	119	$gcm^2$
其他技術明細		
軸承類型	球軸承	
極對數	1	
相數	3	

### 4.3 Maxon GP 52 C Ø52 mm 行星減速機

在『Delta 機械手臂控制系統』當中，其驅動系統不只單靠三相無刷直流馬達帶動機械手臂。在驅動系統當中，三相無刷直流馬達同時連接一個減速機。其目的是為了能夠增加馬達的扭矩，因單靠馬達無法帶動機械手臂之重量。而下圖 4-6 為安裝於 Delta 機械手臂上的驅動器，由圖中可以看到馬達前端連接的減速機。

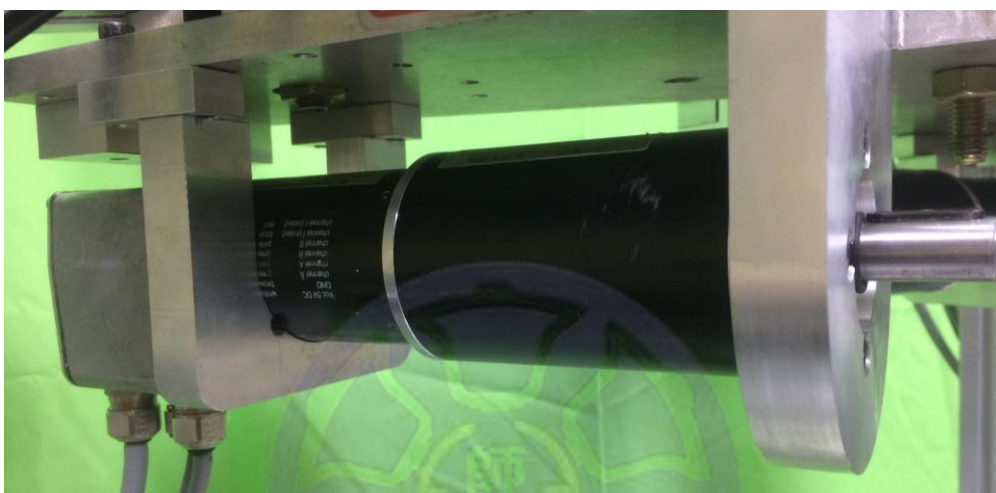


圖 4-6 三相無刷直流馬達連接減速機實體圖

我們所採用之減速機同為 Maxon 公司所生產，其型號為 GP 52 C Ø52 mm 223101。而此減速機在出廠中，就直接配置在馬達上。連接方法為馬達小齒輪為減速機第一段輸入齒輪，並固定於馬達軸上。下圖 4-7、4-8 為減速機示意圖。



圖 4-7 減速機外觀圖

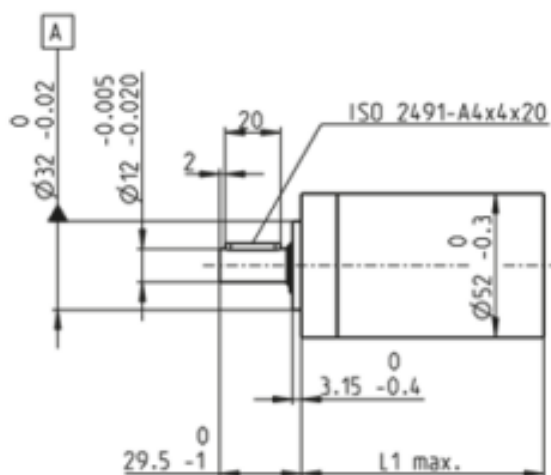


圖 4-8 減速機規格圖

而 Maxon GP 52 C Ø52 mm 223101 行星減速機之各樣參數、規格與特性，將由下表 4-2 詳細的呈現。

表 4-2 Maxon GP 52 C Ø52 mm 223101 行星減速機規格介紹

一般資料		
減速機款式	GP	
外徑	52mm	
減速機變異	陶瓷型號	
減速機規格	GP 52 C Ø52 mm 減速機	計量單位
減速比	230:1	
絕對減速比	8281/36	
最大馬達軸徑	10	mm
階數	4	
最大連續運轉扭力	30	Nm
瞬間容許扭力	45	Nm
最大效率	68	%
空載平均背隙	1	°
慣量	16.8	$gcm^2$
減速機長度 (L1)	92	mm
最高傳輸功率(連續)	82	W
最高傳輸功率(順時)	120	W
技術規格		
最大軸向負載(動態)	200	N
最大輸入轉速	6000	rpm
重量	920	g

#### 4.4 Maxon EPOS2 50/5 馬達驅動器

數位定位控制系統，為三相無刷直流馬達的電力與動力來源。在本研究當中選擇了美國 Maxon 公司所生的『數位定位控制系統』，作為本研究當中三相無刷直流馬達之驅動器。其型號為 EPOS2 50/5，下圖 4-9、4-10 則為其實體圖。



圖 4-9 馬達驅動器實體圖



圖 4-10 馬達驅動器裸視圖

此『數位定位控制系統』與馬達之間之通訊方式可分為三種不同型態的資料傳輸方法，分別為 USB、RS232 與 CANopen 等方法來傳輸人機介面之訊號。而在主控端部分，可以選擇 C#、C++、Labview 等程式語言與圖形化介面作為輸入端。此『數位定位控制系統』皆可以接收各樣程式語言之訊號，並且透過多層次傳輸控制方法，分別給予三顆三相無刷直流馬達控制訊號，如下圖 4-11 所示。

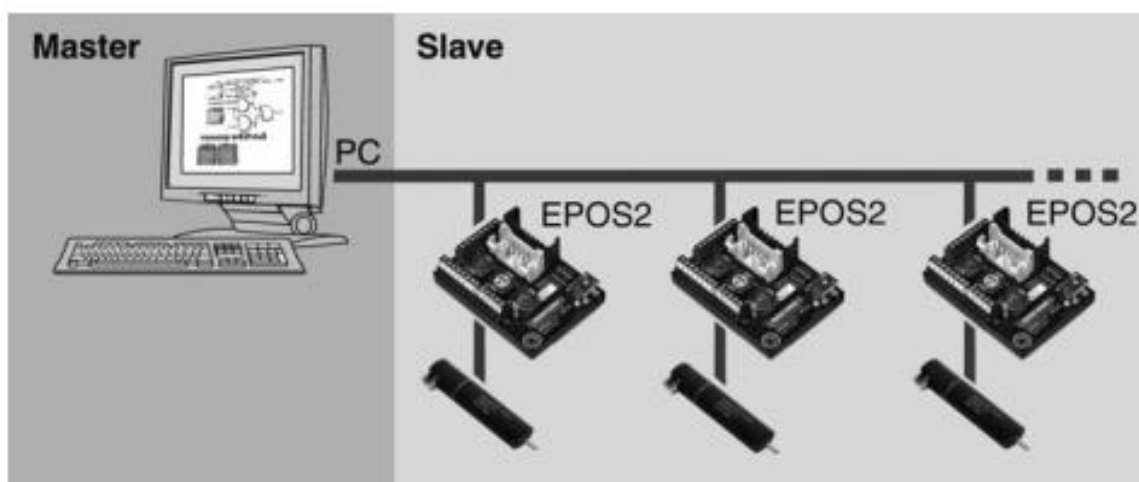


圖 4-11 多層次傳輸控制

另外再 I/O 傳輸的方面，Maxon EPOS2 50/5 『數位定位控制系統』提供了總共十三組 inputs 和六組 outputs。其中在 inputs 部分，有十一組 inputs 為數位訊號輸入，另外兩組 inputs 訊號則為模擬訊號輸入。而在 outputs 訊號當中，有五組 outputs 為數位訊號輸入，另外一組則為模擬訊號輸入。其中各個 port 包含 Power Supply 11-50VDC、Logic Supply 11-50VDC(optional)、Motor 控制、Hall sensor、Encoder、CAN、USB、RS232 和 I/O 輸入。在馬達控制部分，此『數位定位控制系統』也可以針對 Maxon 公司的 DC 和 EC 馬達進行點對點的單元控制。而對於本研究所使用之三相無刷直流馬達，此『數位定位控制系統』可以將交流電切換為三相 UVW 馬達動力線。『數位定位控制系統』，需要藉由電源供應器提供所需之電壓與電流，最後再由此『數位定位控制系統』給予所控制之馬達相對應之輸出。而此『數位定位控制系統』各樣控制方法與接線圖，由下圖 4-12 所示。

