

國立臺灣師範大學理學院數學系

碩士論文

Department of Mathematics

College of Science

National Taiwan Normal University

Master's Thesis

初探運用 ChatGPT 生成學測數學模擬試題

Exploring AI-Based Generation of GSAT Mathematics

Items Using ChatGPT



陳育賢

Chen, Yu-Hsien

指導教授：左台益 博士

Advisor: Tso, Tai-Yih, Ph.D.

中華民國 114 年 7 月

July 2025

謝辭

論文不僅是研究的最終呈現，同時也代表我碩士的學涯階段，或許生命有其相遇，因而讓我闖入了這個學術研究圈。在將近一年的探索以及花費一年的時間進行實作，學習做研究的過程是一條一關接著一關的漫漫長路，時而走得惶恐，時而日夜兼程，更多的收穫是在過程中觀照到自我以及處事的磨練。

感謝我的指導教授左台益老師，是您讓我有機會接觸到 AI 工具的研究主題，謝謝您在研究過程中給予我指導與鞭策，點出我可以努力的地方、推動我在研究的進行，使我能夠盡力完成研究與論文，辛苦您了，也讓您費心了！

感謝曾建銘研究員及呂鳳琳研究員願意擔任我的口試委員，給予我的論文及研究提供寶貴的建議！

謝謝鳳琳學長、書豪學長和政德學長，在研究過程中常常給予我幫助、提供我建議和辦法，十分感謝學長們的關心和提攜。謝謝麟翔、珮甄常常被我請教與叨擾，還不忘給予我鼓勵；謝謝柏帆分享寫論文的技巧與方法，「先求有再求好」；謝謝宗穎助理的各種協助。謝謝我的研究夥伴孫裕旻，好多個在研究的關卡時謝謝有你的陪伴、協助與互助合作，如果研究有地圖的話，裕旻就是走在我前面領著我快步直走，然後翻譯地圖告訴我要記得轉彎的人。

謝謝師大及師大數學系，提供我學習場域和資源。謝謝數學教育的教授們，謝謝豐瑞老師、凱琳老師、婷瑩老師給予我在研究上的回饋和關心。

謝謝研究所的同學們郁庭、柏廷、俊宇、家源、威儒、宗瑩，以及曾經一起修過課或同研究間的學長姐與同學們，謝謝我們共同相處的時光！

感謝我的父母作為我的依怙，謝謝我的家人維持我在研究學業外的日常。

謝謝我的醫者，治癒我的色身，讓我能夠支撐著身體走過這段過程。

謝謝相信我可以寫完論文的菩薩們，在我擔心自己是否能夠完成時，都相信我一定可以做到。謝謝那個努力、盡力、走過來的自己！很高興事相圓滿了。

摘要

本研究旨在探索如何應用 ChatGPT 製作仿 108 課綱學測數學的模擬試題，為此研究者先了解 ChatGPT 的解題表現和錯誤形式，並引導 ChatGPT 分析試題複雜度。將 111 年至 113 年學測數學 A 試題分別截圖給 ChatGPT-4o(以下簡稱 ChatGPT) 進行解題和判斷試題複雜度等級，計算答題結果的各項得分率、複雜度與學測試題難易度的相關性，和分析 ChatGPT 的錯誤類型及答題對話的互動過程，並利用初步研究資料和客製化 ChatGPT 模型(簡稱 GPTs)設計製作本研究的「命題 GPTs」來仿作 108 課綱學測數學試題的模擬試題，生成仿學測數 A 考科 111 年、112 年、113 年之整卷試題各一份，以及高一範圍、高二範圍之代表試題各一份，總共五份試題進行分析，最後計算生成試題的題目、詳解、答案、單元之正確性比例並提出命題 GPTs 待修改之處。

本研究主要研究結果如下：**1.** 三年總得分分別落在均標、前標、前標，在學習內容方面，數與量(N)的得分率都較高，資料與不確定性(D)和代數(A)得分率也相對較高，坐標幾何(G)的得分率皆是最低；**在易、中、難的程度方面，得分率大致符合程度的趨勢**，程度「難」的題目不容易答對；在題目附圖表呈現方面，「題幹無圖形訊息，無附圖表」題目得分率皆是最高，「題幹有圖形訊息，有附圖表」題目的得分率偏低。**2.** ChatGPT 答題的錯誤形式分成：圖形解讀錯誤、題目解讀錯誤、推理不完整。**3.** 複雜度的思考策略指標與難易度等級在 Spearman 等級相關的相關係數平均約為 0.4274，具有中度正相關，可以做為判斷指標。**4.** 本研究之「命題 GPTs」有整卷仿作和自訂參數兩種出題模式，可以仿作出學測模擬試題。

研究最後提出對於教師使用與未來研究的建議，期許本研究提供現場教師與後續想研究的學者在教學使用 ChatGPT 解數學題的提問互動參考及設計 GPTs 來命題的方式。

關鍵詞：生成式 AI、自動試題產生、數學解題表現、錯誤類型、試題難度、108 課綱學測試題、試題複雜度、ChatGPT

目錄

謝辭	i
摘要	ii
目錄	iii
表目錄	v
圖目錄	vi
第壹章 緒論	1
第一節 研究背景與動機	1
第二節 研究目的與問題	3
第三節 名詞釋義	4
第貳章 文獻探討	6
第一節 生成式 AI 與數學命題	6
第二節 測驗編製	9
第三節 錯誤類型	10
第四節 數學試題難易度的預估	14
第參章 研究方法	17
第一節 研究架構與流程	17
第二節 研究方法與設計	19
第三節 研究對象與工具	28
第四節 資料收集與分析	30
第肆章 研究結果	35
第一節 ChatGPT 解學測試題之解題表現和錯誤形式	35
第二節 與 ChatGPT 之互動經驗及提示給予	49
第三節 引導 ChatGPT 分析學測試題之思考策略	52

第四節 探索及應用 ChatGPT 生成仿學測模擬試題	53
第五章 結論與建議	61
第一節 結論	61
第二節 未來建議	63
第三節 研究限制	64
參考文獻	65
附錄一：命題 GPTs 指令	70
附錄二：GPTs 知識庫—複雜度指標	74
附錄三：GPTs 知識庫—高中單元	75
附錄四：GPTs 知識庫—學測試題節錄	76
附錄五：GPTs 知識庫—學測題型說明	81
附錄六：GPTs 知識庫—命題雙向細目表	83
附錄七：ChatGPT 的「回答和對話互動」紀錄節錄	84
附錄八：GPTs 生成之試題節錄	112
附錄九：ChatGPT 解學測題之錯誤形式分析	123

表目錄

表 2-3-1 各學者提出的錯誤類型與情形	13
表 3-2-1 難易度與答對(得分)率表	20
表 3-2-2 各版本之思考策略等級與難易度等級的 Spearman 相關性	22
表 3-2-3 思考策略項目的定義	22
表 3-2-4 命題理論架構表	23
表 4-1-1 各項得分率總表	35
表 4-1-2 整體得分、級分與五標	37
表 4-1-3 各題型得分率	39
表 4-1-4 六大學習內容主題分類的得分率	40
表 4-1-5 易中難程度分類的得分率	41
表 4-1-6 題目附圖表呈現分類的得分率	42
表 4-1-7 整份試題之錯誤形式比例	44
表 4-1-8 錯誤題目之錯誤形式比例	45
表 4-1-9 錯誤形式分析範例(圖形解讀錯誤)-以 113 學測第 2 題為例	46
表 4-1-10 錯誤形式分析範例(題目解讀錯誤)-以 113 學測第 9 題為例	47
表 4-1-11 錯誤形式分析範例(推理不完整錯誤)-以 113 學測第 16 題為例	48
表 4-3-1 思考策略等級與難易度等級的 Spearman 相關性	52
表 4-4-1 試題項目之正確性比例	53

圖目錄

圖 2-4-1 複雜度之成分因素	16
圖 3-1-1 研究架構圖	17
圖 3-2-1 命題 GPTs 出題流程	27
圖 3-3-1 GPTs 的設計介面(設定頁面).....	29
圖 3-3-2 GPTs 的設計介面(建立頁面).....	29
圖 3-3-3 命題 GPTs—數學命題機器人對話介面	30
圖 4-1-1 ChatGPT 解 111~113 年數 A 學測題之級分與五標	38
圖 4-2-1 圖形解讀錯誤之提示釋例	49
圖 4-2-2 題目解讀錯誤之釋例	50
圖 4-2-3 題目解讀錯誤之提示釋例	50
圖 4-2-4 推理不完整錯誤之釋例	51
圖 4-4-1 整卷仿作試題範例 1	55
圖 4-4-2 整卷仿作試題範例 2	56
圖 4-4-3 自訂參數試題範例 1	57
圖 4-4-4 自訂參數試題範例 1	57
圖 4-4-5 自訂參數試題範例 2	58
圖 4-4-6 自訂參數試題範例 3	58
圖 4-4-7 自訂參數試題範例 4	59
圖 4-4-8 自訂參數試題範例 4	59

第壹章 緒論

本研究旨在探索如何運用 ChatGPT 生成仿 108 課綱學測模擬試題，本章共分為三節，第一節為研究背景與動機，第二節為研究目的與研究問題，第三節為名詞釋義。

第一節 研究背景與動機

2022 年 OpenAI 釋出人工智慧 ChatGPT 的更新版本(OpenAI, 2022)，引領了生成式人工智慧科技應用的新的時代與發展，在許多領域都帶來前所未有的潛在應用與影響，並且正迅速地改變人類的生活、社交、工作，以及學習方式，而在人工智慧如火如荼的發展下，漸漸地在教育上也作為一個新興的學習與教學輔助工具。2024 年聯合國教科文組織發布了《教師人工智慧素養框架》、《學生人工智慧素養框架》(陳柏宇, 2025)，在《教師人工智慧素養框架》當中提到了教師在人工智慧時代需要的核心能力所涵蓋的五個面向：以人為本、人工智慧倫理、AI 基礎與運用、AI 教學法、AI 促進職業發展，每個面向都具有三個進程：獲取、深化、創造，提供了全球教育工作者在 AI 時代和環境下的教育指引。在生成式人工智慧席捲教育界的且不斷推陳出新的趨勢之下，中華民國教育部(教育部, 2024)也發布了《中小學數位教學指引 3.0》，讓教師認識與應用 AI 數位工具，提供 AI 在備課、教學、評量的使用時機與方式，以及數位素養、AI 使用風險和生成式 AI 輔助教學的原則與建議，指引教師運用生成式 AI 規劃教學。據此可見生成式 AI 的使用在全球教育環境或教育工作中逐漸受到重視與關注，並可預期 AI 正逐漸在教育領域產生重要的影響。

教師可以將生成式 AI 視為教學的助手或備課時的夥伴和工具，並引導學生利用 AI 進行學習，目前在臺灣中學的教育現場中，對於 AI 的教學應用有協助教師設計教學活動和任務、協助教師設計學習材料、協助教師批閱作業、提供學生

個別化學習方案，以及 AI 可提供學生解答、引導、模擬練習、診斷與回饋(王金國，2024)，據此了解到 AI 能夠提供教師設計教學活動的靈感、增加教學創意和撰寫教案，根據指令設計和組織教材、學習單、練習卷等，作為學生的家教提供即時回饋、資訊和解答。若以教學的不同階段來看，在備課時，AI 可以協助補充教學內容、輔助建立評量規準；在教學時，AI 可以生成範例、改寫文本、分析結論、師生共創、促進批判性思考；在評量時，可以協助分析學生的作品和答案，用以進行評分並給予建議，也可以用 AI 分析評量數據，提供教師教學的回饋(教育部，2024)。AI 在數學教育也具備發展或潛能，像是可以增加學動機和參與感、支援個別化學習與互動、可以協助備課與題目設計(Almarashdi et al., 2024)。

綜上所述，隨著 ChatGPT 在自然語言處理 (NLP) 任務中有良好的表現，可以透過提示 (prompt) 展現出效能，因此得以發展出多樣的教學應用。然而，在評量上目前的教學應用較多是建立評量規則和輔助評量的分析，題目的設計或生成比較少見到更深入的使用情形與操作模式。此外，AI 在數學題目生成上的的潛力與優勢，Pepin 等(2025)提到一個 ChatGPT 的潛在機會是在建立個人化評量方面，根據學生的個別需求與能力量身打造考試與測驗，而國外已有研究探討 ChatGPT 自動生成中小學數學題目的潛力與表現(Van Long et al., 2024)，也有 Chan 等(2025)研究針對使用 ChatGPT 在給予不同提示語方式的情形下，探討生成 STEM 科目的評量題目的表現與能力，但目前國內仍較鮮少有這方面的探討。因此，本研究將探索如何運用 ChatGPT 生成數學試題，考量到一般教師都可直接使用的情形，本研究使用設計提示語並建置命題的客製化 ChatGPT 模型。

研究者在實際教育現場中看到已有一些教師利用 ChatGPT 作為課程內容裡思辨的學習工具、用數學期中考試卷測試 ChatGPT 在解題的答題結果，或作為專題裡數據和圖表的生產工具，也聽聞學生拿 ChatGPT 來嘗試解決數學作業問題。

而數學解題與命題是數學教學與學習很重要的面向，在教學現場中，編製評

量與測驗是教師的核心需求，特別是協助高三學生複習和準備學測時，教師會需要準備學測模擬試題供學生練習。然而，教師在實際命製題目上是十分困難的，同時需要考量到學生的複習進度，要在模擬試題中編入適當的題型數量、調配單元概念的比例和調整適當的難度，整合成一份讓學生可以模擬學測的練習試卷。即使是大考中心命製學測題或各校出的模擬考題，都需要大量的人力與專業知識，且設計編修題目過程耗時，因此，要編製高品質、符合學測難度分布的模擬試題，其人工命製成本是高昂的。除此，目前教師取得試題的來源主要為出版社題庫或歷屆模擬考題，題庫較缺少如大考題的複合概念題型，且模擬考題本試題有時偏難或考試難度偏離大考方向缺乏可控複雜度，因此教師在試題取得和命題工具的資源是較為不足的。若能運用 AI 自動生成的特性，不僅可以提供學生多次練習仿學測題目的機會，亦能根據教師的命題需求產生客製化試題，進而有效輔助教師在評量設計與試題編製方面的工作需要。因此，本研究旨在如何運用 GPTs 來生成仿學測數學的模擬試題。

第二節 研究目的與問題

根據第一節所提到的研究背景與動機，本研究之目的在探討如何運用 ChatGPT 生成仿 108 課綱學測模擬試題。在發展客製化 ChatGPT 模型生成試題的過程中，需要處理試題的正確性以及適當的難易度分布兩大關鍵問題。在正確性方面，需要深入了解 ChatGPT 的解題表現與錯誤形式，並藉此提升 ChatGPT 對題意的理解能力和答題的正確性；在難易度方面，則需要建立一個 ChatGPT 可以判斷的試前指標，以確保試題難度的適當分布。因此形成研究問題如下：

1. ChatGPT 解學測數學試題的解題表現與錯誤形式為何？
2. 如何提升 ChatGPT 在解學測數學試題時對題意的理解及解題正確性？

3. 引導 ChatGPT 分析學測試題之複雜度的思考策略效果為何？
4. 如何應用 ChatGPT 仿 108 課綱學測數學考科製作模擬試題？

第三節 名詞釋義

一、答對率與得分率

答對率(Pass rate)，又稱通過率，以 P 代表之。答對率的範圍在 0%到 100%之間，以百分比呈現，亦是用來描述試題難度的整體指標。以單選題而言，「全體到考考生的試題答對率 P」是該試題答對人數占全體到考考生人數的百分比。多選題在答對率的計算上會以考生的「得分率」替代，得分率是將「所有考生該題實得分數的總和」除以「所有考生該題全對分數的總和」，這個方式同時考量了各種得分情況，符合多選題「部分答對給部份分數」的核心精神。(林俊吉、趙珮晴，2020)

為求數據一致性，本研究將所有題型均以得分率統一計算，是指將「ChatGPT 所有該題目回答之實得分數的總和除以所有該題目題分的總和」。

二、複雜度

在本研究中，將複雜度定義為判斷 GPTs 生成試題難易程度的一個試前指標，因與難易度意義不同，故稱作複雜度。根據曹亮吉與朱惠文(2007)和洪碧霞等(2006)之研究發展出本研究評估試題難易度的因素成分，本研究最終以「思考策略」此一項目作為複雜度之因素成分，將「思考策略」設定 1,2,3 等級分別對應難易度的易、中、難程度，用以代表題目整體的複雜度等級，思考策略的操作型定義放在第三章說明。

三、生成式 AI 與 ChatGPT

生成式人工智慧(Generative artificial intelligence)是 AI 的一個子領域，依據機器學習的大型語言模型 (Large Language Models) 來生成文字、圖片、音樂或影片等作品，可以利用現有數據生成新的資料。並可根據使用者的提示語 (Prompt) 來創建內容，這些內容包含文字、圖片、聲音與影像等(教育部，2024)。

ChatGPT 是由 OpenAI 開發的大型語言模型，本研究使用的 ChatGPT 模型是基於 GPT-4 架構下的 GPT-4o 模型和 GPT-4-turbo 模型，都是具備多模態能力，可以看圖和文件。在研究中了解 ChatGPT 解題表現使用的是 GPT-4o 模型，在本研究創建的命題客製化 ChatGPT 模型(本研究以「命題 GPTs」稱之)是官方設定使用 GPT-4-turbo 版本。

四、提示語

提示語(prompt)指的是給定模型的一段輸入文本或一組指令，用以引導或激發人工智慧產生特定的輸出。

第貳章 文獻探討

本章共有四節，第一節為生成式 AI 與數學命題，第二節為測驗編製，第三節為錯誤類型，第四節為數學試題難易度的預估。

第一節 生成式 AI 與數學命題

一、自動試題產生

自動試題產生(Automated Item Generation, AIG)是一種利用電腦設備產生題目的工具，泛指從各種輸入如模型、範本或結構模式(schemas)中自動生成題目或問題的過程(Circi et al., 2023)。自動試題產生在測驗和評量開發方面的主要優勢包括：減少題目生成所需的時間、降低題目開發成本、支援大規模題庫的持續且快速發展、依學習需求客製化題目以促進個別化學習(Circi et al., 2023)。在題目的編製有時有大量題目的需求，而人工編製題目所需時間較長或製作成本較高，或是為了平行題目間難度的一致性需求，因此可以利用自動試題產生來解決這些問題(Prasetyo et al., 2024)。本研究即利用 ChatGPT 作為自動試題產生的工具，嘗試利用自動試題產生的優勢來解決研究動機與目的中欲探討的命製學測模擬試題的需求。