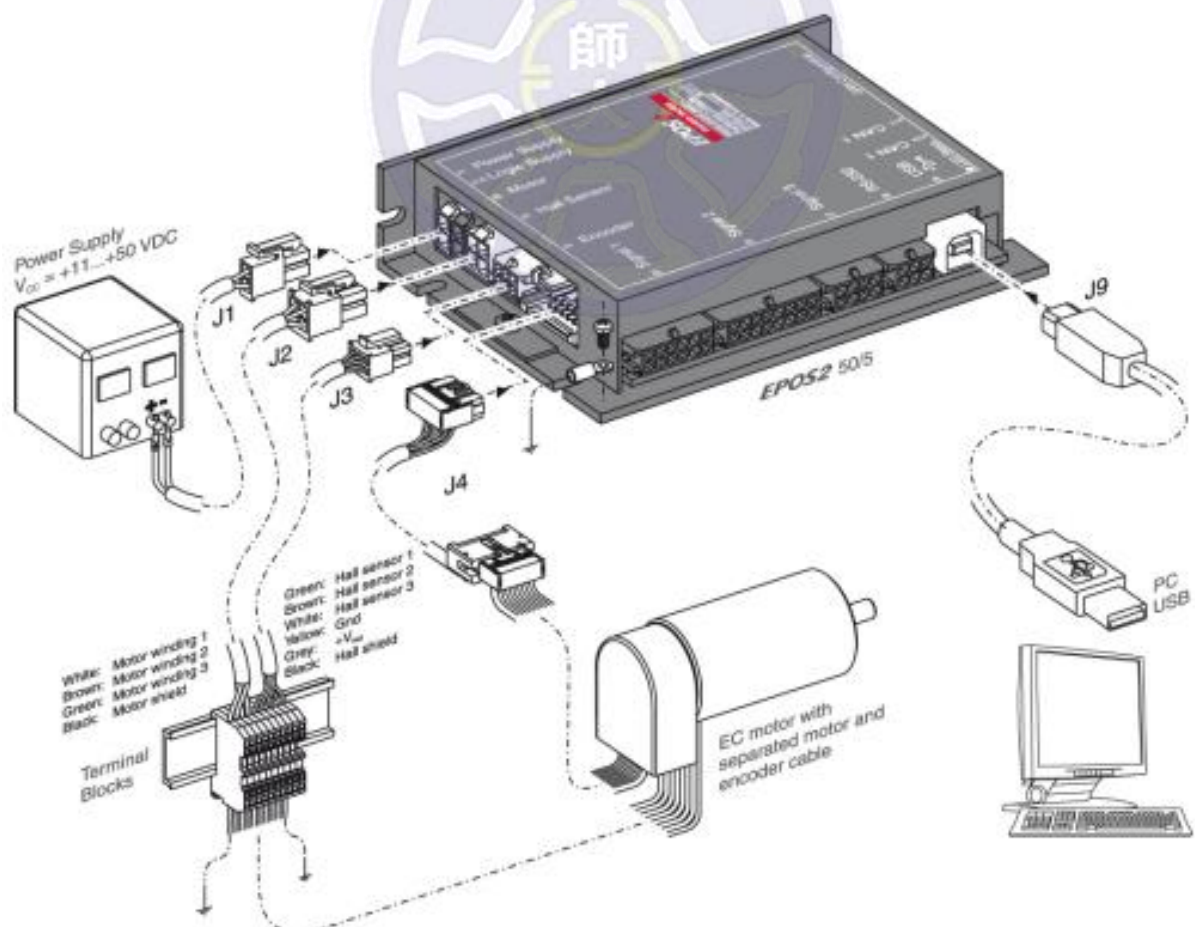


圖 4-12 數位定位控制器功能與接線圖

#### 4.5 Twintex TP-2305 電源共應器

在整個 Delta 機械手臂系統當中，本研究在電源供應的所採用的是 Twintex 公司所生產的電源共應器，其型號為 TP-2305。其外觀圖樣式，由圖 4-13 所示。在應用上，此電源共應器具有兩組 0~30V，0~3A/5A 可調輸出與一組固定 5V/3A 輸出。並且具有定電壓、定電流的的操作功能，在內部使用上可以自動串聯和並聯同步操作並可預設電壓電流值。並同時具有過載，極性反向保護功能。因此提供 Delta 機械手臂控制系統，穩定電壓電流輸出。而其詳細規格，由下表 4-3 所示。



圖 4-13 Twintex TP-2350 電源共應器

表 4-3 Twintex TP-2305 電源共應器規格

Twintex TP-2305	
輸出電壓	兩組 0~30V
輸出電流	兩組 0~3A
固定輸出	5V/3A
線性調節律	$\leq 0.01\% + 3mV$

## 第五章 實驗結果與討論

經過本研究控制器設計過後，本章將以本研究所設計的分別三種控制器，進行比較。分別是滑動控制器（SMC）使用 `sgn()` 函數、滑動控制器使用 `sat()` 函數、與滑動適應性控制器。針對三樣控制器的響應時間、穩態誤差、收斂結果等控制器的效能進行比較。本實驗將以快速的穩態響應、低穩態誤差以及強健的控制效果作為本研究之目標。各樣控制器的響應效果，將以 Matlab 軟體圖 5-1 呈現之。

而在 Delta 機械手臂控制系統中，本實驗採用 Visual Studio C# 程式語言如圖 5-2 所示，撰寫 UI 介面，設計 Delta 機械手臂之控制介面方法。其中包含了 Delta 機械手臂的位置定位、路徑規劃、以及 Delta 機械手臂復歸起始狀態等方法。

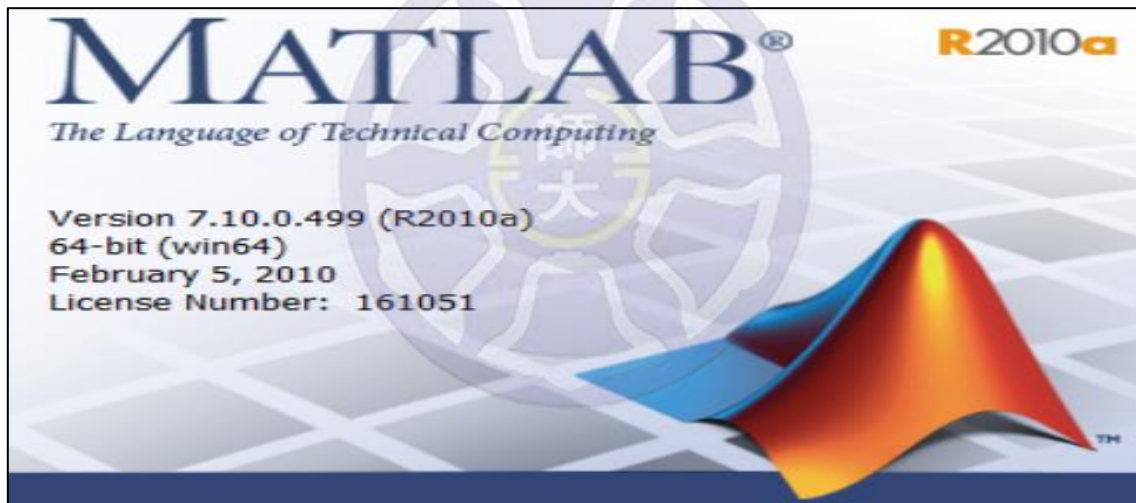


圖 5-1 Visual Studio 2015 軟體

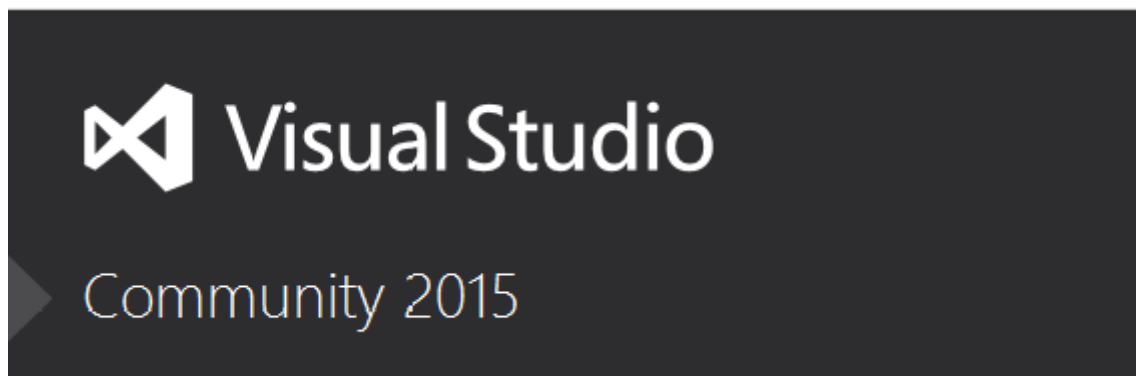


圖 5-2 MATLAB – R2010a 軟體

## 5.1 控制器追跡響應

下圖中，我們可以比較分別三個控制器的追跡響應。本實驗的目標為一個 0~3 秒的  $\sin$  函數，設計系統的起始位置為  $[1, 0]$ ，並在三個控制器使用同樣滑動增益  $k=0.35$  情況下進行討論。圖 5-1 為使用滑動控制器  $\text{sgn}()$ ，由響應結果可以看出在收斂速度與穩態時並沒有相當好的效果。而在使用  $\text{sat}()$  後圖 5-2，可以看出加快了收斂速度。最後再加入適應控制後，圖 5-3 可以看出良好響應結果。

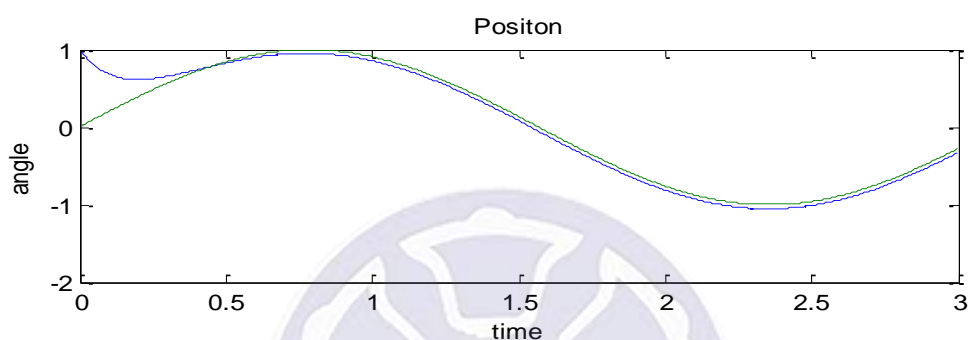


圖 5-3 滑動模式控制器使用  $\text{sgn}()$  函數追跡響應

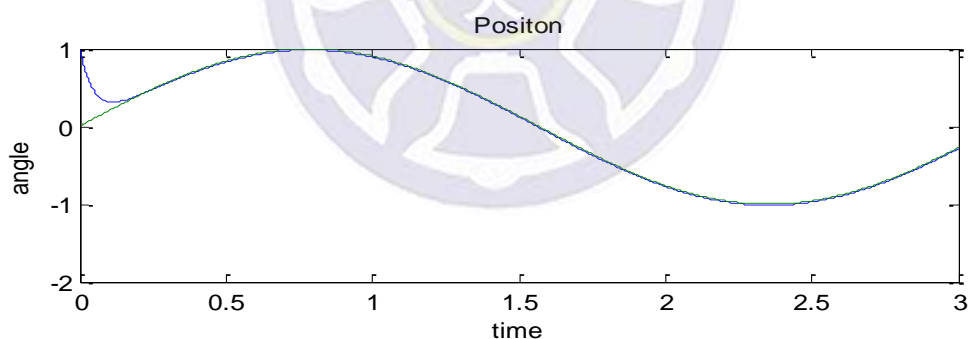


圖 5-4 滑動模式控制器使用  $\text{sat}()$  函數追跡響應

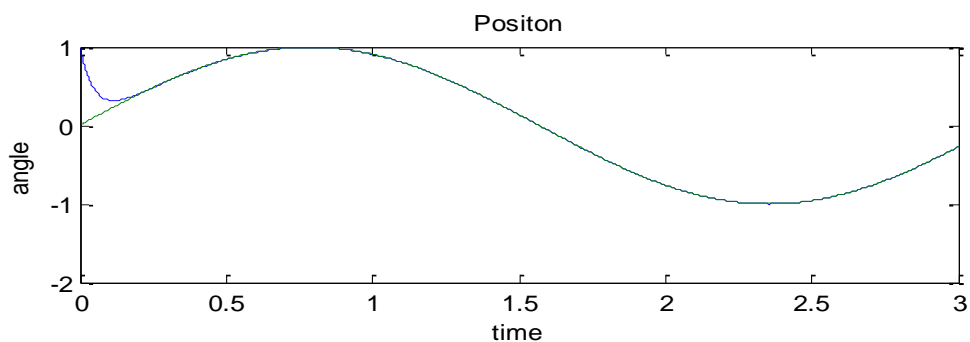


圖 5-5 滑動適應性控制器追跡響應

下圖 5-4、5-5、5-6，分別為三個控制器的控制量結果。由圖中可得知當滑動控制使用  $\text{sgn}()$  函數時，會造成巨大的震盪現象，使系統在穩太時不穩定。而當我們將  $\text{sgn}()$  函數以  $\text{sat}()$  函數替代時，如圖 5-5、5-6 所示。滑動模式的震盪現象，則被抑制。