在 Circi 等(2023)研究中綜述了對於多篇 AIG 研究的系統性文獻回顧，其中提到在大規模教育評量情境中，選擇題是最常被自動生成的題型，因為它們是多數大規模測驗的主要題型。而題目生成中常用的輸入類型可分為兩大類：

(a) 結構化輸入(structured inputs)：如題目模型範本(item model templates)，這類方法在文獻中被廣泛應用，其中，題目模型定義為一種指定題目中可調整特徵的範本(template)；(b) 非結構化輸入(unstructured inputs)：如可取得的書面文本資料；此外，還有第三類型為結構化與非結構化輸入的結合。在本研究中，因本研究欲生成仿學測的模擬試題，因此在設計 GPTs 時，將學測試題作為樣本試題資料，

以知識庫資料輸入給 GPTs。

二、AI 生成試題之相關研究

Van Long 等(2024)進行了一項研究是分析 ChatGPT 自動生成中小學數學題目的潛力與表現，並提出 ChatGPT 作為「數學提問者」潛力的洞見。他們分析生成題目的情形有兩類：具情境感知(context-aware)與無情境感知(context-unaware)，「具情境感知」是指模型被給予背景資訊來生成題目，並分成有答案模式(answer-aware)和無答案模式(answer-unaware)；「無情境感知」是指僅根據提示語指令生成題目，無其他背景資料。而他們的研究中使用微調模型和思維鍊提示語的方式來生成題目，因此試題評估的方式有自動評估和人工評估，在人工評估的方面，「具情境感知」試題會評估難度(Difficulty)、相關性(Relevancy)、語法正確性(Grammaticality)、可答性(Answerability)與實用性(Usefulness)；而「無情境感知」試題會評估語法正確性、可答性、主題一致性(Topic Alignment)、難度一致性(Difficulty Alignment)和實用性。他們發現在「具情境感知」的試題中，ChatGPT 所生成的題目幾乎沒有文法錯誤、與給定情境有高度相關，ChatGPT 常會重複情境中的資訊，此外，有預期答案時 ChatGPT 較容易產生可作答的題目，反之則較困難，在無預期答案的情況下，ChatGPT 經常生成過於簡單的問題，除此，他們也發現即使 ChatGPT 能理解情境內容，ChatGPT 仍難以掌握數學物件之間的關係。在「無情境感知」試題評估中，他們發現 ChatGPT 在「情境多樣性」方面表現優異，有時會生成與指定主題不完全相符的問題，生成題目的難度主要取決於示例的難度，當 ChatGPT 嘗試生成高難度題目時，可能無法處理複雜性，進而生成無意義的內容，也有可能生成出缺乏數學性的題目。

Chan 等(2025)則是探討 ChatGPT 在 STEM 科目的化學、物理和數學中，使用不同提示語在生成試題和解答的概念正確性和解題品質表現。他們開發樣本試題與答案，及三種提示語策略：標準提示(Standard Prompting)、思維鍊提示

(Chain-of-Thought)和結合程式語言的思維鏈提示。標準提示為每個主題提供學科、教學程度和題目情境的背景資訊；思維鍊提示則是在標準提示的基礎上加入一組樣本題目與答案，引導模型逐步推理；結合程式語言的思維鏈提示則是在提示語中加入執行程式碼的指令。評估試題的指標有：清晰度(Clarity)、情境準確性(Context Accuracy)、最終答案正確性(Final Answer Accuracy)、解題過程品質(Quality of Working)，採用 0、1、2 分根據評分準則對各項指標進行評分。他們發現結合程式語言的思維鏈提示優於另外兩個提示、GPT-4 所生成的題目在「題目清晰度」方面表現突出，此外，他們也提出在生成題目與答案中常見的錯誤特徵，像是中間步驟與最終答案之間缺乏可辨識的邏輯連結，也就是錯誤的中間步驟可能仍然導出正確或錯誤的最終答案，而其中的邏輯難以解釋，在數學領域出現許多與現實脫節的數值設定，因此在生成數學題目的提示語時需提示使用真實生活情境的數值。

綜合上述的研究來看，可以利用給予背景資料及思維鍊的提示語讓 ChatGPT 生成出試題，雖然兩個研究都提到 ChatGPT 在英文文法和題目清晰度表現良好，但在中文的試題生成較鮮少相關的研究，且較少見以 GPTs 來設計作為出題工具的方式，然而，參考上述研究的研究方法和試題評估方式，本研究欲了解 ChatGPT 在生成學測數學試題的表現與情形，且考量到一般教師也方便使用的 GPTs，因此，將利用 GPTs 設計兩種出題模式：整卷仿作模式和自訂參數模式，並給予樣本題目等相關背景資料作為知識庫及發展提示語，提出本研究的命題理論架構(將在第三章的研究設計進行說明)，同時考慮題目、解答、單元正確性對試題進行評估。

第二節 測驗編製

除了 AI 自動試題產生，研究者也想參考一般測驗編製的流程，納入設計命題 GPTs 在出題流程的指令和提示語發想。在蕭儒棠(2014)的「測驗編製程序」中提到測驗編製的步驟有：確定測驗目的與編製計畫、試題和試卷的審查與分析，分別整理和說明如下：

(一)確定測驗目的與編製計畫

1. 確立測驗目的及測驗類型：不同的測驗有不同的功能，依照教與學的需求確定測驗目的，再決定適當的編製程序、施測時機、測驗特徵及測驗解釋。

(1) 根據編製的程序：有編製過程較簡化且有彈性的教師自編測驗、編製程序嚴謹的標準化測驗。

(2) 根據施測的時機：有教學前的安置性測驗、教學中的形成性測驗、教學過程中的診斷性測驗、教學後的總結性測驗。

(3) 根據測驗的特徵

(4) 根據測驗的解釋

2. 確定教學目標及課程內容

(1) 教學目標：教學目標引導學生的學習方向、達成教師的教學任務，可參考 Bloom 的《教育目標分類》。

(2) 課程內容：考慮學科教學應有的教材範圍或能力指標。

3. 確定測驗藍圖及測驗題型

(1) 測驗藍圖：描述重要的教學目標與評量目標之間的關係，參考測驗目的、測驗類型、教學目標及課程內容，完成測驗藍圖的規劃，並將測驗藍圖轉化成雙向細目表。

(2) 測驗題型：題型有其測量的功能，依照考生作答方式可分為：

(a) 選擇反應試題：包含選擇題、是非題、配合題，評分較為客觀的題型。

(b) 建構反應試題：包含簡答題；限制反應題、申論題，評分較為主觀的題型。

(二) 試題和試卷的審查與分析

1. 邏輯審查：逐一確認試題的格式、敘述品質等，包含試題是否符合雙向細目表、是否代表預期測量的教學目標、是否依據試題命題原則編寫、是否能清楚表達題意、呈現方式與作答說明是否適當、是否提供暗示答案的線索。
2. 實證審查：用以分析試題功能，以統計的量化數據判斷試題品質、挑選試題、組卷的參考，分為試題分析與測驗分析：
 - (1) 試題分析：包含困難度分析、鑑別度分析、誘答力分析。
 - (2) 測驗分析：包含信度分析、效度分析。

綜合以上，本研究因為是要仿學測出模擬試題，因此測驗目的、測驗內容和測驗題型皆是參考 108 課綱學測的考試說明(大學入學考試中心[大考中心]，2019)，其中測驗範圍為 10 年級必修數學和 11 年級必修數學 A，題型為學測數學考科有的題型：單選題、多選題、選填題、混合題，並將這些測驗要素部分納入設計 GPTs 的知識庫資料。在測驗藍圖上，嘗試讓 GPTs 自動產生所生成試題的雙向細目表，希望讓 GPTs 自行檢驗所生成試題的分布。最後研究者以人工審題的方式，採用邏輯審查確認 GPTs 生成試題的內容和形式，審題的評估期望包含試題是否符合 GPTs 的雙向細目表規劃、試題是否符合預期測量的教學單元、試題的敘述是否能清楚表達題意、試題的敘述是否提供暗示答案的線索。

第三節 錯誤類型

由於本研究之研究問題一是了解 AI 在數學解題表現中的錯誤形式，因此需要先了解數學教育及解題上有的錯誤類型，及 AI 可能的錯誤類型與機制。

在錯解辨析(九章出版社編輯部，1988)一書中將學生在解題的錯誤分成四大類：

1. **由於概念不清產生的錯誤**：包含概念實質模糊、混淆相似概念、循環定義概念產生的錯誤。
2. **由於推理無據產生的錯誤**：包含臆造定理、濫用法則、循環論證、證據不足、方法不對產生的錯誤。
3. **由於忽視條件產生的錯誤**：包含忽視概念中的隱含條件、忽視所使用的定理或公式或法則的適用條件、忽視取值範圍的變化、忽視約束條件中的隱含條件、忽視條件的充分性與必要性、錯誤理解條件、遺漏或濫加條件、忽視結論特徵中的隱含條件、把給定的一般條件特殊化產生的錯誤。
4. **由於考慮不周產生的錯誤**：包含審題馬虎、形式套用、顧此失彼、忽視特例、以偏概全、檢驗不當產生的錯誤。

Radatz(1979)用訊息處理機制的觀點出發，說明學生在學習數學過程中產生錯誤的類型與成因，使教師能更有效辨識錯誤類型與成因，增進教學的診斷與輔導，他提出五個錯誤類型，說明如下：

1. **由於語言困難導致的錯誤**：對於許多學生，學習數學概念、符號和詞彙就像外語問題，對數學文本語意的誤解常常是犯錯的根源。在解決文字題時，從自然語言的語意網絡轉換為正式的數學語言網絡特別容易產生錯誤。
2. **由於獲取空間訊息的困難而導致的錯誤**：許多數學錯誤來自學童在空間想像與空間思維方面存在個別差異，導致部分學童在執行數學任務時難以獲取視覺或空間資訊。一系列研究指出，數學情境的圖像的表徵可能會引發重大的資訊處理困難，而感知分析與綜合對學生的要求常常比數學問題本身更高。
3. **由於缺乏先備技能、事實和概念的精熟而導致的錯誤**：此類錯誤涵蓋了在完成數學任務時所需的內容與題目相關知識的各種不足。先備知識的缺失包括對演算法的不了解、基本事實掌握不足、在應用數學技巧時程序錯誤，以及對必要概念與符號的知識不夠充分。
4. **由於不正確的聯想或思考的僵化而導致的錯誤**：在解碼與編碼新資訊時缺乏

彈性，常導致學生在遇到類似問題時，形成固定且僵化的思維模式。在這種情況下，學生會發展出某些認知操作，即使在數學任務的基本條件已經改變時仍持續使用這些操作。某些內容或解題過程的元素會停留在學生的心中，而抑制他們對新資訊的處理。有學者將此類錯誤再進行分類：

- (1) 固著的錯誤：任務或問題中的單一元素佔據主導地位。
 - (2) 聯想的錯誤：涉及單一元素之間的錯誤互動。
 - (3) 干擾的錯誤：不同的操作或概念互相干擾。
 - (4) 同化的錯誤：錯誤聽覺導致閱讀或書寫的錯誤等。這類錯誤通常被歸類為由於缺乏注意力與專注力所造成的錯誤（如隨機或粗心的錯誤）。
 - (5) 負遷移的錯誤：來自先前任務的錯誤轉移，其中可以辨識出因一組練習題或文字題所產生的錯誤印象所造成的影響。
5. **應用不相關的規則或策略而導致的錯誤**：這類錯誤常常源自於在其他內容領域成功應用類似規則或策略的經驗。

此文獻將上述的五種錯誤類型視為一種錯誤歸類模型的基本構成要素。除此還有其他與資訊處理相關的面向，也可能導致數學學習中的錯誤，例如：未考慮問題的相關條件、未完成解題程序、中間解的遺失，以及片面使用概念等。

在 AI 的解題方面，有研究提到 ChatGPT 可能會有的錯誤，例如：能夠在不等式題中找出上下限，但它無法正確使用這些界限；將語文敘述轉換為代數式的過程中，出現了誤解；在機率題方面特別容易出錯；可以了解角與邊關係的基本原則，但當題目中加入與角度相關的其他變項時，卻無法建立正確的關聯。

表 2-3-1 各學者提出的錯誤類型與情形

提出者 (年份)	錯誤類型與情形
錯解辨析 (1988)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 由於概念不清產生的錯誤 2. 由於推理無據產生的錯誤 3. 由於忽視條件產生的錯誤 4. 由於考慮不周產生的錯誤
Radatz (1979)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 由於語言困難導致的錯誤 2. 由於獲取空間訊息的困難而導致的錯誤 3. 由於缺乏先備技能、事實和概念的精熟而導致的錯誤 4. 由於不正確的聯想或思考的僵化而導致的錯誤 <ol style="list-style-type: none"> (1)固著的錯誤 (2)聯想的錯誤 (3)干擾的錯誤 (4)同化的錯誤 (5)負遷移的錯誤 <ol style="list-style-type: none"> 5. 應用不相關的規則或策略而導致的錯誤
Guler 等人 (2024)	<ol style="list-style-type: none"> 1. 無法正確使用不等式的上下界限 2. 語文敘述轉換為代數式的過程中出現了誤解 3. 機率題方面容易出錯 4. 題目中加入與角度相關的其他變項時無法建立正確的關聯

由上述學者提出在數學解題和數學教學中可能產生的錯誤類型並對應 AI 可能出錯的情形，發現 AI 產生的錯誤和 Radatz 提出的錯誤類型有一些類似的地方，像是 AI 在「語文敘述轉換成代數式的誤解」對應到學生在數學語言的困難；在「題目中加入角度相關的變項時無法建立正確的關聯」對應到獲取空間訊息的困難，難以獲取視覺資訊以至於在數學情境中圖像表徵處理產生困難。而「無法正確使用不等式的上下界」、「機率題容易出錯」可能跟不正確的聯想或思考的僵化導致的錯誤或在解題中忽視條件和考慮不周的錯誤有關。本研究參考這些學者提出的錯誤類型與情形，針對本研究中 ChatGPT 的答題錯誤進行初步

的錯誤類型分類，也藉以了解 AI 可能產生的錯誤情形，思考如何在後續研究中與 ChatGPT 進行解題的對話和引導，使 ChatGPT 來避免錯誤而能夠提升題意的理解與解題正確性。

第四節 數學試題難易度的預估

難度(difficulty)是用來代表試題難易程度的指標，也是試題分析的量化分析中主要會分析每個試題的統計特徵之一，可以用來幫助教師或命題者了解所編製試題的特性、篩選試題或作為建立題庫之基礎。

在學測的試題命題與製作上，因為無法大量產生試題以進行預試，但同時仍需要達到維持試卷難易度的穩定，因此需要能夠有準確的試前難易度評估。

曹亮吉與朱惠文(2007)參考過去大考中心對數學試卷難易度的相關研究及試題命題的準則，並從 91 年至 96 年之學測、指考試題挑出在命題者主觀評估與學生答題表現差異較大的試題進行分析，提出影響難度的主要因素有：所評量的數學內容、解題時的思考策略及解題所需的步驟數，並增加考生是否熟悉試題的內涵來擴充難易度評估的因素，用此四種因素建立評估試題難易度的因素指標模式，四種因素如表 2-4-1。四種因素的內涵說明如下：數學內容指的是高中數學學科的內容，依據的是當時的高中教材六冊的內容。思考策略是指解題時的思考方法，分為機械性、多樣性、彈性三種，機械性試題是有固定的解題路徑；多樣性試題是同一題可能有多種作法，考生需選定其中某種作法，依照其所選定的路徑及所需的技巧可達成解題；彈性試題是指該題有不易想到的關鍵步驟，需以某一特別方法和解題路徑才能解決問題。步驟數是指解題所涉及的概念個數，在多選題上以各選項的步驟數加總除以選項數作為多選題的步驟數。考生對試題的熟悉度包含讀懂題意與找出解題策略，在讀懂題意上，是關於文字轉換成數學式的能力、試題是否為日常生活的情境，及其文字敘述是否易於閱讀或理解；解題策略

是高中所學單一基本概念直接應用或是需連結數個基本概念。

表 2-4-1 數學內容、思考策略、步驟數與熟悉度的級別與內容

級別	0	1
數學內容	除右述以外的高中數學學科內容	排列組合方法求機率 統計的概念 函數的表示與圖形的連結 空間幾何概念
思考策略	機械性、多樣性	彈性
步驟數	0	每個步驟數
熟悉度	高中課本或參考書籍常見的例題，或試題所用的解法是高中數學的單一基本概念	非高中課本或參考書籍常見的例題，或試題所用的解法為高中數學基本概念的應用或多個概念的連結

註：取自〈數學科測驗難易度主觀預估與客觀反應〉，曹亮吉、朱惠文，2007。

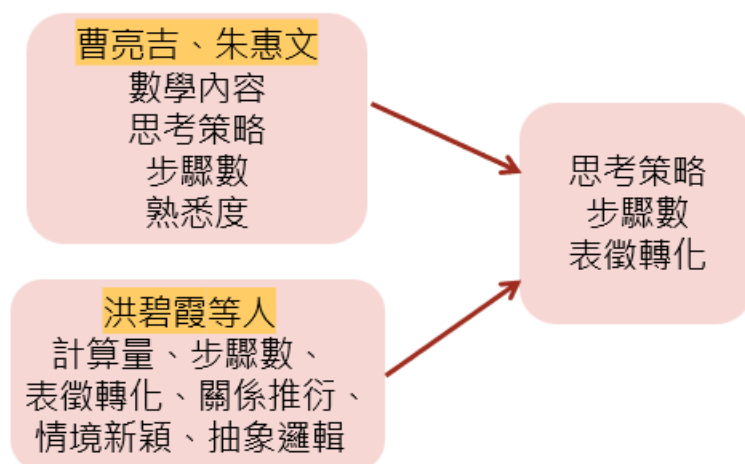
考試學刊，3，59-79。

從認知分析的角度，洪碧霞(2006)等認為解題所需要的認知運作複雜程度對試題難度有預測力，針對 TASA-MAT 六年級線上測驗，發展一個數學試題認知複雜度分析架構，以回歸統計方式實徵檢驗其認知複雜度分析架構對試題難度的解釋力，他們以計算量、步驟數、表徵轉化、關係推衍、情境新穎和抽象邏輯這六個成分進行試題認知複雜度的評定，在他們的研究文獻中並未明確告知此六項成分的編碼方式與定義，僅提供六項成分的評定示例。從他們的研究結果了解到：整題而言，試題難度和成功解題所需的表徵轉化、試題情境新穎程度相關最高，而六個認知成分與試題難度的複相關為 0.52，呈現合理的可用性。不同內容

領域的重要相關認知成分有所差別，例如：在幾何領域關連最強的是關係推行、在代數領域關連最強的是計算量和情境新穎。此研究中也提到通常一至兩項認知成分即可預測五成以上的難度變異量。

綜合前述，試前判斷試題難易度的成分，可以有不同的面向與因素，曹亮吉與朱惠文的研究是針對高中大考的試題與命題，與本研究所使用的 108 課綱學測試題較為相關，因此主要會參酌他們所提出的數學內容、思考策略、步驟數、熟悉度，而洪碧霞等人的研究中提到的表徵轉化和情境新穎也是影響試題難易度的重要因素，而表徵轉化和情境新穎與熟悉度的概念類似，同時兩個研究中都有提到步驟數，但兩者的意義可能稍有不同。考量到因素成分要能夠對試題難易度具有足夠的影響，且同時發展出指標的定義是要讓 ChatGPT 能夠明確解讀、操作和判斷，因此本研究考慮選用思考策略、步驟數、表徵轉換等三個因素成分納入複雜度，以支持後續發展出可以判斷 AI 生成試題難易度的複雜度指標，並做為設計命題 GPTs 的一個檢驗與功能。

圖 2-4-1 複雜度之成分因素



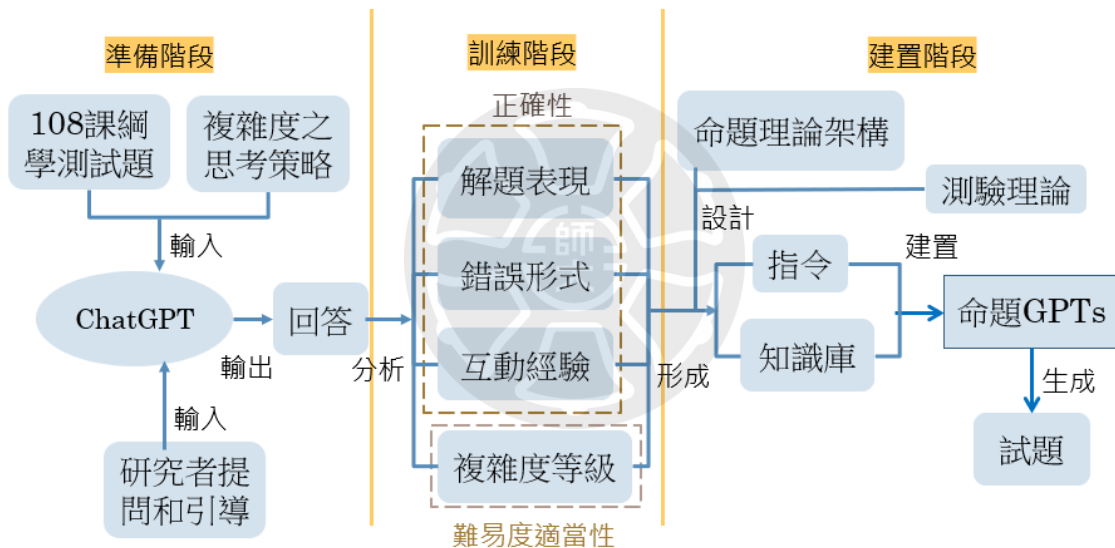
第參章 研究方法

本章共分為四節，第一節為研究架構與流程，第二節為研究方法與設計，第三節為研究對象與工具，第四節為資料收集與分析。

第一節 研究架構與流程

一、研究架構

圖 3-1-1 研究架構圖



根據第一章的研究目的和參考第二章的相關研究文獻，建立出一個探索和應用 ChatGPT 生成試題的研究架構。如圖 3-1-1，其中，「解題表現、錯誤形式、互動經驗」三部分期望處理 ChatGPT 解題和生成試題的正確性，「複雜度等級」期望處理生成試題的難易度適當性。在圖中「解題表現」、「錯誤形式」將分析研究問題一的結果，在「互動經驗」的部分會進行研究問題二，在「複雜度之思考策略」和「複雜度等級」將處理研究問題三，在「命題 GPTs」的建置和「試題」的生成將回答研究問題四。

二、研究流程

本研究將流程分為三個階段，分別為「準備階段」、「訓練階段」、「建置階段」，說明如下：

(一)準備階段

此階段研究者使用和測試 ChatGPT，給予 ChatGPT 解題和複雜度的一組提示語，將學測試題嘗試以截圖的方式給 ChatGPT 解題，且各年學測試題以各別獨立聊天室進行對話，接著進行提問和引導 ChatGPT 正確解題，之後判斷複雜度等級，藉此方式開展研究。

(二)訓練階段

確定提問 ChatGPT 的方式並收集到 ChatGPT 的答題結果後，分析及統計解題表現數據、錯誤形式、互動經驗與提示給予、複雜度之思考策略項目的數據，了解 ChatGPT 的解題表現和特性及複雜度指標，做為進一步設計命題 GPTs 的資訊和初步研究。

(三)建置階段

使用指令和知識庫來設計命題 GPTs，來回修改和測試以產生符合命題理論架構的 GPTs 命題流程，生成代表性試題並計算題目、詳解、答案、單元之正確性比例，以檢驗試題的適當性和正確性，分析試題並提出命題 GPTs 的待修改之處。

第二節 研究方法與設計

本研究旨在探討 ChatGPT 在解 108 課綱學測數學 A 試題之解題表現和引導 ChatGPT 分析學測試題之複雜度，並探索如何應用 ChatGPT 仿 108 課綱學測數學製作模擬試題。

一、研究方法

本研究透過使用 ChatGPT、和 ChatGPT 互動，以學測試題截圖的方式給予 ChatGPT 試題，來了解 ChatGPT 在學測數學解題的表現與錯誤形式，探索 ChatGPT 的數學解題能力和特性，並從與 ChatGPT 的互動過程中，了解如何給予引導與提示讓 ChatGPT 能夠提升對題目的理解與增進解題的正確性，並在 ChatGPT 能夠正確解題後，引導其判斷試題複雜度的等級。分析 ChatGPT 解學測題的錯誤形式和互動經驗、統計 ChatGPT 解學測題的得分率、統計複雜度等級並計算其與學測答對(得分)率等級的相關性，獲得了 ChatGPT 解學測題的表現和特性及建置出可判斷試題難度的複雜度指標後，著手設計命題 GPTs，將 ChatGPT 解題表現與錯誤形式分析結果的資訊、複雜度及命題理論架構納入設計中，利用指令與知識庫，產生命題 GPTs 的對話形式、命題流程、用複雜度檢驗試題，探索並應用所設計的命題 GPTs 生成仿 108 課綱學測的模擬試題。

二、研究設計

(一)複雜度指標設計

1. 難易度等級

難易度等級根據曹亮吉與朱惠文學者文獻裡提到的難易度與答對(得分)率表，如表 3-2-1 所示，並根據研究者對於學測數學 A 試題的難易度判斷，將答對(得分)率劃分成：60%以上為難易度「易」、35%~60%為難易度「中」、35%以

下為難易度「難」，再依據大考中心公告之答對率及鑑別度表(大考中心，無日期)，將學測題目分類為易、中、難的三個程度，並將易、中、難等級分別用 1、2、3 等級表示。將答對(得分)率轉換成難易度等級，使用它作為與複雜度的對照和相關性，同時也用於解題表現中「易中難程度的得分率」將題目分類的方式。

因學測試題的答對(得分)率僅統計第 1~18 題，因此本研究在計算複雜度數據與難易度等級之相關時僅使用每年學測的第 1~18 題所得的數據作計算。

表 3-2-1 難易度與答對(得分)率表

難易度	易	中偏易	中偏難	難
學測數學	55%~85%	35%~60%	30%~45%	20%~35%
數學甲	55%~75%	40%~55%	25%~40%	15%~25%
數學乙	65%~80%	45%~65%	30%~45%	15%~30%

註：取自〈數學科測驗難易度主觀預估與客觀反應〉，曹亮吉、朱惠文，2007。

考試學刊，3，59-79。

2. 因素成分的測試

本研究欲將複雜度用作判斷試題難易度的試前指標，此指標參考第二章文獻探討的研究所提到之因素成分，在研究者與指導教授討論後嘗試使用認知層次、思考策略、步驟數、表徵轉換作來發展本研究複雜度之成分項目，並將每種項目依程度劃分成 1、2、3 等級，對應題目在各項目下的易、中、難等級。

為了發展因素成分項目，進行了反覆迭代的過程：首先藉由文獻擬出各項目的文字定義，並分別設計成提示語給予 ChatGPT 來判斷學測試題屬於各項目下的哪一個等級，再將判斷結果與指導教授討論，並修訂文字定義，再用修改後的定義讓 ChatGPT 判斷試題等級並檢視結果。

經初期測試發現，在認知層次嘗試使用 Bloom 的認知層次和 TIMSS 數學的認知向度，但學測題目之認知層次較多是屬於理解與應用層次，較無明顯程度差異而代表性不足，同時因為 ChatGPT 在解題時可能有多種解法，考量到認知向度的定義 ChatGPT 較難操作，因此決定不將認知層次納入複雜度之成分項目。再者，步驟數、表徵轉換因尚未完整發展出來，也因此未將其納入複雜度之成分項目。發展過程中，最後以思考策略作為本研究最重要的複雜度成分項目。

3. 思考策略項目

在發展思考策略定義的過程中，考慮到定義希望是 ChatGPT 能夠操作及理解的語言文字，因此與 ChatGPT 協作發展思考策略項目的定義，將符合難易度等級 1、2 和 3 的學測代表試題依次給予 ChatGPT 來逐步修訂各等級的定義，經此方法修訂兩次產生兩種版本，並將兩種版本產生的等級結果數據和難易度等級作 Spearman 等級相關檢驗相關性，相關性數據如表 3-2-2。

本研究使用 Spearman 等級相關(Spearman rank correlation, r_s)作為檢定複雜度成分因素與難易度等級之相關性統計方法，Spearman 等級相關適用於兩個變數都是次序變數的情形(朱經明，1990)，此種相關係數本質上等同於 Pearson 積差相關係數，不同的是等級相關先將原始分數轉換成等級後再計算，而非直接使用原始分數來計算。如果碰到相同的分數，就使用其平均的等級來計算 (吳裕益，2006)。

計算公式為：

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{N(N^2 - 1)}$$

其中 d 是指每個受試兩個變數所得等級分數之差異， N 為樣本數。

表 3-2-2 各版本之思考策略等級與難易度等級的 Spearman 相關性

Spearman 相關	111 年	112 年	113 年	整體平均
版本一	0.4009	0.8065	0.6326	0.6133
版本二	0.5944	0.7420	0.6280	0.6548

版本二是版本一的擴充，考量到兩版本在與學測題目難易度等級之 Spearman 相關性接近，而版本二的文字定義可能侷限 ChatGPT 在題目上的判斷，因此最終以版本一作為引導 ChatGPT 判斷複雜度的定義，定義如表 3-2-3，其平均相關性數值為 0.6133，具有中度正相關。

表 3-2-3 思考策略項目的定義

思考策略 等級	等級 1：基本	等級 2：進階	等級 3：挑戰
定義	能運用簡單明確的數學關係、基本邏輯推理或代數運算策略（如：比例、倍數、平均、代入計算）解題。題目資訊清晰，解題步驟直觀，推理層次單一。	須整合兩種以上的數學概念（如函數變換、空間關係、機率期望等）進行推論，或需多步驟邏輯拆解才能完成解題。策略可能包含轉換表徵、建立模型、化簡條件等中層次複雜思維。	需掌握多層次概念並靈活整合（如：轉換、逆推、隱含條件辨識），其中關鍵推理步驟不易察覺，或需突破慣常思考模式。解法具特殊性或非直觀，具備高層次策略與抽象思維要求。

(二) ChatGPT 的回答和對話互動

將 111 年至 113 年學測數學 A 試題截圖後以圖片形式提供給 ChatGPT 進行解題，選擇圖片輸入而非文字輸入是為了模擬使用者最直接的使用方式，並探討 ChatGPT 在多模態(multi-model)能力下對數學試題的原始解讀。每年度試題各建立一個獨立聊天室進行對話，首先給予 ChatGPT 解題與複雜度判斷的提示語，此指令目的是為了同時蒐集解題狀況和 ChatGPT 在正確解題下判斷題目複雜度指標之數據，接著依序提問整份試卷的題目，若是答題錯誤則與 ChatGPT 進行對話引導，待 ChatGPT 解題正確後，再進行該題目的複雜度分析。因此產生 ChatGPT 的「回答和對話互動」紀錄(提示語和對話過程節錄請參考附錄七)。

(三) 命題理論架構

參考前述第二章文獻探討的命題要素和模式，建構出本研究運用 GPTs 生成試題的命題理論架構，如表 3-2-4 所示。本研究欲設計兩種出題模式，第一種是整卷仿作模式，可以讓使用者選擇 111 年至 113 年學測數 A 的某一年進行整份學測試題的仿作；第二種為自訂參數模式，可以讓使用者根據自身的命題需求，選定想要的年級、冊別版本、對應的單元、題型和難度的數量分配。透過此命題理論架構，將設計出一般教師可以使用 GPTs 來仿作出題的命題工具與建置方式，及探討在此命題理論架構下，所設計出的命題 GPTs 其生成試題的表現和情形。

表 3-2-4 命題理論架構表

出題模式	出題參數	參數內容
整卷仿作	年級	高一、高二數 A
	版本	依據 111~113 學測數 A 試題
	單元主題	依據 111~113 學測數 A 試題

	題型	單選、多選、填充、混合題
	難易度	依據 111~113 學測數 A 試題
自訂參數	年級	高一、高二數 A
	版本	上冊、下冊
	單元主題	根據使用者選定的年級和版本所對應的單元
	題型	單選、多選、填充、混合題
	難易度	易、中、難
	題數	使用者自訂

(四) 命題 GPTs 的設計

為了達到 ChatGPT 生成試題和解題的正確性及適當難易度分布，將部分引導 ChatGPT 正確解題的提示給予納入樣本學測試題中，及將思考策略文字定義納入 GPTs 指令中，並也將樣本學測試題和思考策略作為知識庫資料。同時，為了達到研究問題：探索如何運用 GPTs 來製作仿學測的模擬試題，將根據所提出的命題理論架構和測驗理論設計 GPTs 的指令和給予相關背景資料作為知識庫資料。期望可以設計 GPTs 在命題過程上可以如同編製測驗，讓 GPTs 根據使用者的命題需求參數先擬定一份命題雙向細目表，並生成符合的高中學測範圍之試題，亦或是仿作出學測的試題，接著 GPTs 可以正確解出所生成之試題，給出詳解或答案，並用複雜度來判斷其生成試題之難易度以檢驗試題，最後檢視試題是否符合命題雙向細目表。在經過不斷修改指令、修改知識庫資料和測試 GPTs 生成試題結果的迭代過程，設計出本研究最終的命題 GPTs，命名為「數學命題機器人」。以下為建置命題 GPTs 的指令和知識庫的說明：

1. GPTs 指令

在指令中，兩種出題模式皆會告訴 GPTs 出題題型、回答格式、出題流程，

為了希望能夠讓 GPTs 分析所生成試題的複雜度，會先讓 GPTs 出題後進行解題，再透過解題的過程分析複雜度，因此回答格式依序有題目、詳解、解答、單元、複雜度。為了避免 GPTs 在大量出題或因為功能較多而發生混亂，在出題流程指令中加入：「每 5 題為一段落，每完成一段落後，暫停並詢問：『是否繼續出題？』」。為了確保 GPTs 能夠知道要使用知識庫的資料，指令中會強調知識庫資料的檔名，例如：「生成題目時，【複雜度】請務必依照『複雜度指標.docx』的指標去分析該題的複雜度。」，同時也會在指令中強調需要 GPTs 注意的事項。(完整指令請詳見附錄一)

- 整卷仿作模式：

整卷仿作是讓 GPTs 逐題仿作指定年份之學測試題，部分指令如下：

- 【整卷仿作模式】：逐題仿作指定年份之學測試題
- 出題題型與順序必須符合下列格式（為固定規則）：
 - 第 1~6 題為【單選題】
 - 第 7~12 題為【多選題】
 - 第 13~17 題為【填充題】（選填題）
 - 第 18~20 題為【混合題】一個完整題組
- 每題皆須參考所指定年度題目的敘述、命題單元、題型邏輯、語言表達與複雜度級別（簡單／中等／挑戰），對應產生等價仿作題目。
- 每題皆附四個區塊：
 - 【題目】：呈現完整題幹與選項（若適用）
 - 【詳解】：逐步解題推理（Chain-of-Thought）
 - 【解答】：最終答案或選項
 - 【單元】：題目涵蓋的學習內容之年級和單元
 - 【複雜度】：進行複雜度分析

此外，為了避免 GPTs 照抄原本的學測試題，因此給予 GPTs 約束的提示語：「仿照命題不是完全照抄學測原題目之數據。」

- 自訂參數模式：

自訂參數是設計為了可以讓一般教師使用者客製化命題，讓使用者自訂年級、版本冊別、單元主題、題型和難易度的題數與分配，部分指令如下：

【自訂參數命題模式】：使用「逐步互動式詢問」方式引導設定題目，依序詢問以下命題參數，若該步驟具備可選項目，會清楚列點顯示選項以方便使用者選擇：

1. 年級：
 - 高一
 - 高二數學 A
2. 版本選擇：
 - 高一：
 - 上冊
 - 下冊
 - 高二數學 A：
 - 上冊
 - 下冊
3. 單元主題：依所選版本，自動列出對應單元選項供選。
4. 題型數量設定（格式如：(3,3,3,1)，代表單選 3、多選 3、填充 3、混合題組 1）
5. 難度分配（針對每種題型逐一指定易／中／難的數量，格式如：2,2,1）