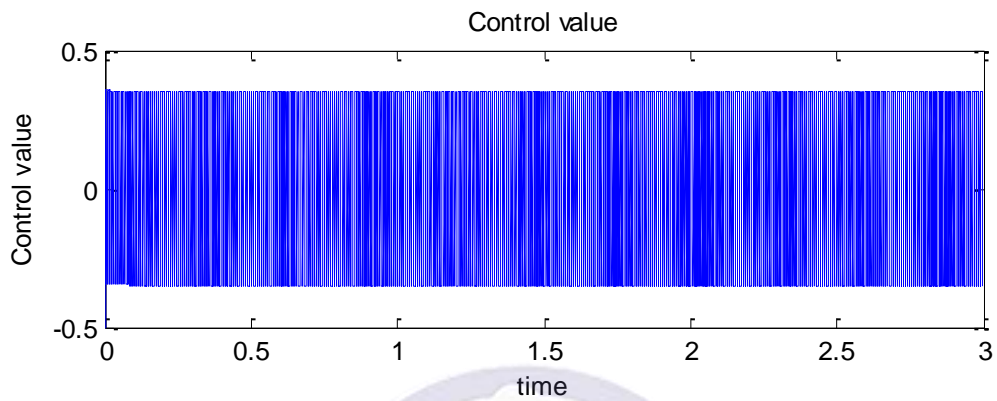


圖 5-6 滑動模式控制器使用  $\text{sgn}()$  函之數控制量

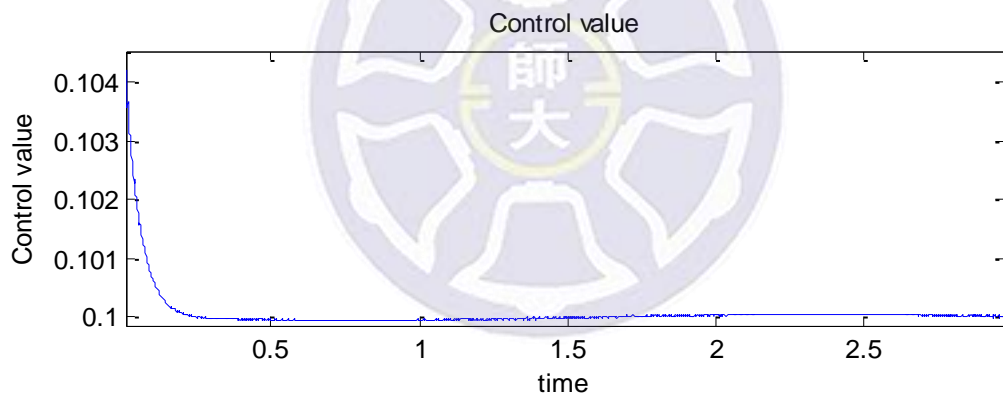


圖 5-7 滑動模式控制器使用  $\text{sat}()$  函數之控制量

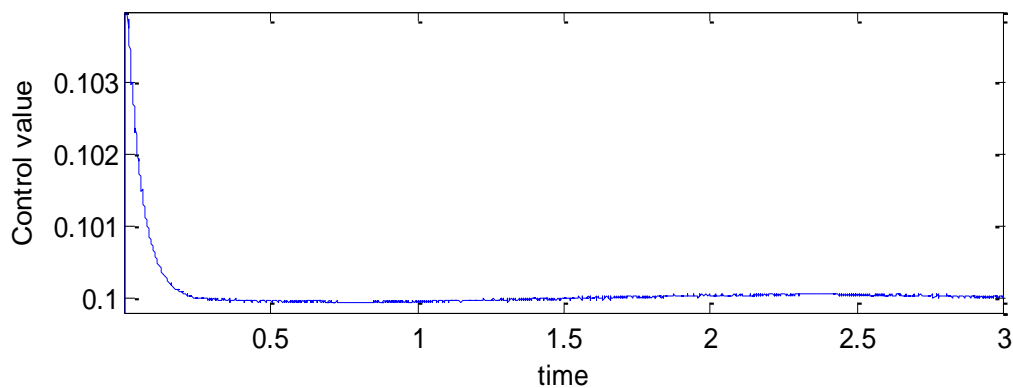


圖 5-8 滑動適應性控制器之控制量

圖 5-7 可看出，相同增益下誤差無法收斂至 0，並有震盪現象。圖 5-8 移除震盪現象，但誤差還是沒收斂至 0。而圖 5-9 加入適應控制，給予補償後誤差收斂。

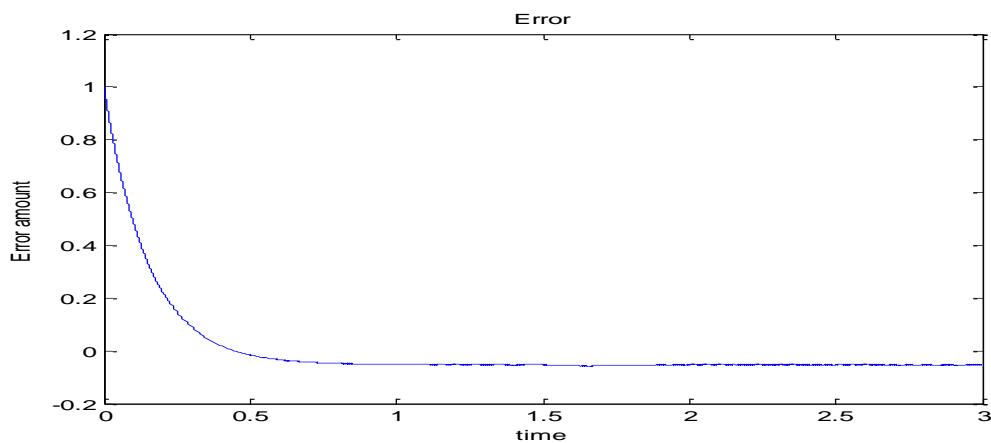


圖 5-9 滑動模式控制器使用  $\text{sgn}()$  函數之誤差

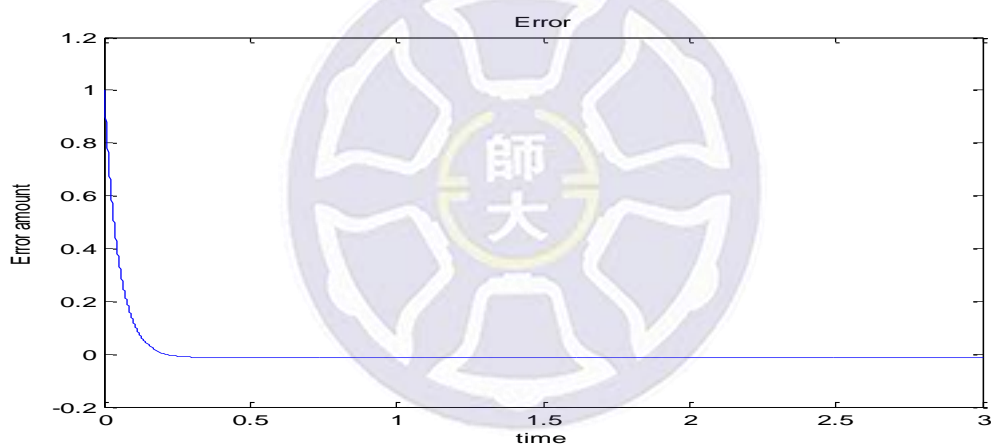


圖 5-10 滑動模式控制器使用  $\text{sat}()$  函數之誤差

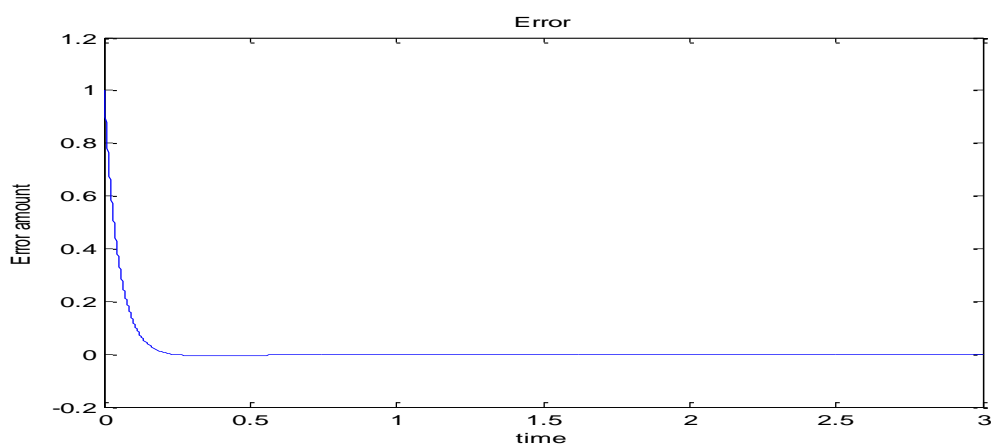


圖 5-11 滑動適應性控制器之誤差

最後則為滑動平面，在圖 5-10 當中可看出當系統進入滑動平面時，產生巨大的震盪現象。圖 5-11、5-12 則可看出，當系統進入滑動平面時，抑制了震盪現象。

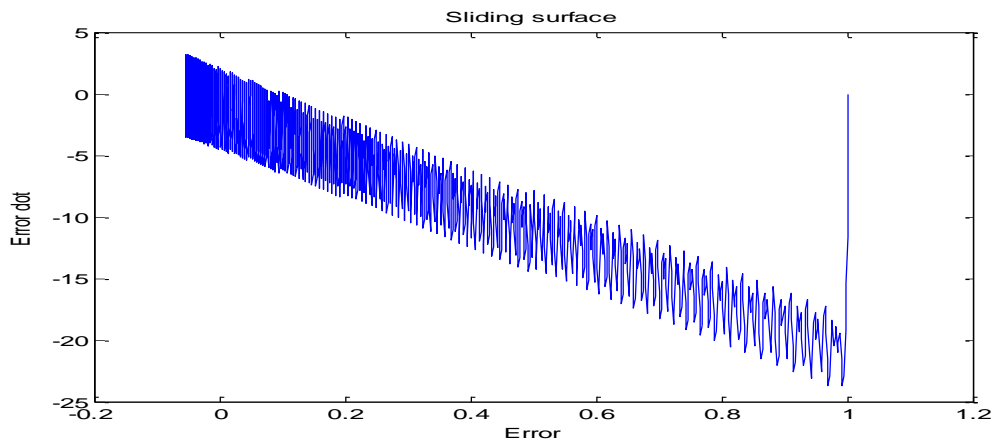


圖 5-12 滑動模式控制器使用 sgn()函數之滑動平面

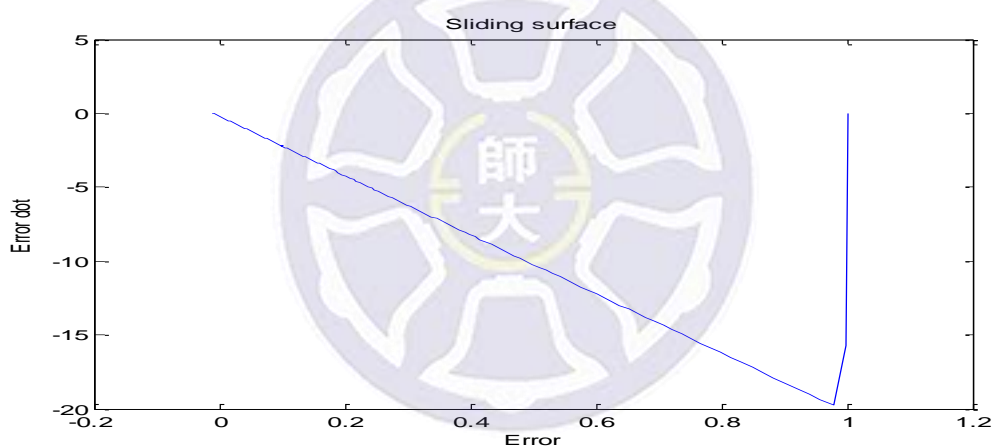


圖 5-13 滑動模式控制器使用 sat()函數之滑動平面

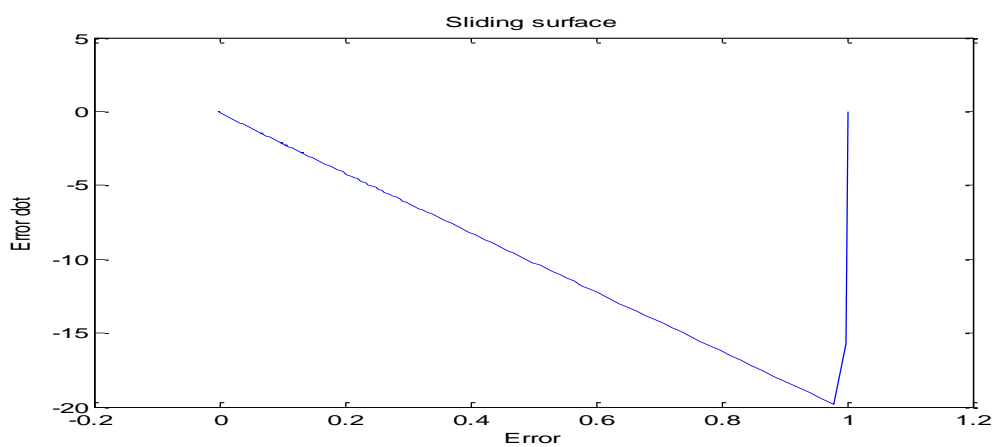


圖 5-14 滑動適應性控制器之滑動平面

## 5.2 Delta 機械手臂控制介面

Delta 機械手臂系統的 UI 控制介面，是由 Microsoft Visual Studio 運用 C# 程式語言所開發。本研究所開發的 UI 介面，如下圖 5-15 所示。其介面輸入包含通訊方式選擇、馬達角度輸入、馬達位置輸入、Delta 機械手臂末端點位置輸入、空間座標與馬達角度轉換、馬達相對位置與絕對位置轉動方法、馬達起始角度與目前移動角度顯示，與三個不同軌跡的移動路徑按鈕設計。

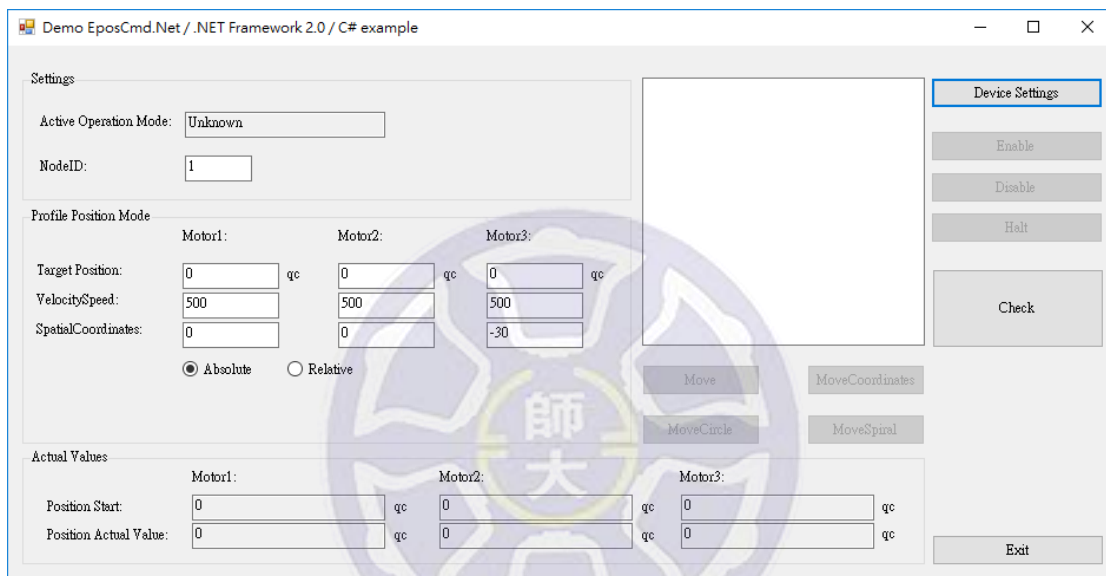


圖 5-15 Delta 機械手臂系統 UI 控制介面

下圖 5-16 則是 UI 介面在啟動時，通訊方式與控制器的選擇。由圖中可以看到本實驗運用 EPOS2 控制器，且用 USB 方式通訊。而圖 5-17 則是由 Delta 機械手臂空間座標系統設定，轉換馬達角度之顯示。