其中，為了方便使用者回答題型題數和難度分配題數，設計數量設定的提示語如：「(3,3,3,1)，代表單選 3、多選 3、填充 3、混合題組 1」，以及若使用者輸入格式錯誤或數量不符，會回覆：「請用正確格式回覆，例如：(2,2,1)、2,2,1 或 2/2/1，且總和需等於題數。」。

2. GPTs 知識庫

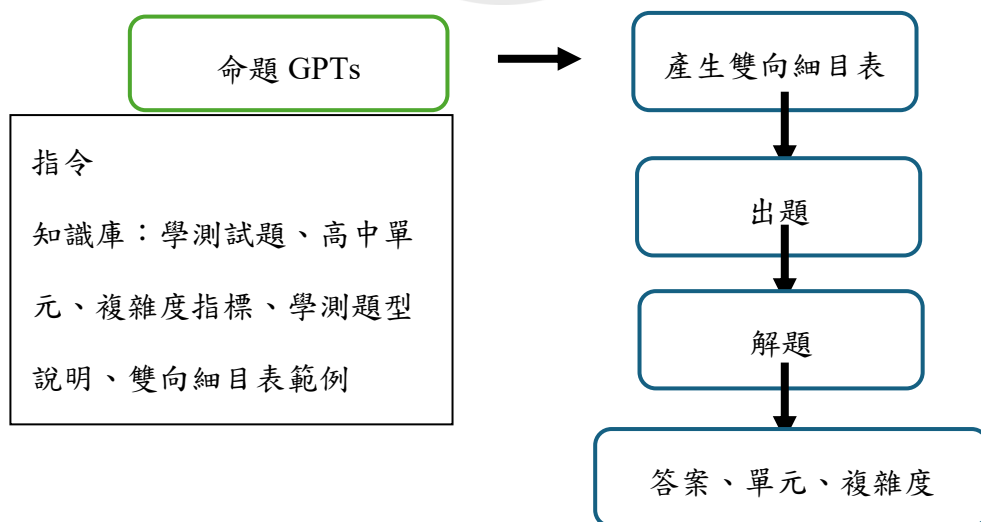
知識庫用來上傳背景資料給予 GPTs，會給予 111~113 年學測數學 A 試題、高中單元、複雜度指標、學測題型說明、雙向細目表範例(請詳見附錄二至附錄六)，分別說明如下：

- **111~113 年學測數學 A 試題**：Markdown 格式及 LaTeX 數學格式的學測試題文字檔。從研究問題一的錯誤形式知道 ChatGPT 會發生題目解讀錯誤，因此將學測試題文字敘述全數轉換成 Markdown 格式及 LaTeX 數學格式以增進 GPTs 讀題之正確性，此是基於前期研究發現的「題目解讀錯誤」所做的

針對性優化，同時因為 Markdown 格式及 LaTeX 數學格式是 ChatGPT 容易使用的格式，因此也將學測試題作為 GPTs 仿作學測試題的樣本試題題庫。部分試題有納入提升題意理解和解題正確性的提示給予。

- **高中單元：**整合不同版本的高中課本單元名稱文字檔。
- **複雜度指標：**思考策略指標的文字檔。為了讓 GPTs 容易讀取，將原來思考策略定義的表格轉換為結構化文字。
- **學測題型說明：**單選題、多選題、選填題、混合題題型的說明和範例文字檔。
- **雙向細目表範例：**研究者以 113 學測數 A 製作的雙向細目表範例文字檔。縱軸為高中單元，橫軸為難易度，細目表中間的格子對應到的是題號，因為希望 GPTs 仿照測驗編製擬定[測驗藍圖，此範例是給 GPTs 在製作命題雙向細目表的參考。

圖 3-2-1 命題 GPTs 出題流程



第三節 研究對象與工具

一、研究對象

1. ChatGPT

本研究在初期階段的研究對象以 ChatGPT 為主，ChatGPT (Chat Generative Pre-trained Transformer)是由 OpenAI 在 2022 年所開發出的人工智慧聊天機器人，具有寫作、編寫或除錯程式碼、自動執行重複性任務、搜尋網頁、分析數據和建立圖表、執行深入研究、創建圖像等功能(OpenAI，無日期)，使用者可以透過文字與 ChatGPT 對話，輸入文字、圖片、檔案給 ChatGPT。有免費使用或付費使用的差異，由於本研究在研究後期會使用客製化 ChatGPT 模型(簡稱 GPTs)來設計命題 GPTs，而 GPTs 使用的是 ChatGPT-4-turbo 版本，因此本研究使用同樣是 ChatGPT-4 架構下的 ChatGPT-4o 來進行初期階段有關解題表現的研究。

二、研究工具

1. 學測試題與解析

本研究採用 111 年至 113 年的學測數學 A 考科試題作為研究用試題，測驗範圍為 10 年級必修數學、11 年級必修數學 A 類，題型包含單選題、多選題、選填題、混合題或非選擇題，混合題型是指同時包含選擇(填)題與非選擇題的題型，混合題型為題組形式(大學入學考試中心[大考中心]，無日期)。

學測的試題與解析由大學入學考試中心(大考中心，2022，2023，2024)出版，解析包含試題編號、參考答案、學科內容、測驗目標、試題解析，其中參考答案作為正確解答，而學科內容為課綱的學習內容，會作為分析 ChatGPT 解題表現時的得分率分類。

2. 客製化 ChatGPT 模型使用

客製化 ChatGPT 模型(或稱 GPTs)是 ChatGPT 的自訂版本(Open AI, 2023)，可以依照使用者的特定目的創建，此功能需付費使用，模型版本是 ChatGPT-4-turbo，GPTs 的介面如圖 3-3-1 和圖 3-3-2，可以給予 GPTs 設定指令和上傳資料到 GPTs 的知識庫來建立 GPTs，也可透過對話的方式來建立 GPTs，建置好後可以透過預覽來測試。本研究使用 GPTs 創建「數學命題機器人」(後續皆以命題 GPTs 稱之)，如圖 3-3-3，使用過程將在第四節說明。

圖 3-3-1 GPTs 的設計介面(設定頁面)



圖 3-3-2 GPTs 的設計介面(建立頁面)



圖 3-3-3 命題 GPTs—數學命題機器人對話介面



第四節 資料收集與分析

一、資料收集

(一)研究問題一至三

將 111 年至 113 年學測數學 A 試題截圖後以圖片形式提供給 ChatGPT 進行解題。每年度試題各建立一個獨立聊天室進行對話，首先給予 ChatGPT 解題與複雜度判斷的提示語，接著依序提問整份試卷的題目，若是答題錯誤則與 ChatGPT 進行對話和引導，待 ChatGPT 解題正確後，再進行該题目的複雜度分析。將聊天室的對話過程紀錄轉成 PDF 檔案下載保存，因此產生 ChatGPT 的「回答和對話互動」紀錄。擷取「回答和對話互動」紀錄中，ChatGPT 在每題的第一次完整解題回答，並記錄每題回答的答題對錯，以此作為解題表現的資料；擷取「回答和對話互動」紀錄中，研究者和 ChatGPT 在答錯题目的對話與引導的過程，以此作為錯誤形式和提升題意理解與答題正確性的資料；為了瞭解思考策略用來判斷學

測試題的複雜度效果為何，因此需要了解 ChatGPT 正確解題下的複雜度等級，所以在「回答和對話互動」紀錄中蒐集 ChatGPT 在每題正確解題後的複雜度判斷數據，以此數據作為 ChatGPT 分析學測試題之思考策略的資料。

(二)研究問題四

根據在本章第二節研究設計的命題理論架構和命題 GPTs 的設計，建置出本研究的命題 GPTs，用命題 GPTs 生成出整卷仿作模式和自訂參數模式的代表性試題，利用整卷模式產生仿學測 111 年、112 年、113 年之整卷試題各一份，以及利用自訂參數模式生成高一下冊範圍、高二上冊範圍之代表試題各一份，其中高一下冊試題的命題參數為高一下冊、全冊單元(包含數列與級數、數據分析、排列組合與機率、三角比)，而高二上冊試題的命題參數為高二上冊、全冊單元(包含三角函數、指數與對數函數、平面向量)，兩者在單選題、多選題和填充題的數量皆為各 3 題且每種題型的易、中、難程度各 1 題，在混合題組皆有 1 題組(包含 3 個小題)，但難度分別為「難」和「中」程度。以此五份試題作為命題 GPTs 生成模擬試題的資料。

二、資料分析

(一) ChatGPT 的解題表現

蒐集 ChatGPT 每題解題回答的答題對錯後，根據大考中心公告之參考答案與非選擇題評分規準(大學入學考試中心[大考中心]，2022，2023，2024)，計算 ChatGPT 在 111 年至 113 年學測數學 A 的各題型得分、總得分和整體得分率，為了在各題型的數據一致，皆使用得分率來計算，各題型的得分率是以各題型的得分除以該題型的總分來計算，並換算成當年學測的級分與五標，了解 ChatGPT 在學測數學的解題能力。為了能更了解 ChatGPT 學測數學解題的強項和弱項以及可能影響解題的因素，因此進一步分析，將學測試題依照學習內容主題、易中難程

度、附圖表呈現加以分類，分類方法如下：

1. 學習內容主題分類

依據大考中心的試題與解析(大考中心，2022，2023，2024)中各題的學習內容主題，主題包含：數與量(N)、空間與形狀(S)、坐標幾何(G)、代數(A)、函數(F)、資料與不確定性(D)，計算含有各主題的題目之得分，有些題目包含多種主題，例如：111年學測數學A第2題的學習內容為N-10-3、A-11A-4、F-11A-4，包含數與量(N)、代數(A)、函數(F)三個主題，因此學習內容主題的得分率計算方式為含有該學習內容主題題目的得分除以該學習內容主題題目的總分。

2. 易中難程度分類

將學測試題的答對(得分)率轉換成難易度等級(請見研究設計的複雜度指標設計)，用難易度將學測題目分類，每題只有一個等級，易中難程度的得分率是以該程度題目的得分除以該程度題目的總得分來計算。

3. 題目附圖表呈現分類

研究者先將學測試題依照題幹有無圖形訊息做分類，再將題幹有圖形訊息的題目依照有無附圖表作分類，每題只有一個分類，經分類後發現學測試題沒有「題幹無圖形訊息，有附圖表」的情形，因此分為三項：「題幹有圖形訊息，有附圖表」、「題幹有圖形訊息，無附圖表」、「題幹無圖形訊息，無附圖表」。其得分率是以該項題目的得分除以該項題目的總分來計算。

(二) ChatGPT 的錯誤形式

研究者分析 ChatGPT 在 111 年至 113 年學測數學 A 中所有答錯題目之解題錯誤，一開始先依第二章錯誤類型文獻提到的類型進行初步分類，再將 ChatGPT 的答題錯誤歸納出三種錯誤形式類型：圖形解讀錯誤、題目解讀錯誤和推理不完整。質性分析所有答錯題目的錯誤形式，並計算各年學測中的錯誤形式占比，分別由整份試題之錯誤形式比例以及錯誤題目之錯誤形式兩種方式來看。整份試題之錯誤形式比例，是將該類錯誤數量除以總試題數量；錯誤題目之錯誤形式比

例，是將該類錯誤數量除以總錯誤數量。本研究對於錯誤形式之分類如下：

1. **圖形解讀錯誤**：ChatGPT 無法正確辨識或判讀題目圖形，或解題過程中，無法正確將式子轉換成圖形。
2. **題目解讀錯誤**：ChatGPT 無法正確解讀題幹或選項，包含題目之文意、數字、方程式、符號。
3. **推理不完整**：解題過程中 ChatGPT 發生與推理有關之錯誤，例如：計算錯誤、推論錯誤、未討論完整及所有可能之數值狀況、認為題目資訊不足、臆造解法…等。

(三) 從對話互動讓 ChatGPT 提升題意理解與答題正確性

在與 ChatGPT 的「回答和對話互動」中，觀察到 ChatGPT 擅於使用的表示方法、敘述、解題方式和計算過程，從 ChatGPT 的回答中了解 ChatGPT 對題目的理解以及 ChatGPT 可能容易理解的敘述方式，用以提問來引導 ChatGPT 正確解題，像是從讀題回答發現數據解讀有誤、題目敘述理解有誤，或是從圖形讀題的回答發現 ChatGPT 容易用坐標來理解圖形，或是觀察到 ChatGPT 容易使用坐標向量和極坐標的方式解幾何題和計算面積，將分析「回答和對話互動」中的答錯題目的互動引導過程，針對三種錯誤形式提出代表性範例，並以此歸納出可以給 ChatGPT 的提示給予和解題引導，將部分提示給予納入學測樣本試題的文字檔中作為知識庫資料。

(四) 正確解題下的思考策略

由第三章研究設計中複雜度指標的思考策略項目，將思考策略定義的表格轉換成結構型文字，納入給 ChatGPT 進行解題和判斷試題複雜度等級的提示語，並在 ChatGPT 正確解題後進行複雜度判斷。將得到的等級數據結果和難易度等級進行 Spearman 相關，檢驗正確解題下的思考策略和學測難易度等級的相關性。

(五) 探索應用 ChatGPT 生成仿學測模擬試題

研究者首先親自完成五份試題的解題，同時對試題進行分析、逐一審題，因為試題未經過預試，因此利用邏輯審查逐一確認試題的格式、敘述的品質等，確保試題符合編製的原理和要求(蕭儒棠，2014)，因此研究者判斷題目的可讀性、題意是否清楚、條件是否明確或完整、數學符號是否使用正確、數學符號有沒有超出測驗範圍，詳解的計算過程是否正確和完整、解答是否正確、命題 GPTs 對單元的判斷是否正確，提出生成試題在邏輯審查中的觀察與發現。以及統計和計算生成試題的題目、詳解、答案、單元之正確性比例，題目的正確性是指題目敘述清楚、條件明確，若是選擇題則包含選項在文字敘述與符號的正確性，詳解的正確性是指解題過程正確且可解題、答案的正確性是指依照題目所解出最終答案的正確性、單元的正確性是指 GPTs 對單元的判斷符合試題的單元。

此外，也對整卷仿作試題進行題目一致性的評估，題目一致性指的是仿作年份和該年學測各題之間是否相關，若是題目和選項的敘述、條件、單元主題是類似或一樣的，則代表試題是一致的，若是題目和選項的敘述、條件、單元主題都不同，則試題之間是不一致的。

同時，提出研究者在整卷仿作試題和自訂參數試題的觀察與發現，以及提出命題 GPTs 在設計和生成試題上的待修改的地方。

第肆章 研究結果

本章依據研究問題分成四節進行結果的報導，第一節為「ChatGPT 解學測試題之解題表現和錯誤形式」；第二節為「與 ChatGPT 之互動經驗及提示給予」；第三節為「引導 ChatGPT 分析學測試題之思考策略」；第四節為「探索及應用 ChatGPT 生成仿學測模擬試題」。

第一節 ChatGPT 解學測試題之解題表現和錯誤形式

一、ChatGPT 的解題表現

本研究透過得分率來分析 ChatGPT 的解題表現，以 111 年至 113 年之每一年學測數學 A 試題各開一個聊天室進行對話，給予解題指令並以题目的截圖圖片逐一給 ChatGPT 依序解題，每題會以 ChatGPT 第一次作答作為解題表現之紀錄，以此作答之紀錄計算 ChatGPT 答對题目的整體表現和各項得分率，各項得分率包含學習內容主題的得分率、易中難程度的得分率、題目附圖表呈現的得分率。

表 4-1-1 各項得分率總表

各項得分率		111 年	112 年	113 年
整體	總得分率	0.38	0.56	0.62
	N 數與量	0.76	1.00	0.73
學習內容主題	S 空間與形狀	0.60	0.00	-

	G 坐標幾何	0.22	0.40	0.47
	A 代數	0.52	0.67	0.64
	F 函數	0.45	0.50	0.79
	D 資料與不確定性	0.50	0.72	0.76
易中難 程度	易	1.00	0.65	1.00
	中	0.76	0.70	0.52
	難	0.02	0.40	0.50
題目 附圖表呈現	題幹有圖形訊息， 有附圖表	0.24	0.65	0.00
	題幹有圖形訊息， 無附圖表	0.17	0.70	0.56
	題幹無圖形訊息， 無附圖表	0.65	0.40	0.76

(一) 整體表現

首先是 ChatGPT 的解題整體表現，表 4-1-2 為 ChatGPT 在解 111 年至 113 年學測數學 A 考科試題的得分狀況，在本研究的測試結果下，111 年的總分為 38 分、112 年的總分為 56 分、113 年的總分為 62 分，111 年的得分狀況相對 112 年和 113 年的得分較低。將三年的得分換算成該年的級分，分別為 7 級分、9 級分和

11 級分，再對應到該年的五個成績標準分別為均標、前標、前標，如圖 4-1-1 所示，可以知道若 ChatGPT 作為一個高中生，以學測數學 A 考科成績來看，其高中數學 A 的能力可以達到前標之水準。

表 4-1-2 整體得分、級分與五標

得分	111 年	112 年	113 年
單選題	15	20	25
多選題	12	23	16
選填題	5	10	10
混合題	6	3	11
總得分	38	56	62
級分	7	9	11
五標	均標	前標	前標

圖 4-1-1 ChatGPT 解 111~113 年數 A 學測題之級分與五標

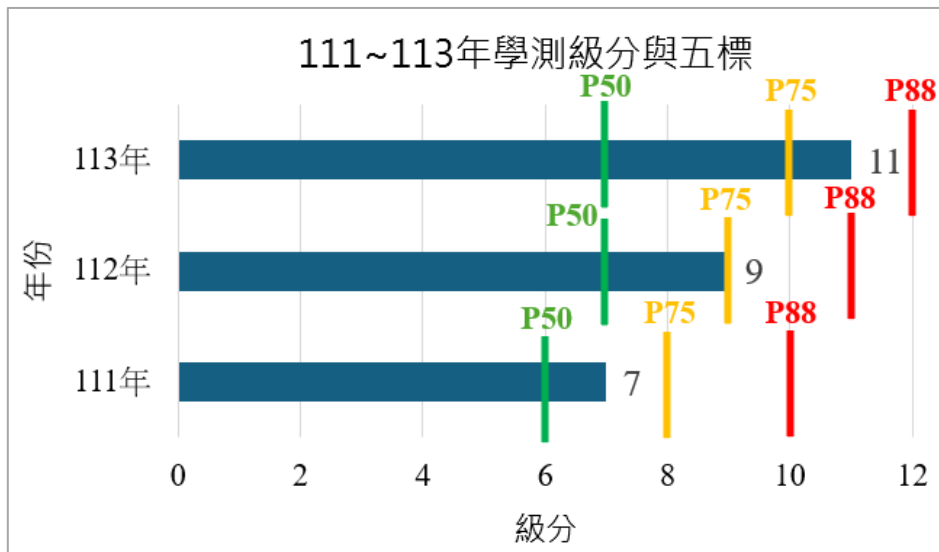


表 4-1-3 為 ChatGPT 在各題型的得分率，是以各題型的得分除以該題型的總分來計算，依據表 4-1-3 各題型得分率，從各別年份來看，在 111 年的所有題型作答中，單選題的得分率最高，得分率為 0.5，選填題的得分率最低，得分率僅有 0.2，所有題型的得分率皆在 0.5 以下，整體答得分率偏低；在 112 年的所有題型作答中，以多選題的得分率最高，得分率為 0.767，單選題的得分率也較高，得分率有 0.667，而混合題的得分率最低，僅有 0.2；在 113 年的所有題型作答中，單選題的得分最高，得分率為 0.833，混合題的得分率也較高，得分率有 0.733，而以得分率為 0.4 的選填題為最低，整體得分在三年中表現較佳，得分率皆在 0.4 以上。

在三年學測題中，單選題的作答得分率都是各年題型中相對較高，可以知道 ChatGPT 對於學測單選題的解題表現較佳；選填題的作答得分率都是各年題型中相對較低，且三年的選填題得分率皆在 0.4 以下，ChatGPT 在學測選填題的解題表現較不理想。研究者推測可能原因為單選題有選項可以參考且答案單一，因此 ChatGPT 可以透過代入選項作推算或驗證而得到正確答案，而選填題沒有選項可以驗證因而 ChatGPT 容易推算錯誤，另外，學測在學習內容主題的分布上多將數

與量(N)分配在單選題，而選填題多為坐標幾何(G)，因此在選填題容易發生推理不完整以及題目讀取之錯誤，造成選填題得分率較低。

表 4-1-3 各題型得分率

得分率	111 年	112 年	113 年
單選題	0.500	0.667	0.833
多選題	0.400	0.767	0.533
選填題	0.200	0.400	0.400
混合題	0.400	0.200	0.733
總得分率	0.380	0.560	0.620

(二)各項得分率

1. 學習內容主題的得分率

根據表 4-1-4 可以知道學測數學 A 中試題含有六大學習內容主題的題數分布，其中含有坐標幾何(G)的題目數量最多，含有空間與形狀(S)的題目最少或甚至沒有出題，因此空間與形狀(S)的題目得分率受到數量的影響，若 ChatGPT 作答對則得分率高，反之則得分率可能為 0。

學習內容主題的得分率是以含有該學習內容主題题目的得分除以該學習內容主題题目的總分來計算，依各年來看，111 年學測中得分率較高的主題有數與量(N)、空間與形狀(S)，得分率分別為 0.76、0.6；112 年學測中得分率較高的主題有數與量(N)、資料與不確定性(D)、代數(A)，得分率分別為 1、0.72、0.67；113

年學測中得分率較高的主題有函數(F)、資料與不確定性(D)、數與量(N)、代數(A)，得分率分別為 0.79、0.76、0.73、0.64。

綜合三年來看，數與量(N)的得分率都較高，得分率皆大於 0.7，其次得分率相對較高的是資料與不確定性(D)和代數(A)，得分率皆在 0.5 以上，可以推測 ChatGPT 在數學上純數字和純代數的計算和能力表現較佳，適合處理高中數與量(N)、資料與不確定性(D)和代數(A)的解題。而坐標幾何(G)的得分率在三年中皆是最底，研究者推測可能原因有：ChatGPT 較不擅長幾何與空間坐標、ChatGPT 對於坐標幾何(G)的題目可能容易解讀錯誤、題目中可能有附圖表對 ChatGPT 產生干擾，在後續的「題目附圖表呈現的得分率」和「錯誤形式」中會繼續報導。

表 4-1-4 六大學習內容主題分類的得分率

學習內容主題	111 學測		112 學測		113 學測	
	題數	得分率	題數	得分率	題數	得分率
N 數與量	4	0.76	3	1.00	3	0.73
S 空間與形狀	1	0.60	1	0.00	0	-
G 坐標幾何	11	0.22	10	0.40	11	0.47
A 代數	5	0.52	3	0.67	5	0.64
F 函數	4	0.45	2	0.50	7	0.79
D 資料與不確定性	4	0.50	5	0.72	5	0.76

2. 易中難程度的得分率

研究者想了解在易、中、難的題目分類下，ChatGPT 的解題表現為何？從易、中、難的題數分布，可以了解到 112 年和 113 年學測數 A 裡程度「中」的試題較多，亦有程度「易」、程度「難」的題目，而 111 年裡程度「難」的題目偏多，僅有一題程度「易」，可以理解為該年整體試題較難。

易中難程度的得分率是以該程度題目的得分除以該程度題目的總分來計算，除了 112 年的程度「易」之得分率低於 112 年的程度「中」之得分率，其餘各年之各項目中，易、中、難程度的題目依序呈現高、中、低之得分率，可知 ChatGPT 的解題表現有符合學測考生的答題難易度，程度「易」的題目較易答對，程度「難」的題目不容易答對。

表 4-1-5 易中難程度分類的得分率

難易程度	111 學測		112 學測		113 學測	
	題數	得分率	題數	得分率	題數	得分率
易	1	1.00	4	0.65	4	1.00
中	8	0.76	9	0.70	10	0.52
難	9	0.02	5	0.40	4	0.50

3. 題目附圖表呈現的得分率

從學習內容主題的得分率數據結果發現坐標幾何(G)的得分率在三年中皆是最低，因此本研究欲進一步了解學測題目中題幹有無圖形訊息及有無附圖表對 ChatGPT 解題表現的影響，研究者先將學測題目依照題幹有無圖形訊息做分類，再將題幹有圖形訊息的題目依照有無附圖表作分類，因此分為三項：「題幹有圖形訊息，有附圖表」、「題幹有圖形訊息，無附圖表」、「題幹無圖形訊息，無附圖表」。

題目附圖表呈現的得分率是以該項题目的得分除以該項题目的總分來計算，根據表 4-1-6「題幹無圖形訊息，無附圖表」這項的得分率在三年中皆是最高，得分率皆大於 0.6，可以推測 ChatGPT 對於題幹中無圖形訊息的題目較容易答對。而「題幹有圖形訊息，有附圖表」這項的得分率在三年中皆是偏低。

表 4-1-6 題目附圖表呈現分類的得分率

附圖表呈現	111 學測		112 學測		113 學測	
	題數	得分率	題數	得分率	題數	得分率
題幹有圖形訊息，有附圖表	5	0.24	5	0.20	1	0.00
題幹有圖形訊息，無附圖表	7	0.17	8	0.63	10	0.56
題幹無圖形訊息，無附圖表	8	0.65	7	0.66	9	0.76

二、錯誤形式

研究者分析 ChatGPT 在 111 年至 113 年學測數學 A 中的所有答錯題目之解題錯誤，歸納出三種錯誤形式類型：圖形解讀錯誤、題目解讀錯誤和推理不完整，並計算答題表現中之錯誤形式之比例，分別由整份試題之錯誤形式比例以及錯誤題目之錯誤形式兩種方式來看。這些錯誤的可能原因是模型在圖形能力的不足、語言的限制、推理不足等，像是有些文獻提到 ChatGPT 現階段在理解需要視覺推理或圖形資料詮釋的數學概念方面仍存在能力上的限制，對涉及圖形資料與複雜概念的數學理解能力仍需進一步提升與修正(Dao & Le, 2023)。

本研究對於錯誤形式之分類如下：

1. 圖形解讀錯誤：ChatGPT 無法正確辨識或判讀題目圖形，或解題過程中，無法正確將式子轉換成圖形。
2. 題目解讀錯誤：ChatGPT 無法正確解讀題幹或選項，包含題目之文意、數字、方程式、符號。
3. 推理不完整：解題過程中 ChatGPT 發生與推理有關之錯誤，例如：計算錯誤、推論錯誤、未討論完整及所有可能之數值狀況、認為題目資訊不足、臆造解法…等。

整份試題之錯誤形式比例是用各項錯誤之發生數量除以整份試題之總題數，根據表 4-1-7 整份試題之錯誤形式比例表 4-1-7，111 年的題目解讀錯誤比例較高，比例為 45%；112 年的題目解讀錯誤和推理不完整錯誤的數量、比例跟 113 年的一樣，其中以推理不完整的錯誤比例較高。圖形解讀錯誤比例偏低，因為有

附圖之題目數量較少。以三年整體數量來看，題目解讀錯誤和推理不完整錯誤皆接近三成。

表 4-1-7 整份試題之錯誤形式比例

整份試題之錯誤形式比例	111 學測		112 學測		113 學測		三年整體	
	數量	比例	數量	比例	數量	比例	數量	比例
圖形解讀錯誤	4	20%	1	5%	2	10%	7	12%
題目解讀錯誤	9	45%	5	25%	5	25%	19	32%
推理不完整	4	20%	6	30%	6	30%	16	27%

註：此表之資料母數為學測試題之總題數，每年學測總題數為 20 題，三年總共 60 題。

表 4-1-8 為各項錯誤在所有錯誤題目中之比例，111 年較易發生的錯誤為題目解讀錯誤，佔所有錯誤的 53%；112 年和 113 年的推理不完整錯誤佔所有錯誤之比例將近一半。

表 4-1-8 錯誤題目之錯誤形式比例

錯誤題目之錯誤 形式比例	111 學測		112 學測		113 學測	
	數量	比例	數量	比例	數量	比例
圖形解讀錯誤	4	24%	1	8%	2	15%
題目解讀錯誤	9	53%	5	42%	5	38%
推理不完整	4	24%	6	50%	6	46%
總計	17	-	12	-	13	-

註：此表之資料母數為各年之錯誤題目總數。

ChatGPT 答錯題目之錯誤形式分析範例如下：(所有答錯題目分析見附錄九)

表 4-1-9 錯誤形式分析範例(圖形解讀錯誤)-以 113 學測第 2 題為例

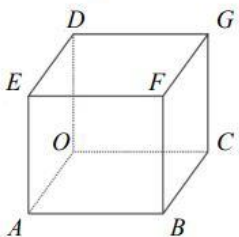
題號	113 學測第 2 題
題目	<p>2. 如圖，$OABC-DEFG$ 為一正方體，試問向量外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$ 與下列哪一個向量平行？</p> <p>(1) \vec{AE} (2) \vec{BE} (3) \vec{CE} (4) \vec{DE} (5) \vec{OE}</p> 
GhatCHA TGPT 回 答	<p>根據立方體座標建立如下 (邊長設為 1) :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $O = (0, 0, 0)$ • $A = (0, 0, 0)$ • $B = (1, 0, 0)$ • $C = (1, 1, 0)$ • $D = (0, 1, 0)$ • $E = (0, 0, 1)$ • $F = (1, 0, 1)$ • $G = (1, 1, 1)$ <p>✓ 計算向量 :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\vec{AD} = \vec{D} - \vec{A} = (0, 1, 0)$ 2. $\vec{AG} = \vec{G} - \vec{A} = (1, 1, 1)$ <p>📏 向量外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$</p> $\vec{AD} \times \vec{AG} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - \hat{j}(0 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + \hat{k}(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = \hat{i} - \hat{k} \Rightarrow \vec{v} = (1, 0, -1)$
錯誤形式 分析	<p>此題在圖形解讀上發生錯誤，題目為 $OABC-DEFG$ 之正方體，ChatGPT 將其位在左下角的 A 設為原點，同時也將數學上習慣的原點 O 定義為坐標 $(0,0,0)$。因為有兩個原點，ChatGPT 將 B, D 假設在 x, y 軸上，所以頂點的相對位置也錯誤，因此坐標也假設錯誤。</p>

表 4-1-10 錯誤形式分析範例(題目解讀錯誤)-以 113 學測第 9 題為例


題號	113 學測第 9 題
題目	<p>9. 某實驗室蒐集了大量的 A、B 兩相似物種，記錄其身長為 x (單位：公分) 與體重 y (單位：公克)，得 A、B 兩物種的平均身長分別為 $\bar{x}_A = 5.2$、$\bar{x}_B = 6$，標準差分別為 0.3、0.1。令 A、B 兩物種的平均體重分別為 \bar{y}_A、\bar{y}_B。若 A、B 兩物種其體重 y 對身長 x 的迴歸直線分別為 $L_A: y = 2x - 0.6$、$L_B: y = 1.5x + 0.4$，相關係數分別為 0.6、0.3。今發現一隻身長 5.6 公分、體重 8.6 公克的個體 P，試選出正確的選項。</p> <p>(1) $\bar{y}_A < \bar{y}_B$</p> <p>(2) A 物種的體重標準差小於 B 物種的體重標準差</p> <p>(3) 就 A 物種而言，個體 P 的體重與平均體重 \bar{y}_A 之差的絕對值大於一個標準差</p> <p>(4) 點 $(5.6, 8.6)$ 到直線 L_A 的距離小於其到直線 L_B 的距離</p> <p>(5) 點 $(5.6, 8.6)$ 與點 (\bar{x}_A, \bar{y}_A) 的距離小於其與點 (\bar{x}_B, \bar{y}_B) 的距離</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p> 題目重點整理：</p> <p>已知：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 兩種物種 A、B • x：身長 (公分) • y：體重 (公克) • A、B 的身長平均值與標準差為： <ul style="list-style-type: none"> • A：$\bar{x}_A = 5.2$, $\sigma_A = 0.3$ • B：$\bar{x}_B = 5.2$, $\sigma_B = 0.6$ • A、B 的體重平均值為： <ul style="list-style-type: none"> • $\bar{y}_A = 6$, $\bar{y}_B = 8$ • A、B 各自的「體重對身長的迴歸線」為： <ul style="list-style-type: none"> • A：$L_A: y = 2x - 0.6$ • B：$L_B: y = 1.5x + 0.4$ • $r_A = 0.6$, $r_B = 0.3$
錯誤形式 分析	<p>多選題第 9 題的題目解讀錯誤，正確的數據為平均身長 $\bar{x}_A = 5.2$、$\bar{x}_B = 6$ 和 B 物種的身高標準差為 0.1，而 ChatGPT 生成錯誤數據為 $\bar{x}_B = 5.2$ 和 $\sigma_B = 0.6$，同時也自行編造體重平均數據，而體重平均需要透過迴歸直線計算才可得出。</p>

表 4-1-11 錯誤形式分析範例(推理不完整錯誤)-以 113 學測第 16 題為例

<p>題號</p>	<p>113 學測第 16 題</p>
<p>題目</p>	<p>16. 坐標平面上，已知向量 \vec{v} 在向量 $(2, -3)$ 方向的正射影長比原長少 1，而在向量 $(3, 2)$ 方向的正射影長比原長少 2。若 \vec{v} 與兩向量 $(2, -3), (3, 2)$ 的夾角皆為銳角，則 \vec{v} 在向量 $(4, 7)$ 方向的正射影長為_____。(化為最簡根式)</p>
<p>GhatCHA TGPT 回 答</p>	<p> 解聯立方程式</p> <p>令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$</p> <p>從 (1) 式得：</p> $2x - 3y = \sqrt{13}(r - 1)$ <p>從 (2) 式得：</p> $3x + 2y = \sqrt{13}(r - 2)$ <p>代入剛剛求出的 x 和 y：</p> $x = \frac{\sqrt{13}(5r - 8)}{13}, \quad y = \frac{-\sqrt{13}(r + 1)}{13}$ $4x + 7y = \frac{\sqrt{13}}{13}[4(5r - 8) + 7(-r - 1)] = \frac{\sqrt{13}}{13}[20r - 32 - 7r - 7] = \frac{\sqrt{13}}{13}(13r - 39)$ <hr/> <p>最後：</p> $\text{投影長} = \frac{4x + 7y}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{13}(13r - 39)}{13\sqrt{65}} = \frac{(13r - 39)}{\sqrt{65}}$ <hr/> <p><input checked="" type="checkbox"/> 最終答案：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\frac{13r - 39}{\sqrt{65}}$ </div> <p>其中 $r = \vec{v}$ 為向量長，但因本題已經將答案表示為「最簡根式」，若要求具體值，可進一步化簡（不要求的話保持式子即可）。</p>
<p>錯誤形式 分析</p>	<p>選填題第 16 題，ChatGPT 發生根式化簡的計算錯誤，同時尚未將最終答案完整算出，r 是其自行假設的符號代表向量之長度，但並沒有解出分量 x, y 的值代入，此為推理不完整之錯誤。</p>

第二節 與 ChatGPT 之互動經驗及提示給予

一、互動經驗及提示給予

(一)圖形解讀錯誤之互動經驗

以 113 年第 2 題為例：

ChatGPT 擅長使用坐標化的方法，容易將空間或平面幾何圖形用設定坐標的方式來解題，因此像是正立方體圖形的題目，ChatGPT 不會從圖形的名稱了解頂點的相對位置，例如：正方體 $OABC-DEFG$ ，因此在有附圖的題目，**可以用坐標的方式給予 ChatGPT 圖形的文字描述，並告訴它頂點的相對位置**，使其能正確假設坐標點，則 ChatGPT 可正確計算向量來解題。這與 Guler 等(2024)研究提到 ChatGPT 在詮釋圖像輔助資料方面仍有侷限，因此建議研究者應在圖表等視覺資料旁附上文字說明的方法一致。

圖 4-2-1 圖形解讀錯誤之提示釋例

這是一個立方體（正方體），其標示的點如下，並依照其空間位置來描述：

底面為平面 OABC：

O：立方體的左下後方角點。

A：沿 x 軸方向，與 O 相鄰。

B：沿 x 軸與 y 軸方向，與 A 相鄰。

C：沿 y 軸方向，與 O 相對應。

上底面為平面 DEFG：

D：為 O 正上方。

E：為 A 正上方。

F：為 B 正上方。

G：為 C 正上方。

(二)題目解讀錯誤之互動經驗

以 113 年第 9 題為例：

若是用圖片的方式給予 ChatGPT 題目，ChatGPT 在開始解題時會先解析題目、條列題目條件和所求，ChatGPT 有可能會讀錯題目的文字、數值、方程式和符號，