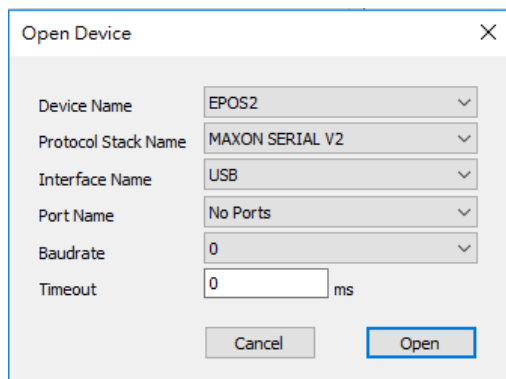


圖 5-16 通訊方式選擇

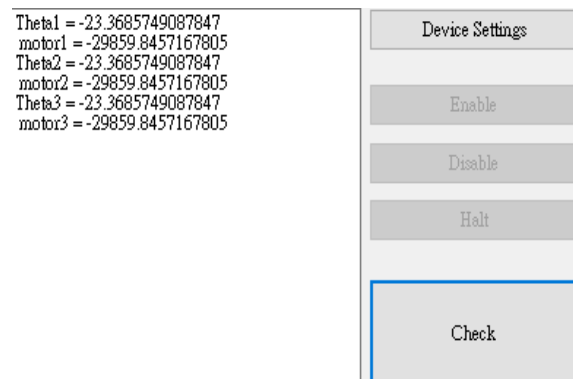


圖 5-17 馬達角度輸出

### 5.3 Delta 機械手臂路徑規劃之軌跡追蹤

由單顆馬達控制器響應結果，可得本研究所設計的滑動適應性控制器具有良好的響應結果。因此我們將本研究之控制器，分別帶入 Delta 機械手臂系統中之三顆馬達當中，觀測手臂在追蹤圓軌跡之控制器響應結果。