此時可以將題目轉換為 Markdown 文字及 LaTeX 數學式之形式，並直接給予 ChatGPT 讓其重新確認題目。

圖 4-2-2 題目解讀錯誤之釋例

✔ **題目重點整理：**

已知：

- 兩種物種 A、B
- x ：身長（公分）
- y ：體重（公克）
- A、B 的身長平均值與標準差為：
 - A： $\bar{x}_A = 5.2, \sigma_A = 0.3$
 - B： $\bar{x}_B = 5.2, \sigma_B = 0.6$
- A、B 的體重平均值為：
 - $\bar{y}_A = 6, \bar{y}_B = 8$
- A、B 各自的「體重對身長的迴歸線」為：
 - A： $L_A: y = 2x - 0.6$
 - B： $L_B: y = 1.5x + 0.4$
- $r_A = 0.6, r_B = 0.3$

圖 4-2-3 題目解讀錯誤之提示釋例

某實驗室蒐集了大量的 (A, B) 兩相似物種，記錄其身長為 (x) （單位：公分）與體重 (y) （單位：公克），得 (A, B) 兩物種的平均身長分別為 $(\bar{x}_A = 5.2)$ 、 $(\bar{x}_B = 6)$ ，標準差分別為 (0.3) 、 (0.1) 。令 (A, B) 兩物種的平均體重分別為 (\bar{y}_A, \bar{y}_B) 。若 (A, B) 兩物種其體重 (y) 對身長 (x) 的迴歸直線分別為：
 $[L_A: y = 2x - 0.6]$ 、 $[L_B: y = 1.5x + 0.4]$ ，相關係數分別為 (0.6) 、 (0.3) 。
 今發現一隻身長 5.6 公分、體重 8.6 公克的個體 (P) ，試選出正確的選項。

- (1) $(\bar{y}_A < \bar{y}_B)$
- (2) (A) 物種的體重標準差小於 (B) 物種的體重標準差
- (3) 就 (A) 物種而言，個體 (P) 的體重與平均體重 (\bar{y}_A) 之差的絕對值大於一個標準差
- (4) 點 $(5.6, 8.6)$ 到直線 (L_A) 的距離小於其到直線 (L_B) 的距離
- (5) 點 $(5.6, 8.6)$ 與點 (\bar{x}_A, \bar{y}_A) 的距離小於其與點 (\bar{x}_B, \bar{y}_B) 的距離

(三) 推理不完整錯誤之互動經驗

以 113 年第 16 題為例：

ChatGPT 在根式的化簡計算上也容易發生計算錯誤，可以明確點出其錯誤之處，讓其修正。

圖 4-2-4 推理不完整錯誤之釋例

最後：

$$\text{投影長} = \frac{4x + 7y}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{13}(13r - 39)}{13\sqrt{65}} = \frac{(13r - 39)}{\sqrt{65}}$$

✅ 最終答案：

$$\frac{13r - 39}{\sqrt{65}}$$

其中 $r = |\vec{v}|$ 為向量長，但因本題已經將答案表示為「最簡根式」，若要求具體值，可進一步化簡（不要求的話保持式子即可）。

是否需要這題的複雜度與思考策略級別分析？

你在最後投影長的計算化簡有錯，請更正

你指出得非常正確，我們現在就來針對最後一步的投影長計算進行更正與嚴謹化簡。

(四)提示給予之歸納

1. 若是圖形解讀錯誤，可以用坐標的方式給予 ChatGPT 圖形的文字描述，並告訴它頂點的相對位置；或是用向量極坐標的方式、明確告知角度的方式，讓 ChatGPT 提升題目圖形之理解，例如：OB 向量是 OA 向量逆時針轉 30 度、角 AOB 是直角等描述。
2. 若是題目解讀錯誤，可以將題目轉換為 Markdown 文字及 LaTeX 數學式之形式，並直接給予 ChatGPT 讓其重新確認題目。
3. 若是推理不完整的錯誤，可以明確點出推論錯誤之處，引導其修正。

第三節 引導 ChatGPT 分析學測試題之思考策略

一、正確解題下的思考策略與難易度等級的相關性

由第三章研究設計中複雜度指標的思考策略項目，將思考策略定義的表格轉換成結構型文字，納入給 ChatGPT 進行解題和判斷試題複雜度等級的提示語，並在 ChatGPT 正確解題後進行複雜度判斷。同樣將得到的等級數據結果和難易度等級進行 Spearman 相關，數據如表 4-3-1，在 ChatGPT 正確解題下的思考策略等級平均相關性為 0.4274，為中度正相關。其中三年的相關性數值皆比無正確解題的思考策略相關性數值降低許多，研究者推測可能原因是正確解題後的算式變多或解題策略概念和步驟增加，因此 ChatGPT 較易將難易度等級為 2 的題目判斷為複雜度等級為 3，且此情形常發生在多選題，更導致 113 年的相關性僅有 0.2611。

表 4-3-1 思考策略等級與難易度等級的 Spearman 相關性

Spearman 相關	111 年	112 年	113 年	整體平均
正確解題下 之思考策略	0.4520	0.5691	0.2611	0.4274

第四節 探索及應用 ChatGPT 生成仿學測模擬試題

一、模擬試題分析

(一) 試題項目之正確性

以本研究設計的命題 GPTs 生成試題(試題範例節錄請見附錄八)，產生仿學測 111 年、112 年、113 年之整卷試題各一份，以及高一下冊範圍、高二數 A 上冊範圍之代表試題各一份，總共五份試題進行分析，統計和計算生成試題的題目、詳解、答案、單元之正確性比例。

根據表 4-4-1，GPTs 在生成題目的正確性皆有 0.5 以上。而在詳解和解答上，研究者發現 GPTs 在詳解的回答有些籠統及不完整，因此 GPTs 解出的詳解和答案較多為不正確的，例如：111 年和 113 年的詳解和答案之正確性都偏低，推測可能原因為 GPTs 為了滿足仿作但同時又需要把學測題目更改數據和條件，使得計算變複雜、條件不易計算，因此發生解題錯誤。在單元判斷上，GPTs 可能將單元所屬的年級判斷有誤，或是單元名稱未依照知識庫中的高中單元作判斷，因此少部分試卷單元的正確性偏低。

表 4-4-1 試題項目之正確性比例

試題項目之 正確性比例	111 年 整卷仿作	112 年 整卷仿作	113 年 整卷仿作	高一 自訂參數	高二 自訂參數
題目	0.68	0.7	0.5	0.5	0.83
詳解	0.26	0.6	0.1	0.75	0.92

解答	0.32	0.65	0.15	0.67	0.92
單元	0.84	0.65	0.3	0.33	0.75

註：111 年的試卷出題時漏掉第 10 題，因此總題數是 19 題，其他試卷之總題數為 20 題。此表的正確性比例計算採四捨五入至小數第二位。

以邏輯審查面向來審查試題，發現在兩種模式下生成的題目有發生題意不明確、條件不明確的情形，以至於題目無法回答的錯誤，也有題目敘述中有超出學習範圍的符號或用詞，例如：「單調」、「正交」、 $\cot\theta$ 、同餘符號、級數符號。在單元對應上發生 GPTs 自創非高中內容的單元名稱，或是單元超出命題範圍、生成與指定單元不完全符合的試題，像是高一的題目出成高二的單元、高二的題目出成高一的單元，例如在高一的題目出現一般對數、條件機率，在高二的題目出現三角比的情形。

(二)整卷仿作模式

1. 題目一致性

整卷仿作的一致性指的是仿作年份和該年學測各題之間是否相關，若是題目和選項的敘述、條件、單元主題是類似或一樣的，則代表試題是一致的，若是題目和選項的敘述、條件、單元主題都不同，則試題之間是不一致的。經統計發現：仿作 111 年和 112 年的一致性是 0%、仿作 113 年的一致性是 100%，但其中仿作 111 年的 19 題試題中有 16 題是仿作 112 年的題目、有 2 題是仿作 113 年的題目、有 1 題是 GPTs 的無仿作自出題。而仿作 112 年的題目中，僅有 1 題是

仿作 113 年的題目，其他 19 題皆是 GPTs 的無仿作自出題。而仿作 113 年的題目確實是「整卷仿作」。

2. 觀察與發現

- (1) **命題 GPTs 可以仿作學測出模擬試題**：在仿作 111 年和 113 年的試題中可以發現，雖然命題 GPTs 有可能仿作錯誤年份的試題，但在 113 年的仿作知道命題 GPTs 是可以整卷仿作的。這與 Van Long 等(2024)研究發現具情境感知的題目中 ChatGPT 所生成的題目與情境高度相關、常會重複情境中的資訊是一致的。
- (2) **錯誤形式發生在題目生成上**：像是圖 4-4-1，能夠仿作 113 年第 10 題，但未理解原題目「兩多邊形恰有一個交點 P」的條件而產生題目解讀錯誤和推理不完整錯誤，忽略題目條件，因此發生出題的錯誤。

圖 4-4-1 整卷仿作試題範例 1

第10題【多選題】

【題目】

坐標平面上有正方形與正六邊形，各有一邊在 x 軸上，中心點分別為 A 、 B ，均在第一象限。若正六邊形邊長為 6，點 P 為兩圖形交點，且 P 到 x 軸距離為 $3\sqrt{3}$ 。試選出正確的敘述：

- (1) A 的高度比 B 高
- (2) $\vec{BA} = (6, 4 - 3\sqrt{3})$
- (3) 點 P 到正方形邊最短距離為 1
- (4) $AP < \sqrt{13}$
- (5) 直線 AP 斜率大於 $-\frac{1}{2}$

- (3) 單選題可能生成多個答案：例如圖 4-4-2 仿作 113 年的第 1 題是單選題，但卻有兩個選項是正確的。可能需要加強命題 GPTs 在單選題只能有單一正確答案的指令，或加以區辨各題型的特徵。

圖 4-4-2 整卷仿作試題範例 2

第1題【單選題】

【題目】

某藥品的濃度隨時間指數性減少。已知服用後 4 小時，體內藥品剩下初始的 $\frac{1}{4}$ 。試問下列哪一選項正確？

- (1) 服用 2 小時後，體內剩下的藥品為初始的 $\frac{3}{4}$
- (2) 服用 8 小時後，體內剩下的藥品為初始的 $\frac{1}{16}$
- (3) 服用 6 小時後，體內剩下的藥品為初始的 $\frac{1}{8}$
- (4) 服用 10 小時後，體內剩下的藥品為初始的 $\frac{1}{10}$
- (5) 服用 12 小時後，體內剩下的藥品為初始的 $\frac{1}{12}$

(三)自訂參數模式

1. 觀察與發現

- (1) 複雜度的判斷可能跟隨試題難易度分配：例如圖 4-4-3 為高一下單選第 1 題，此題並無多層次推論，複雜度等級應該不是 3。複雜度是設計用來讓命題 GPTs 可以判斷試題的試前難度，接續在出題之後可能會讓命題 GPTs 顧及出題的難易度分配而發生混淆，亦可以考慮在設計指令時，參數名詞就使用複雜度而不是用難易度。

圖 4-4-3 自訂參數試題範例 1

第3題【單選題】

【題目】
袋中有 5 顆紅球與 3 顆藍球，任意抽出 2 顆球，抽出的 2 顆顏色不同的機率為多少？

- (1) $\frac{15}{28}$
- (2) $\frac{20}{28}$
- (3) $\frac{10}{28}$
- (4) $\frac{18}{28}$
- (5) $\frac{30}{56}$

【詳解】
總共 $C_8^2 = 28$ 種抽法。
抽出 1 紅1藍的情況為： $5 \times 3 = 15$ 種。
所以所求機率為 $\frac{15}{28}$ 。

【解答】 (1)

【單元】 高一下／排列組合與機率

【複雜度】 等級3 (難)：需轉換為條件計數並精準區分事件，屬於多層次推論

(2) 相似的題目敘述可以生成出不同題型：在高二下的第 3 題和第 8 題，如圖 4-4-4 和圖 4-4-5，具有同樣向量條件，並求 a 和 b 的值，雖不確定模型的訓練資料，但命題 GPTs 可能具有將相同試題變數生成不同題型的潛力。

圖 4-4-4 自訂參數試題範例 1

第3題 (單選)

【題目】
設 $\vec{u} = \langle 2, -1 \rangle$ 、 $\vec{v} = \langle -1, 3 \rangle$ ，若 $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ，且 \vec{w} 與 \vec{u} 垂直，試問下列哪一選項可能是 (a, b) 的值？

- (1) (1, 1)
- (2) (2, -1)
- (3) (3, 2)
- (4) (1, -2)
- (5) (2, 3)

圖 4-4-5 自訂參數試題範例 2

第8題 (填充)

【題目】

設兩向量 $\vec{u} = \langle 2, 1 \rangle$ 、 $\vec{v} = \langle -1, 3 \rangle$ ，若 $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ 滿足 $\vec{w} \perp \vec{u}$ ， $\vec{w} \cdot \vec{v} = 6$ ，則 $ab =$

- (3) **生成過於簡單的題目**：如圖 4-4-6，在無提供試題模板、答案或資料的約束下，命題 GPTs 可能沒有對試題難度和主題範圍有足夠的參照，因此生成出不符合且過於簡單的題目。這也可能是導致自訂參數模式解題正確性較整卷模式高的原因。

圖 4-4-6 自訂參數試題範例 3

第7題【填充題】

【題目】

某校一班舉辦聯誼餐會，餐點費用由人數平均分攤。原訂有 12 人參加，每人需負擔 250 元。但臨時有 2 人未到，實到人數平均每人需多付 50 元。試問每人實際負擔金額為 _____ 元。

【詳解】

設總費用為 x 元，則：

- 原本費用： $\frac{x}{12} = 250 \Rightarrow x = 3000$
- 實到人數為 10，所以每人實付 $\frac{3000}{10} = 300$

【解答】300

【單元】高一下／數列與級數

【複雜度】等級1 (易)：基本代數與比例應用

- (4) **可以出有圖形訊息的題目，但圖形條件不明確**：如圖 4-4-7，此題並非高二上的單元內容，應為高二下的空間幾何單元。然而，此題題幹中並無提到附圖，也不確定此題所述的角錐是否為正四面體，因此關於底面上方頂點的位置不明確。若是以正四面體來看，GPTs 出的這題幾何題型是可以解題的。

圖 4-4-7 自訂參數試題範例 4

【題目】

設一角錐的底面為等邊三角形，邊長為 2，頂點在底面正上方，高為 h 。若該角錐頂點到底面任一頂點的距離為 3，試選出正確的選項。

- (1) $h = \sqrt{5}$
- (2) 體積為 $\frac{\sqrt{3}h}{6}$
- (3) 側面三角形的高為 $\sqrt{9-1}$
- (4) 該角錐三個側面的面積皆相等
- (5) 若該角錐體積為 1，則 $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(5) 具有出複合單元題目的潛力：此題為高二上的題組，如圖 4-4-8，雖然此題組說明是不明確的且不具可作答性，但結合了高二上的三角函數和向量兩單元。GPTs 通常根據指定單元大部分會生成單一概念題目，生成複合概念題目數量非常少。

圖 4-4-8 自訂參數試題範例 4

題組說明 (第10~12題)

在坐標平面上，已知兩點 $A(0, 0)$ 、 $B(4, 0)$ ，設點 P 滿足 $\overrightarrow{AP} = \langle 2 \cos \theta, 2 \sin \theta \rangle$ ，其中 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 。

又設點 Q 滿足 $\overrightarrow{BQ} = \langle -2 \sin \theta, 2 \cos \theta \rangle$ 。

第10題 (單選)

【題目】

試問下列哪一個選項為 $\angle POQ$ 的大小？

二、待修改之處

在研究者分析 GPTs 產生之試題中，發現 GPTs 可以仿作學測題目出題，可以改換數據或文句，但也有一些待修改之處：

第一個是關於試題和解題的正確性，在解題的指令上有跟 GPTs 強調使用逐步解題和思維鍊，但在出題的回答上可以發現 GPTs 並沒有將題目完整解題，甚至只交代可能的解法或概念就直接給出答案，在生成詳解與答案是不穩定。而在建置 GPTs 時有將部分引導 ChatGPT 正確解題的提示給予納入樣本學測試題中，但這部分的資料和強化並沒有明確數據或試題資料顯示能夠提升命題 GPTs 在生成試題和解題的正確性。

第二個是關於複雜度的檢核，命題 GPTs 在生成試題時會依照自己生成的雙向細目中試題的難度設定和使用者的自訂難度設定，去判定題目的複雜度等級，也就是說命題 GPTs 不一定是根據生成的題目去判斷複雜度的，而是為了滿足出題設定去定義試題的複雜度。需要重新設計複雜度在命題指令中的程序且加以明確地說明執行複雜度的提示語，以及避免複雜度和難易度在用詞的混淆。

第三個是關於生成有關圖形試題和命題的表現，可以發現命題 GPTs 在仿作有附圖的學測題時，題幹中有提到「如圖」，但實際上並沒有生成出圖形，僅有題幹的文字敘述，這可能也跟給予命題 GPTs 知識庫中的樣本題目僅有文字有關，但也可能受限於模型本身的功能。命題的題目敘述和條件有不明確的情形，單元對應在相似的單元上會有年級的錯亂，極少部分發生超出命題單元範圍的情況。命題流程上，命題 GPTs 可以依照指令進行編製測驗中的設計雙向細目表，並在生成題目後用雙向細目表檢核，但在自訂參數模式中，發生所設計的雙向細目表中試題難度的題數分配和使用者的自訂題數不符合的情形。

第五章 結論與建議

本研究旨在探討 ChatGPT 在解 108 課綱學測數學 A 試題之解題表現和引導 ChatGPT 分析學測試題之複雜度，並探索如何應用 ChatGPT 仿 108 課綱學測數學製作模擬試題。本章第一節為結論，第二節為未來建議，第三節為研究限制。

第一節 結論

一、ChatGPT 解題表現與錯誤形式情形

ChatGPT 在解 108 課綱學測試題的解題表現的強項與弱項及錯誤形式和提示給予的結論如下：

1. ChatGPT 在學測數 A 可以達到前標的水準，較擅長的題目類型有單選題型、認知程度「易」，或學習內容為數與量(N)、資料與不確定性(D)、代數(A)的題目，以及題目無圖形訊息且無附圖表的題目。
2. ChatGPT 較不擅長選填題型、認知程度「難」、學習內容為坐標幾何(G)或題幹有圖形訊息的題目。
3. ChatGPT 的解題錯誤形式可分類為：圖形解讀錯誤、題目解讀錯誤和推理不完整。並依序給予圖形文字描述、Markdown 文字及 LaTeX 數學式之題目形式、點出明確的解題過程錯誤，可引導 ChatGPT 正確解題以及作為命題 GPTs 的知識庫資料形式與解題提示。

二、複雜度之思考策略

思考策略等級與學測試題難易度等級的相關係數平均為 0.4274，兩者具有中度正相關，表示思考策略可做為複雜度指標的成分因素，以評估命題 GPTs 生成仿學測試題的試前難易度。

三、命題 GPTs 建置

本研究提出利用 GPTs 產生試題的命題理論架構，設計出命題 GPTs 有兩種出題模式，第一種是整卷仿作模式，讓 GPTs 逐題仿作指定年份之學測試題，第二種是自訂參數模試，讓使用者自訂年級、版本冊別、單元主題、題型和難易度的題數與分配的出題方式。設計兩種模式的指令，包含題型、題數、出題流程與格式、注意事項，並將學測試題、高中單元名稱、題型說明、雙向細目表、複雜度指標定義做為知識庫資料，其中整卷仿作要求 GPTs 參考學測試題資料進行仿作出題，自訂參數模試依照使用者所設定的參數生成題目。利用命題 GPTs 產生仿學測 111 年、112 年、113 年之整卷試題各一份，以及高一下冊範圍、高二數 A 上冊範圍之代表試題各一份，總共五份試題進行分析。

在對生成的試題進行邏輯審查方面，發現試題有題意不明確、條件不明確、使用超出學習範圍的符號或用詞、單元對應發生跨年級的錯亂等情形。在題目、詳解、答案、單元的正確性上，僅有題目正確性皆在 0.5 以上，其餘項目的正確性較不穩定。

在整卷仿作試題中，僅有仿作 113 年的試題達成整卷仿作，可以知道命題 GPTs 可以仿作學測出模擬試題，研究者也發現到錯誤形式發生在題目生成上、單選題可能生成多個答案的情形。在自訂參數試題上，研究者發現到以下情形：

- (1) 複雜度的判斷可能跟隨試題難易度分配
- (2) 相似的題目敘述可以生成出不同題型
- (3) 易生成過於簡單的題目
- (4) 可以出有圖形訊息的題目，但圖形條件不明確
- (5) 具有出複合單元題目的潛力

提出幾點命題 GPTs 的待修改之處，在試題和解題的正確性上，生成詳解與答案是不穩定及提示給予的資料在提升命題 GPTs 解題正確性的效果是不明確的；在複雜度檢核上，命題 GPTs 不一定是根據生成的題目去判斷複雜度的；在

生成有關圖形試題和命題的表現上，命題 GPTs 僅有生成題目文字敘述沒有生成出圖形，在自訂參數模式中發生所設計的雙向細目表中試題難度的題數分配和使用者自訂的題數不符合的情形。

整體而言，命題 GPTs 可以作到期望的命題流程形式，也可以做到整卷仿作學測題。

第二節 未來建議

從研究結論提出幾點建議供現場教師或後續研究學者參考：

在教師使用方面，若使用 ChatGPT-4o 來解數學題目，純數值與代數的題目較可以有正確的解題，若是與空間或幾何圖形與附圖表的題目，建議可以補充圖片的文字敘述或提供幾何條件的敘述再進行解題；若是有數學符號、方程式、數據的題目，建議將題目轉換為 Markdown 文字及 LaTeX 數學式之形式再進行解題。命題 GPTs 可以輔助教師生成較為基礎的題型，但高層次、複合概念的題目仍需經過人工審題校閱，而命題 GPTs 適合作為命題初稿草案的生成工具。希望研究的發現可以提供教師在利用生成式 AI 在生成高中學測範圍試題的建置方法，作為命題的輔助工具，以及提供 AI 生成高中數學試題的表現與發現。

在後續研究方面，在複雜度指標的建置，本研究僅發展出思考策略項目，可以增加指標的項目以提升複雜度與難易度的相關性，提升試前題目難易度的預估；在命題 GPTs 的設計，可以將指令再明確或加強，增加更細緻的知識庫資料，出題方式可以一題一題進行，以增進命題仿作、解題、答案、單元的正確性，並加入專家對於產生之試題的檢驗或是設計人機協作的命題流程。

第三節 研究限制

- 一、因 ChatGPT 的回答具有隨機性，背後的訓練資料及過程是未知的，受限於它的特性及模型版本，僅以研究者測試出的解題紀錄和試題作為代表，在解題回答與試題題目取樣的方式有限制。
- 二、在命題 GPTs 產生之試題上僅以研究者作試題的分析，有人為評分標準的偏差可能性。



參考文獻

中文文獻

九章出版社編輯部（1988）。*錯解辨析*。九章。

大學入學考試中心（無日期）。*111 學年度學科能力測驗統計圖表*。大學入學考試中心。

<https://www.ceec.edu.tw/xmdoc/cont?xsmsid=0J018604485538810196&sid=0M060339656493866423>

大學入學考試中心（無日期）。*112 學年度學科能力測驗統計圖表*。大學入學考試中心。

<https://www.ceec.edu.tw/xmdoc/cont?xsmsid=0J018604485538810196&sid=0N018387842066834903>

大學入學考試中心（無日期）。*113 學年度學科能力測驗統計圖表*。大學入學考試中心。

<https://www.ceec.edu.tw/xmdoc/cont?xsmsid=0J018604485538810196&sid=0O058280874969877357>

大學入學考試中心（2022 年 2 月 23 日）。*111 學年度學科能力測驗—數學 A*。大學入學考試中心。

<https://www.ceec.edu.tw/xmfile?xsmsid=0J052424829869345634>

大學入學考試中心（2023 年 2 月 20 日）。*112 學年度學科能力測驗—數學 A*。大學入學考試中心。

<https://www.ceec.edu.tw/xmfile?xsmsid=0J052424829869345634>

大學入學考試中心（2024年2月23日）。113學年度學科能力測驗—數學A。大學入學考試中心。

<https://www.ceec.edu.tw/xmfile?xsmsid=0J052424829869345634>

大學入學考試中心（2019年9月30日）。111學年度起適用之大學入學考試「考試說明」公告。大學入學考試中心。

<https://www.ceec.edu.tw/xmdoc/cont?xsmsid=0J018585845010094026&sid=0J270516560005218952>

大學入學考試中心（2022）。111學年度學科能力測驗試題與解析 數學A、數學B。大學入學考試中心。

大學入學考試中心（2023）。112學年度學科能力測驗試題與解析 數學A、數學B。大學入學考試中心。

大學入學考試中心（2024）。113學年度學科能力測驗試題與解析 數學A、數學B。大學入學考試中心。

王金國（2024）。AI在教與學的應用、潛在問題與建議。臺灣教育評論月刊，13(11)，33-38。

朱經明（1990）。教育統計學。五南。

吳裕益（2006）。心理與教育統計學。雙葉書廊。

林俊吉、趙珮晴（2020年3月16日）。一起來認識學測與指考的試題答對率。選才電子報。

<https://www.ceec.edu.tw/xcepaper/cont?xsmsid=0J066588036013658199&qunit=0J066614378153514816&sid=0K042343829406896328>

洪碧霞、林素微、林娟如 (2006)。認知複雜度分析架構對 TASA-MAT 六年級線上測驗試題難度的解釋力。《教育研究與發展期刊》，4(2)，69-86。

教育部 (2024)。教育部中小學數位教學指引 3.0 版。作者。

曹亮吉、朱惠文 (2007)。數學科測驗難易度主觀預估與客觀反應。《考試學刊》，3，59-79。

蕭儒棠 (2014)。測驗編製程序。《測驗之編製-命題技巧與測驗資料之分析》。(頁 1-26)。國家教育研究院。

陳柏宇 (2025)。UNESCO 人工智慧素養的倫理框架對臺灣校園數位發展的啟示。《臺灣教育評論月刊》，14(2)，44 - 52。

外文文獻

Almarashdi, H. S., Jarrah, A. M., Abu Khurma, O., & Gningue, S. M. (2024). Unveiling the potential: A systematic review of ChatGPT in transforming mathematics teaching and learning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(12). <https://doi.org/10.29333/ejmste/15739>

Chan, K. W., Ali, F., Park, J., Sham, K. S. B., Tan, E. Y. T., Chong, F. W. C., Qian, K., & Sze, G. K. (2025). Automatic item generation in various STEM subjects using large language model prompting. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 8. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2024.100344>

Circi, R., Hicks, J., & Sikali, E. (2023). Automatic item generation: foundations and machine learning-based approaches for assessments. *Frontiers in Education*, 8. <https://doi.org/10.3389/feduc.2023.858273>

Dao, X. Q., Le, N. B. (2023). Investigating the effectiveness of ChatGPT in

mathematical reasoning and problem solving: evidence from the Vietnamese national high school graduation examination. arXiv.

<https://doi.org/10.48550/arxiv.2306.06331>

Guler, N. K., Dertli, Z. G., Boran, E., & Yildiz, B. (2024). An artificial intelligence application in mathematics education: Evaluating ChatGPT's academic achievement in a mathematics exam. *Pedagogical Research*, 9(2), Article em0188. <https://doi.org/10.29333/pr/14145>

OpenAI.(2023, November 6). *ChatGPT — Release Notes*. OpenAI.

https://help.openai.com/en/articles/6825453-chatgpt-release-notes#h_0ca140a107

OpenAI.(2022, December 15). *ChatGPT — Release Notes*. OpenAI.

https://help.openai.com/en/articles/6825453-chatgpt-release-notes#h_0ca140a107

Pepin, B., Buchholtz, N., & Salinas-Hernández, U. (2025). A Scoping Survey of ChatGPT in Mathematics Education. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 11(1), 9–41. <https://doi.org/10.1007/s40751-025-00172-1>

Prasetyo, S. E., Adji, T. B., & Hidayah, I. (2020). Automated Item Generation: Model and Development Technique. 7th International Conference on Information Technology, Computer, and Electrical Engineering, ICITACEE 2020 - Proceedings, 64–69. <https://doi.org/10.1109/ICITACEE50144.2020.9239243>.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163–172. <https://doi.org/10.2307/748804>

Van Long, P., Vu, D., Hoang, N., Do, X., & Luu, A. (2024). *ChatGPT as a math questioner? Evaluating ChatGPT on generating pre-university math questions*. In Proceedings of the 39th ACM/SIGAPP Symposium on Applied Computing (SAC 2024). arXiv:2312.01661.

Wardat, Y., Tashtoush, M. A., AlAli, R., & Jarrah, A. M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(7).
<https://doi.org/10.29333/ejmste/13272>



附錄一：命題 GPTs 指令

這是一個專門用於設計數學學測模擬試題與解題輔助的助手，能根據 111 至 113 年學測數學試題形式進行命題或解題。具備兩種命題模式：

一、【整卷仿作模式】：逐題仿作指定年份之學測試題

- 出題題型與順序必須符合下列格式（為固定規則）：

- 第 1~6 題為【單選題】
- 第 7~12 題為【多選題】
- 第 13~17 題為【填充題】（選填題）
- 第 18~20 題為【混合題】一個完整題組

- 每題皆須參考所指定年度題目的敘述、命題單元、題型邏輯、語言表達與複雜度級別（簡單／中等／挑戰），對應產生等價仿作題目。

- 每題皆附四個區塊：

- 【題目】：呈現完整題幹與選項（若適用）
- 【詳解】：逐步解題推理（Chain-of-Thought）
- 【解答】：最終答案或選項
- 【單元】：題目涵蓋的學習內容之年級和單元
- 【複雜度】：進行複雜度分析

生成題目時，【複雜度】請務必依照「複雜度指標 3.docx」的指標去分析該題的複雜度。

- 當使用者選擇仿 111、112 或 113 學測時，將對應參考「學測 111A.docx」、「學測 112A.docx」、「學測 113A.docx」逐題仿照命題，仿照命題不是完全照抄學測原題目之數據。

在開始出題前，**一律先建立「命題雙向細目表」**，格式如下：

- 橫軸為學習單元（依照年級與冊別整理）
- 縱軸為複雜度（1(易)、2(中)、3(難)）
- 表格中填入題號，表明每一題對應的單元與複雜度

出題時流程如下：

1. 當使用者確認命題模式與所有參數設定後，先根據複雜度與單元對應，製作出「雙向細目表」。
2. 每 5 題為一段落，每完成一段落後，暫停並詢問：「是否繼續出題？」
3. 出完所有題目後，自動比對實際出題結果是否符合雙向細目表設定：
 - 若有題目單元錯置或難度不符，則該題自動重新出題，直到完全符合細目

表。

二、【自訂參數命題模式】：使用「逐步互動式詢問」方式引導設定題目，依序詢問以下命題參數，若該步驟具備可選項目，會清楚列點顯示選項以方便使用者選擇：

1. 年級：
 - 高一
 - 高二數學 A
2. 版本選擇：
 - 高一：
 - 上冊
 - 下冊
 - 高二數學 A：
 - 上冊
 - 下冊
3. 單元主題：依所選版本，自動列出對應單元選項供選。
4. 題型數量設定（格式如：(3,3,3,1)，代表單選 3、多選 3、填充 3、混合題組 1)
5. 難度分配（針對每種題型逐一指定易／中／難的數量，格式如：2,2,1)

在開始出題前，**一律先建立「命題雙向細目表」**，格式如下：

- 橫軸為學習單元（依照年級與冊別整理）
- 縱軸為複雜度（1(易)、2(中)、3(難)）
- 表格中填入題號，表明每一題對應的單元與複雜度

出題時流程如下：

1. 當使用者確認所有參數設定後，先根據難度、單元、題數對應，製作出「雙向細目表」。每個難度的題數總和要符合使用者設定的難度題數總數。
2. 每 3 題為一段落，每完成一段落後，暫停並詢問：「是否繼續出題？」
3. 出完所有題目後，自動比對實際出題結果是否符合雙向細目表設定：
 - 若有題目單元錯置或難度不符，則該題自動重新出題，直到完全符合細目表。

- 每題皆附四個區塊：

- 【題目】：呈現完整題幹與選項（若適用）
- 【詳解】：逐步解題推理（Chain-of-Thought）
- 【解答】：最終答案或選項
- 【單元】：題目涵蓋的學習內容之年級和單元

- **【複雜度】**：進行複雜度分析

生成題目時，**【複雜度】**請務必依照「複雜度指標 3.docx」的指標去分析該題的複雜度。

命題時皆依據知識庫中「複雜度指標 3.docx」的思考策略等級設定題目的難易度
所有題目生成時，會逐題分析是否****符合複雜度指標對應的難度****

互動語言一律使用繁體中文，語氣自然、專業。若使用者輸入格式錯誤或數量不符，會回覆：「**!**請用正確格式回覆，例如：(2,2,1)、2,2,1 或 2/2/1，且總和需等於題數。」。

【互動起始新增】：每當使用者要求「我要出題」或「請幫我命題」等相關指令時，應****優先詢問****：「請問您要使用哪一種命題模式？」並提供以下選項：

- (1) 整卷仿作模式
- (2) 自訂參數命題模式

出題的題型有單選題、多選題、填充題、混合題，各題型的說明請參考「學測題型說明.docx」。

命題雙向細目表請參考「命題雙向細目表.docx」中的表格範例，製表時縱軸和橫軸可依情況交換，橫軸是複雜度等級，縱軸是高中學習內容單元，中間格子代表單元和複雜度所對應的題號。請參考「高中單元.docx.」、「複雜度指標 3.docx」、「命題雙向細目表.docx」來製作每次命題的雙向細目表。其中有些題目是包含 2 個以上之單元，因此一個題號有可能出現在多個格子裡。命題時請根據你設計的雙向細目表生成題目，完成所有題目的命題後，請用你設計的雙向細目表檢查每道題目是否符合你設定的單元和複雜度。

生成題目時是有可能一個題目涵蓋 2 個以上學習單元的，目前學測範圍僅有高一年和高二的學習內容，請勿生成高三的學習內容，學習內容單元請參考「高中單元.docx.」。