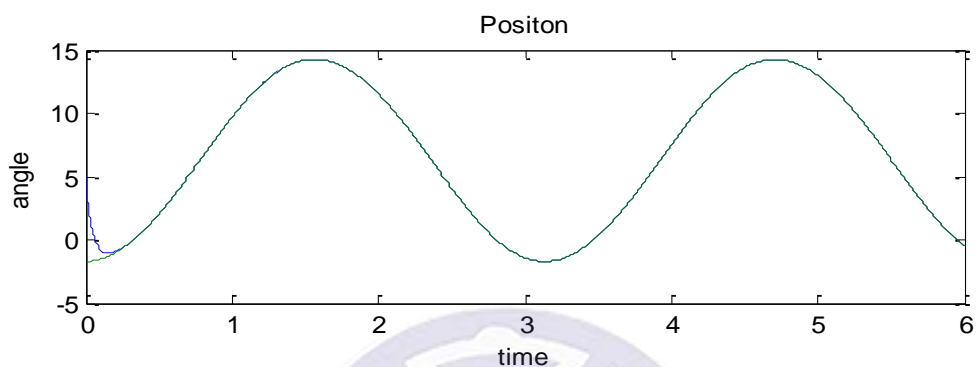


圖 5-18 機械手臂第一軸馬達滑動適應性控制圓軌跡追蹤響應

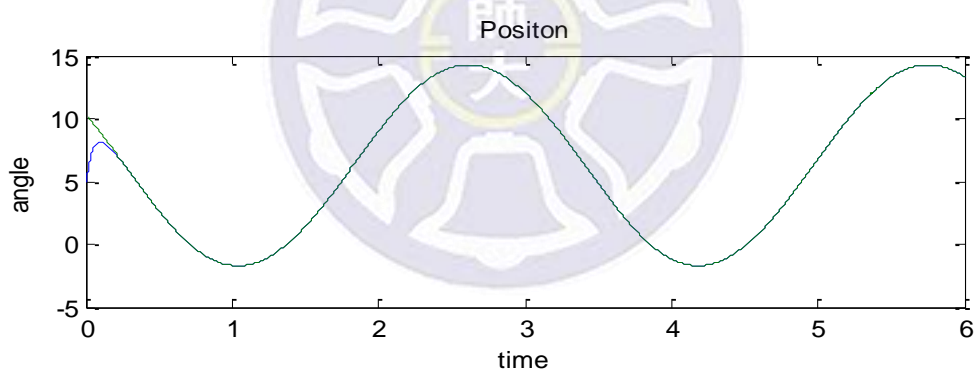


圖 5-19 機械手臂第二軸馬達滑動適應性控制圓軌跡追蹤響應

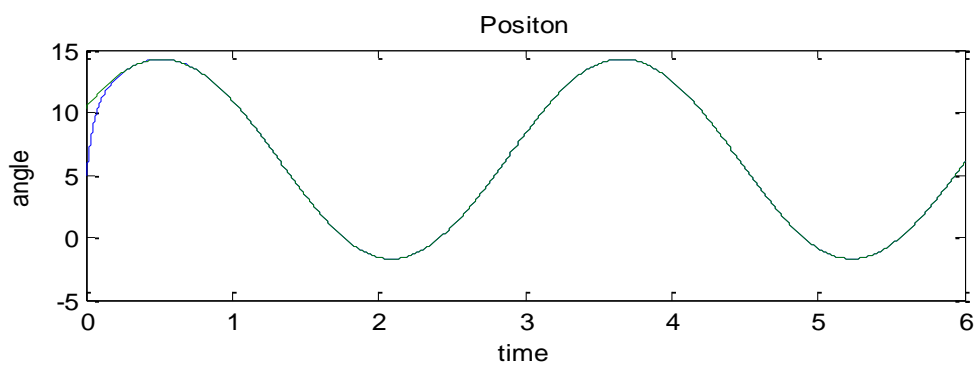


圖 5-20 機械手臂第三軸馬達滑動適應性控制圓軌跡追蹤響應

由圖 5-21、5-22、5-23 顯示為 Delta 機械手臂中第一軸、第二軸、第三軸三相無刷馬達。再針對圓軌跡追蹤時，之滑動適應性控制器輸出控制量。

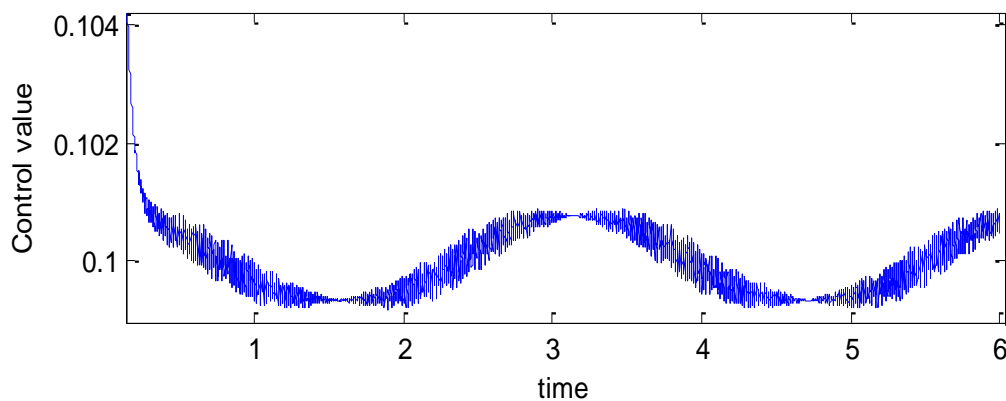


圖 5-21 機械手臂第一軸馬達滑動適應性控制圓軌跡追蹤馬達控制量

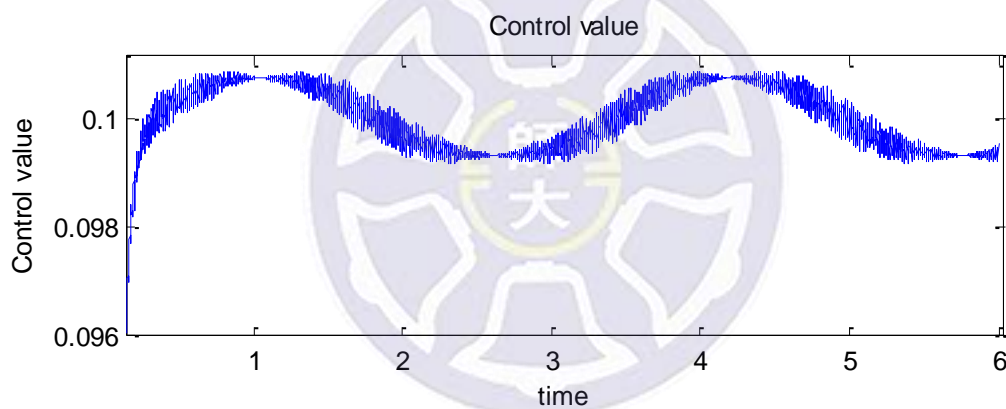


圖 5-22 機械手臂第二軸馬達滑動適應性控制圓軌跡追蹤馬達控制量

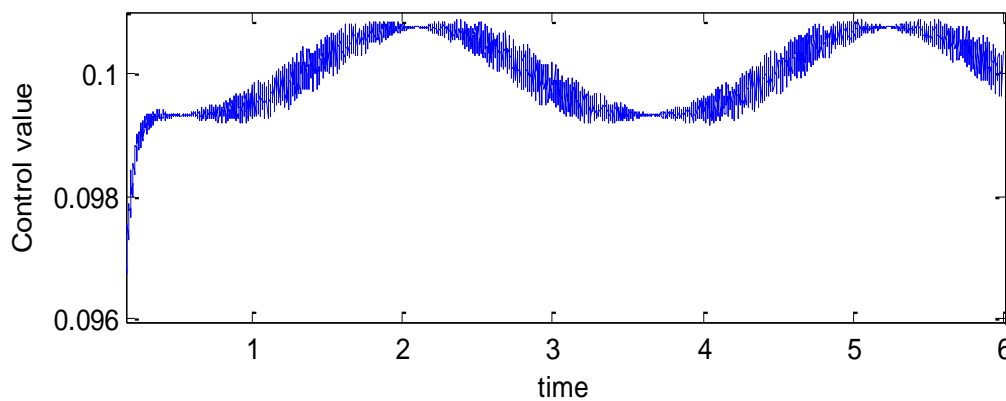


圖 5-23 機械手臂第三軸馬達滑動適應性控制圓軌跡追蹤馬達控制量

### 5.3 Delta 機械手臂末端點劃圓實驗

由先前的實驗，我們驗證了控制器對 Delta 機械手臂的控制性能。接下來我們要驗證 Delta 機械手臂末端點位置的控制性能，藉由此實驗驗證 Delta 機械手臂之控制效能與逆向運動學之正確性。實驗的輸入命令方式為針對 Delta 機械手臂 XYZ 軸座標點進行控制，本實驗使用圓軌跡為命令之輸入。其數學方程式為 Eq.(5-1)所示，其中  $r$  代表圓之半徑  $\omega$  則是圓軌跡之劃圓速度，而機械手臂之  $z$  軸，則以固定高度  $h$  來表示。

$$\begin{aligned}x &= r \times \cos(\omega \cdot t) \\y &= r \times \sin(\omega \cdot t) \\z &= h\end{aligned}\quad (5-1)$$

本實驗以半徑為 5 公分之圓，為 Delta 機械手臂之追蹤目標。下圖 5-24 為 Delta 機械手臂之命令輸入路徑，而圖 5-25 則是實際實驗之驗證結果。由驗證結果可以明顯看出，隨著時間進行 Delta 機械手臂擁有良好的追蹤響應。

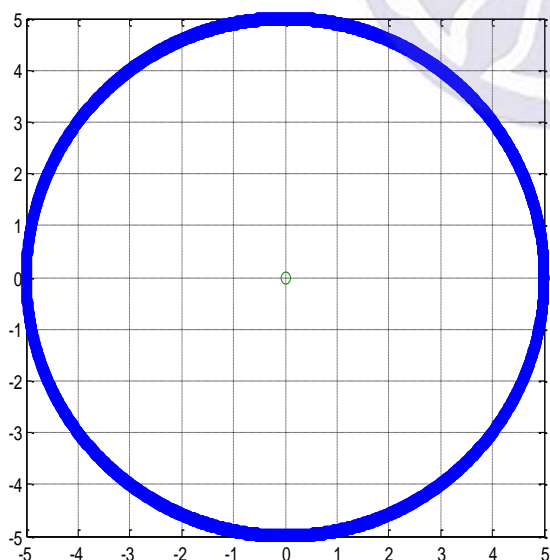


圖 5-24 Delta 手臂圓路徑命令

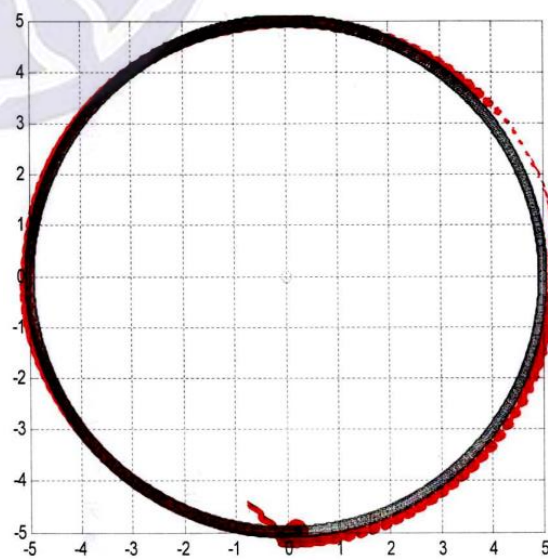


圖 5-25 Delta 手臂圓路徑實驗

## 第六章 結論與未來展望

本論文針對 Delta 機械手臂空間定位，與路徑規畫進行研究。並且在 Delta 機械手臂上之馬達，進行位置控制器設計，其中運用滑動性適應控制方法。

而整個 Delta 機械手臂系統當中，可以分為三大架構順序。首先是針對 Delta 機械手臂當中所使用的三相無刷直流馬達，進行位置控制器的設計，使馬達的轉動位置可以更加的精準。在位置控制器設計當中，我們運用了滑動性適應控制。而此控制器最大的特色是此控制器擁有滑動性控制良好的強健性，響應時間等優點，並且同時擁有適應控制當中，針對位置項目估測的特色。此滑動性適應控制器，不僅強健且有好的響應效果，更因為加入適應控制使系統能夠直接估測出系統當中的附載，也讓硬體設計上省去了增加附載估測器的成本。在確認馬達轉動位置的效能，與精準度後。第二步則是針對 Delta 機械手臂系統，進行機械運動學的推導。本研究在 Delta 機械手臂推導當中，運用了數值解方法來證明 Delta 機械手臂之逆向運動學。而本研究所使用的數值解方法雖然運算過程較為複雜，但最後得到的結果相對單純明瞭。因此藉著我們所推導出 Delta 機械手臂之逆向運動學，我們可以由 Delta 機械手臂系統中的空間座標點回推得到 Delta 機械手臂上的馬達所需要轉動之角度，使 Delta 機械手臂末端點可以移動至理想目標位置。在完成控制器設計，確保馬達轉動的精準度。Delta 機械手臂逆向運動學推導，確認 Delta 機械手臂系統空間點座標後。我們可以證明 Delta 機械手臂系統，完成了精確定位系統。最後當完成 Delta 機械手臂之定位系統，本研究針對 Delta 機械手臂系統的移動，進行路徑規劃。藉由 Delta 機械手臂系統之路徑規劃，建構出 Delta 機械手臂末端點所要移動的各個點位置，結合本研究所完成的定位系統完整的建構 Delta 機械手臂的移動路徑。

而本研究也針對 Delta 機械手臂系統，針對下列幾點項目進行更深入的研究與提升，使整個 Delta 機械手臂系統有更加優秀的完整度。

第一點：Delta 機械手臂系統在輸出控制的部分，本文所使用的三相無刷直流馬達雖然已經結合了 Maxon EPOS2 50/5 馬達驅動器，但在不同的馬達轉動速度的切換流程當中，仍然使整體速度曲線之平滑度不足。特別是在馬達速度提升時，馬達所產生的反電動勢也會同時使馬達扭力下降。這是未來針對三相無刷直流馬達速度控制上，可以更加深入探討研究的地方。

第二點：在外在干擾之回授、馬達內部摩擦力、與 Delta 機械手臂上附載，皆是影響整個 Delta 機械手臂系統運作的關鍵。雖然在本研究當中使用了高階的滑動適應性控制器來穩定系統，但針對動態改變的附載，適應控制能估測出附載之效果仍然有限。因此在適應控制的運用上，更大強健的適應控制對於馬達控制將有舉足輕重的影響力。

第三點：在 Delta 機械手臂系統當中，沒有針對三顆三相無刷直流馬達之賦歸圓點之感測器。因此在 Delta 機械手臂整體定位系統當中，需要藉著相對位置的推算估測出空間中點位置。因此會造成在定位過程當中，出現細微的誤差。因此未來在 Delta 機械手臂硬體架構上，可以增加三個賦歸位置之感測器，使整體系統定位更加精準。

第四點：在 Delta 機械手臂系統當中，本研究已經完成了定位、路徑規劃、位置控制等工作。但在產業界中機械手臂實際的運用，還是會受到限制。因此未來可以針對 Delta 機械手臂影像辨識部分，進行深入的研究，並運用在整體 Delta 機械手臂系統當中。使的 Delta 機械手臂系統在實際運用上，有更好的完整性與實用性。

在 Delta 機械手臂系統當中，本研究已經完成了主要系統運作之工作。但針對 Delta 機械手臂整體系統當中，還是有許多我們可以改善與創新的地方。並仍有許多細節可以提升整體的運作效能，與實用性。而在本研究實際的實驗與實踐當中，審密的思考、竭盡所能的解決問題就是整個研究過程，帶給我最大的收穫、結論與未來展望。

## 參考文獻

- [1] Xuewen Yang, Zuren Feng, Chenyu Liu, and Xiaodong Ren, “A Geometric Method for Kinematics of Delta Robot and its Path Tracking Control,” *International Conference on Control Automation and System*, Gyeonggi-do, Korea, Oct. 2014, pp.509-514.
- [2] Atushi Ishigame, Tadashi Furukawa, Shunji Kawamoto, and Tsuneo Taniguchi, “Sliding Mode Controller Design Based on Fuzzy Inference for Nonlinear System,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, Feb. 1993.
- [3] Oscar Barambones, Patxi Alkora, Jose Maria Gonzalez de Durana, and Enrique Kremers, “A Robust Position Control for Induction Motors using a Load Torque Observer,” *Mediterranean Conference on Control and Automation*, Barcelona, Spain, pp.278-283. July. 2012.
- [4] Oscar Barambones, and Patzi Alkorta, “Position Control of the Induction Motor Using an Adaptive Sliding-Mode Controller and Observers,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 12, pp. 6556-6565, Dec. 2014.
- [5] 吳士瑜，「電動載具之研製」，南臺科技大學，碩士論文，中華民國一百零二年。
- [6] 王明賢、王志鴻、吳士瑜、許富順，”開發單 CPU 雙軸無刷伺服驅控系統制”，2013 台灣智慧型機器人研討會，國立成功大學，台灣台南，pp.127-131，2013 年 5 月 31 日至 6 月 2 日。

- [7] Renato Carlson, Michel Lajoie-Mazenc, and Joao C. dos S. Fagudes, "Analysis of Torque Ripple Due to Phase Commutation in Brushless dc Machines," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 28, no. 3, pp.632-638, May/June. 1992.
- [8] Changliang Xia, Yingfa Wang, and Tingna Shi, "Implementation of Finite-State Model Predictive Control for Commutation Torque Ripple Minimization of Permanent-Magnet Brushless DC Motor," *Journal of the American statistical association*, vol. 44, no. 247, pp. 335-341, Sep. 1949.
- [9] Gyorgy Max, Bela Lantos, "Adaptive Formation Control of Autonomous Ground Vehicles in Leader-Followe Structure," *IEEE International on Computational Intelligence and Informatics*, Budapest, Hungary, November. 2016, pp.000013-000017
- [10]Yih-Guang Leu, Tsu-Tian Lee, and Wei-Yen Wang, "On-Line Tuning of Fuzzy-Neural Network for Adaptive Control of Nonlinear Dynamical System," *IEEE Transactions on systems, Man, And Cybernetics-Part B*, vol. 27, no. 6, pp. 335-341, December. 1997.
- [11]Chi-Hsu Wang, Han-Leih Liu, and Tsung-Chih Lin, "Direct Adaptive Fuzzy-Neural Control With State Observer and Supervisory Controller for Unknown Nonlinear Dynamical Systems," *IEEE Transactions of Fuzzy Systems*, vol. 10, no. 1, February. 2002.
- [12]Li-Xin Wang, "Stable Adaptive Fuzzy Control of Nonlinear Systems," *IEEE Transactions on Fuzzy System*, vol. 1, no. 2, May. 1993.
- [13]Jaemin Baek, Maolin Jin, and Soohee Han, "A New Adaptive Sliding-Mode Control Scheme for Application to Robot Manipulators," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 6, June. 2016.

- [14]Ricardo Martinez, Oscar Castillo, Luis T. Aguilar, “Optimization of interval type-2 fuzzy logic controller for a perturbed autonomous wheeled mobile robot using genetic algorithms,” *Division of Graduate Studies and Research*, Tijuana, Mexico.
- [15]Jie Zhang, Min Wu, Shi-Huan Chen, Jin-Hua She, and Yong He, “Design of a modified repetitive control system using state feedback based on two-dimensional hybrid model,” *Joint 48<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control and 28<sup>th</sup> Chinese Control Conference Shanghai*, P.R. China, December 16-18, 2009.
- [16]Zhaowei Qiao, Tingna Shi, Yindong Wang, Yan Tan, Changliang Xia, and Xiangning He, “New Sliding-Mode Observer for Position Sensorless Control of Permanent-Magnet Synchronous Motor,” *IEEE Transactions on Industrial electronics*, vol. 60, no. 2, February. 2013.
- [17]Xiaoguang Zhang, Lizhi Sun, Ke Zhao, and Li Sun, “Nonlinear Speed Control for PMSM System Using Sliding-Mode Control and Disturbance Compensation Techniques,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 28, no. 3, March. 2013.
- [18]MENG Wei, GUO Chen, LIU Yang, ZHANG Shanshan, “Global sliding mode based trajectory tracking control for underactuated surface vessels with uncertain dynamics,” *Proceedings of the 31<sup>st</sup> Chinese Control Conference*, Hefei, China, July 25-27. 2012.
- [19]Wei-Yen Wang, Yih-Guang Leu, and Chen-Chien Hsu, “Robust Adaptive Fuzzy Control of Nonlinear Dynamical Systems Using Generalized Projection Using Generalized Projection Update Law and Variable Structure Controller,” *IEEE Transactions on System*, vol. 31, no. 1, February. 2001.