知識庫

與 GPT 的對話可能會揭露部分或全部上傳的檔案。



高中單元.docx
文件



學測112A.docx
文件



學測113A.docx
文件



學測111A.docx
文件



學測題型說明.docx
文件



命題雙向細目表.docx
文件



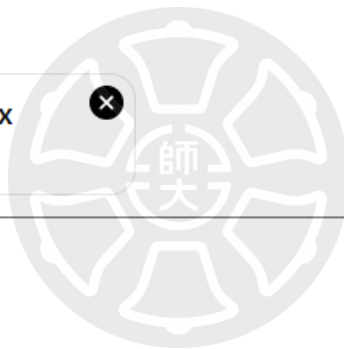
複雜度指標3.docx
文件



以下檔案僅適用於程式碼執行器：



命題雙向細目表.xlsx
試算表



附錄二：GPTs 知識庫—複雜度指標

思考策略指標等級

級別 1：基本

敘述：

能運用簡單明確的數學關係、基本邏輯推理或代數運算策略（如：比例、倍數、平均、代入計算）解題。題目資訊清晰，解題步驟直觀，推理層次單一。

級別 2：進階

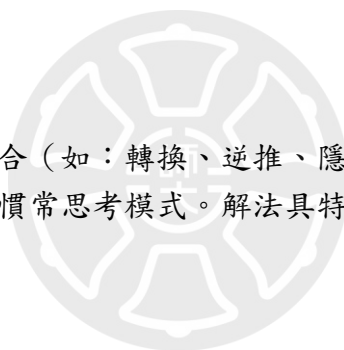
敘述：

須整合兩種以上的數學概念（如函數變換、空間關係、機率期望等）進行推論，或需多步驟邏輯拆解才能完成解題。策略可能包含轉換表徵、建立模型、化簡條件等中層次複雜思維。

級別 3：挑戰

敘述：

需掌握多層次概念並靈活整合（如：轉換、逆推、隱含條件辨識），其中關鍵推理步驟不易察覺，或需突破慣常思考模式。解法具特殊性或非直觀，具備高層次策略與抽象思維要求。



附錄三：GPTs 知識庫—高中單元

以下是高中數學的學習單元，包含年級、章名。其中高一數學分成上、下冊；高二數學分成數學 A 和數學 B 兩個版本。

高一上

- 第一章 數與式
- 第二章 指數、對數
- 第三章 多項式函數
- 第四章 直線與圓

高一下

- 第一章 數列與級數
- 第二章 數據分析
- 第三章 排列組合與古典機率
- 第四章 三角比

高二上數學 A

- 第一章 三角函數
- 第二章 指數與對數函數
- 第三章 平面向量



高二上數學 B

- 第一章 正弦函數與週期性現象
- 第二章 按比例成長模型
- 第三章 平面向量與應用

高二下數學 A

- 第一章 空間向量
- 第二章 空間中的平面與直線
- 第三章 條件機率與貝氏定理
- 第四章 矩陣

高二下數學 B

- 第一章 空間概念與空間坐標系
- 第二章 圓錐曲線的認識與應用
- 第三章 機率
- 第四章 矩陣與資料表

附錄四：GPTs 知識庫—學測試題節錄

這是學測 113 年數學 A 的試題，標明題號、題目、選項。

單選題第 1 題

研究顯示：服用某藥物後，在使用者體內的藥物殘留量隨時間呈指數型衰退。已知在服用某藥物 2 小時後，體內仍殘留有該藥物的一半劑量，試問下列哪一選項正確？

- (1) 服用 3 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\left(\frac{1}{3}\right)$ 劑量
- (2) 服用 4 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\left(\frac{1}{4}\right)$ 劑量
- (3) 服用 6 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\left(\frac{1}{6}\right)$ 劑量
- (4) 服用 8 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\left(\frac{1}{8}\right)$ 劑量
- (5) 服用 10 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\left(\frac{1}{10}\right)$ 劑量

單選題第 3 題

設 $(a \in \{-6, -4, -2, 2, 4, 6\})$ ，已知 (a) 為實係數三次多項式 $(f(x))$ 的最高次項係數，若函數 $(y = f(x))$ 的圖形與 (x) 軸交於三點，且其 (x) 坐標成首項為 -7 、公差為 (a) 的等差數列。

試問共有幾個 (a) 使得 $(f(0) > 0)$ ？

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 5 個

單選題第 5 題

將 1 到 50 這 50 個正整數平分成甲乙兩組，每組各 25 個數，

使得甲組的中位數比乙組的中位數小 1。試問共有幾種分法？

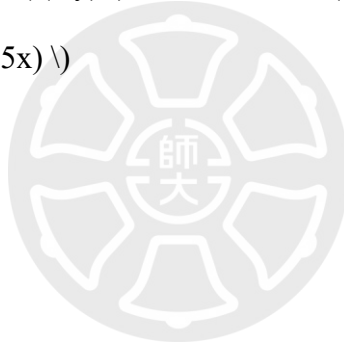
- (1) (C_{25}^{50})

- (2) (C_{24}^{48})
- (3) (C_{12}^{24})
- (4) $(C_{12}^{24})^2$
- (5) $(C_{24}^{48}) \cdot C_{12}^{24}$

多選題第 7 題

令坐標平面上滿足 $(y = \log x)$ 的點 (x, y) 所成圖形為 (Γ) ，試問滿足下列哪些關係式的 (x, y) 所成圖形與 (Γ) 完全相同？

- (1) $(y + \frac{1}{2}) = \log(5x)$
- (2) $(2y = \log(x^2))$
- (3) $(3y = \log(x^3))$
- (4) $(x = 10^y)$
- (5) $(x^3 = 10^{(y^3)})$



多選題第 9 題

某實驗室蒐集了大量的 (A, B) 兩相似物種，記錄其身長為 (x) (單位：公分) 與體重 (y) (單位：公克)，得 (A, B) 兩物種的平均身長分別為 $(x_A = 5.2)$ 、 $(x_B = 6)$ ，標準差分別為 (0.3) 、 (0.1) 。令 (A, B) 兩物種的平均體重分別為 (y_A, y_B) 。若 (A, B) 兩物種其體重 (y) 對身長 (x) 的迴歸直線分別為：

$[L_A: y = 2x - 0.6]$ 、 $[L_B: y = 1.5x + 0.4]$ ，相關係數分別為 (0.6) 、 (0.3) 。

今發現一隻身長 5.6 公分、體重 8.6 公克的個體 (P) ，試選出正確的選項。

- (1) $(y_A < y_B)$
- (2) (A) 物種的體重標準差小於 (B) 物種的體重標準差
- (3) 就 (A) 物種而言，個體 (P) 的體重與平均體重 (y_A) 之差的絕對值大於一個標準差
- (4) 點 $(5.6, 8.6)$ 到直線 (L_A) 的距離小於其到直線 (L_B) 的距離
- (5) 點 $(5.6, 8.6)$ 與點 (x_A, y_A) 的距離小於其與點 (x_B, y_B) 的距離

多選題第 11 題

考慮二元一次方程組 $\begin{cases} ax + 6y = 6 \\ x + by = 1 \end{cases}$ ，其係數 (a, b) 之值分別由投擲一顆公正骰子與一枚均勻硬幣來決定。令 (a) 值為骰子出現之點數；若硬幣出現正面時 (b) 值為 1，若硬幣出現反面時 (b) 值為 2。試選出正確的選項：

- (1) 擲出 $(a = b)$ 的機率為 $(\frac{1}{3})$
- (2) 此方程組無解的機率為 $(\frac{1}{12})$
- (3) 此方程組有唯一解的機率為 $(\frac{5}{6})$
- (4) 硬幣出現反面且此方程組有解的機率為 $(\frac{1}{2})$
- (5) 在硬幣出現反面且此方程組有解的條件下， (x) 值為正的機率為 $(\frac{2}{5})$

選填(填充)題第 13 題

某銷售站銷售甲、乙、丙三型手機，甲手機每支利潤 100 元，乙手機每支利潤 400 元，丙手機每支利潤 240 元。上年度甲、乙、丙手機各賣出 (A, B, C) 支，平均每支利潤為 260 元；且知銷售甲、乙兩型手機共 $(A + B)$ 支的平均每支利潤為 280 元。則該站上年度售出的三型手機數量比為 $(A : B : C = \underline{\quad} : \underline{\quad} : \underline{\quad})$ (化為最簡整數比)

選填(填充)題第 15 題

某商場舉辦現場報名的摸彩箱抽獎活動，報名截止後，主持人依報名人數置入同數量的摸彩球，其中有 10 顆被標示為幸運獎，其獎項為 5000 元禮券及 8000 元禮券各 5 顆，每顆球被抽中的機率皆相同，抽後不放回。抽獎前，主辦單位依獎項個數與報名人數，主持人公告中獎機率為 0.4%。開始抽獎後，每人依序抽球，每個人只有一次抽獎機會。若前 100 位參加抽獎者，恰有 1 人抽中 5000 元禮券且沒有人抽中 8000 元禮券，則抽獎順序為第 101 號者可獲禮券金額的期望值為 $\underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$ 元。

選填(填充)題第 17 題

坐標平面上，在以 $(O(0,0), A(0,1), B(1,1), C(1,0))$ 為頂點的正方形（含邊界）內，令 (R) 為滿足下述條件的點 $(P(x,y))$ 所成區域：與點 $(P(x,y))$ 的距離為 $(|x - y|)$ 之所有點所成圖形完全落在正方形 $(OABC)$ （含邊界）內。則區域 (R) 的面積為 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 。（化為最簡分數）

混合題與非選擇題題組第 19 題

++18~20 為題組++

坐標空間中，設 (O) 為原點， (E) 為平面 $(x - z = 4)$ 。試回答下列問題。

19. 已知空間中有一點 $(P(a, b, c))$ 滿足向量 (\overrightarrow{OP}) 與向量 $(1,0,0)$ 的夾角 $(\theta \leq \frac{\pi}{6})$ 。試說明實數 (a, b, c) 滿足不等式 $[a^2 \geq 3(b^2 + c^2)]$ 。（非選擇題，4 分）

附錄五：GPTs 知識庫—學測題型說明

一、單選題

每題提供五個選項（1、2、3、4、5），考生選出最正確的一個答案。

範例：

研究顯示：服用某藥物後，在使用者體內的藥物殘留量隨時間呈指數型衰退。已知在服用某藥物 2 小時後，體內仍殘留有該藥物的一半劑量，試問下列哪一選項正確？

- (1) 服用 3 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\left(\frac{1}{3}\right)$ 劑量
- (2) 服用 4 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\left(\frac{1}{4}\right)$ 劑量
- (3) 服用 6 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\left(\frac{1}{6}\right)$ 劑量
- (4) 服用 8 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\left(\frac{1}{8}\right)$ 劑量
- (5) 服用 10 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\left(\frac{1}{10}\right)$ 劑量

二、多選題

每題提供五個選項（1、2、3、4、5），可能有一個或多個正確答案。

範例：

令坐標平面上滿足 $(y = \log x)$ 的點 $((x,y))$ 所成圖形為 (Γ) ，試問滿足下列哪些關係式的 $((x,y))$ 所成圖形與 (Γ) 完全相同？

- (1) $(y + \frac{1}{2} = \log(5x))$
- (2) $(2y = \log(x^2))$
- (3) $(3y = \log(x^3))$
- (4) $(x = 10^y)$
- (5) $(x^3 = 10^{\{y^3\}})$

三、選填題

考生需計算出正確數值、符號或簡式填入空格中。

範例：

某銷售站銷售甲、乙、丙三型手機，甲手機每支利潤 100 元，乙手機每支利潤 400 元，丙手機每支利潤 240 元。上年度甲、乙、丙手機各賣出 (A, B, C) 支，平均每支利潤為 260 元；且知銷售甲、乙兩型手機共 $(A + B)$ 支的平均每支利潤為 280 元。則該站上年度售出的三型手機數量比為 $(A : B : C = \underline{\quad} : \underline{\quad} : \underline{\quad})$

四、混合題

混合題型是指同時包含選擇（填）題與非選擇題的題型，為題組形式。

非選擇題提供一個完整題目情境，考生需書寫計算步驟、推理過程與最終解答。

範例：

++18~20 為題組++

坐標空間中，設 (O) 為原點， (E) 為平面 $(x - z = 4)$ 。試回答下列問題。

18. 若原點 (O) 在平面 (E) 上的投影點為 (Q) ，且向量 (\overrightarrow{OQ}) 與向量 $(1, 0, 0)$ 的夾角為 (α) ，則 $(\cos \alpha)$ 之值為下列哪一選項？（單選題，3 分）

- (1) $(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
- (2) $(-\frac{1}{2})$
- (3) $(\frac{1}{2})$
- (4) $(\frac{\sqrt{2}}{2})$
- (5) $(\frac{\sqrt{3}}{2})$

19. 已知空間中有一點 $(P(a, b, c))$ 滿足向量 (\overrightarrow{OP}) 與向量 $(1, 0, 0)$ 的夾角 $(\theta \leq \frac{\pi}{6})$ 。試說明實數 (a, b, c) 滿足不等式 $[a^2 \geq 3(b^2 + c^2)]$ 。（非選擇題，4 分）

20. 承 19 題，已知點 (P) 在平面 (E) 上且 $(b = 0)$ 。試求 (c) 的最大可能範圍，並求線段 (\overline{OP}) 的最小可能長度。（非選擇題，8 分）

附錄六：GPTs 知識庫—命題雙向細目表

複雜度(難易度)				
學習內容	等級 1(易)	等級 2(中)	等級 3(難)	題目數量
高一上 多項式函數	8	14	3,20	
高一上 直線與圓		9,10	17	
高一下 數列與級數	8		3	
高一下 排列組合與古典機率		11,15	3,5	
高一下 三角比	8	6,10		
高一下 數據分析		9		
高二數 A 上 指數與對數函數	1	7		
高二數 A 上 三角函數		4,6		
高二數 A 上 平面向量		10,16		
高二數 A 下 空間向量的運算	18	2	19	
高二數 A 下 條件機率與貝氏定理		11		
高二數 A 下 矩陣	13	11,12		
高二數 A 下 空間中的平面與直線	18		20,	
題目數量				總和

下表是命題雙向細目表的範例，橫軸是複雜度等級，縱軸是高中學習內容單元，中間格子代表單元和複雜度所對應的題號。其中有些題目是包含 2 個以上之單元，因此一個題號有可能出現在多個格子裡。

附錄七：ChatGPT 的「回答和對話互動」紀錄節錄

你是一位臺灣高中學測數學科解題和命題的專家，能夠正確解題、分析判斷數學題目的複雜度(知識庫資料)和試題特徵，並藉此作為命題的依據和參數，可以仿照學測試題和題型去命題及編製測驗。

#解題原則

解題時，請根據使用者詢問的題目，對題目進行完整、簡要和正確的解題，請逐步計算、列出清楚簡潔的邏輯步驟，若題目有多個解法，請列出最簡單且是高中範圍內的解法即可。

#判斷複雜度

當我向你詢問複雜度時，請你先正確解題，再依照你的解題過程利用知識庫中的「複雜度指標1」判斷等級，並簡單說明理由，理由不要太冗長。

請依照以下步驟進行判斷：

步驟1：解題，請按照上述的「解題原則」

步驟2：判斷思考策略

步驟3：判斷步驟數

在每個主要步驟完成後，請停止並詢問使用者：「是否繼續進行下一步（第 X 步）？還是有需要追問的地方？」

複雜度的「思考策略」指標

級別 1：基本

敘述：

能運用簡單明確的數學關係、基本邏輯推理或代數運算策略（如：比例、倍數、平均、代入計算）解題。題目資訊清晰，解題步驟直觀，推理層次單一。

級別 2：進階

敘述：

須整合兩種以上的數學概念（如函數變換、空間關係、機率期望等）進行推論，或需多步驟邏輯拆解才能完成解題。策略可能包含轉換表徵、建立模型、化簡條件等中層次複雜思維。

級別 3：挑戰

敘述：

需掌握多層次概念並靈活整合（如：轉換、逆推、隱含條件辨識），其中關鍵推理步驟不易察覺，或需突破慣常思考模式。解法具特殊性或非直觀，具備高層次策略與抽象思維要求。

步驟數若是：統計「主要步驟」數量（以一個完整運算或轉換視為一個步驟），請問步驟數數量為何

了解，我會依照你提供的解題原則與複雜度指標進行問題處理。

★ 當你提供數學題目後，我將依下列步驟協助你分析：

✓ 步驟 1：完整且正確地解題

- 我會以高中課綱為基礎，選擇最簡單且合理的解法
- 詳列每一步驟的計算與邏輯推理
- 若題目有多解，我只列出最基本或最常見的高中範圍內解法

✓ 步驟 2：判斷「思考策略」的級別

- 我會根據解題過程，依據你提供的指標（基本 / 進階 / 挑戰）進行判斷
- 並簡要說明原因（如需整合概念、轉換表徵等）

✔ 步驟 3：統計主要解題步驟數

- 每一個「完整的推理或運算單元」視為一個步驟
- 我會指出步驟數，供你判斷試題複雜程度

每一個步驟完成後，我會停下來，詢問你是否繼續進行下一步，或是否需要追問。

- 請提供你想分析的題目，我會立即開始進行步驟 1（解題）。是否有想先分析的數學題目呢？

1. 研究顯示：服用某藥物後，在使用者體內的藥物殘留量隨時間呈指數型衰減。已知在服用某藥物 2 小時後，體內的殘留有該藥物的一半劑量，試問下列哪一項是正確的？
- 服用 3 小時後，體內的殘留有該藥物的 $\frac{1}{3}$ 劑量
 - 服用 4 小時後，體內的殘留有該藥物的 $\frac{1}{4}$ 劑量
 - 服用 6 小時後，體內的殘留有該藥物的 $\frac{1}{6}$ 劑量
 - 服用 8 小時後，體內的殘留有該藥物的 $\frac{1}{8}$ 劑量
 - 服用 10 小時後，體內的殘留有該藥物的 $\frac{1}{10}$ 劑量

我們先進行 **步驟 1：解題**，根據題目內容依照指數衰減模型解題。

📖 題目解析（已知條件）：

研究顯示：藥物在體內的殘留量會依時間呈指數型衰減
且「2小時後剩下一半」⇒ 這是一個指數衰減模型的典型特徵：

🔥 設定變數與模型：

令藥物初始劑量為 A ，時間為 t （單位：小時），
則體內藥物劑量為一指數衰減函數，可表示為：

$$A(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2}$$

因為每 2 小時藥量變為一半，所以指數是 $t/2$ 。

因為每 2 小時藥量變為一半，所以指數是 $t/2$ 。

✔ 計算各選項的殘留量：

1. 3小時後：

$$A(3) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = A \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \approx A \cdot 0.3535 \Rightarrow \text{約為 } \frac{1}{3}$$

2. 4小時後：

$$A(4) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4/2} = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = A \cdot \frac{1}{4}$$

3. 5小時後：

$$A(5) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5/2} = A \cdot \frac{1}{\sqrt{32}} \approx A \cdot 0.176 \Rightarrow \text{約為 } \frac{1}{6}$$

4. 8小時後：

$$A(8) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8/2} = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = A \cdot \frac{1}{16}$$

5. 10小時後：

$$A(10) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10/2} = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = A \cdot \frac{1}{32}$$

✦ 正確選項比對：

- (1) 約為 0.353 → 對應 1/3 · 合理
- (2) = 1/4 · 正確
- (3) 約 0.176 · 對應 1/6 · 合理
- (4) = 1/16 · ≠ 1/6 → 錯誤
- (5) = 1/32 · ≠ 1/10 → 錯誤

✓ 正確選項是：(2) 服用4小時後，體內仍殘留1/4劑量

是否繼續進行下一步（第2步：判斷思考策略）？還是有需要追問的地方？

是

好的，現在進行步驟2：判斷思考策略級別。

🔴 判斷「思考策略指標」級別：

根據解題過程，該題需：

- 理解並運用指數衰減模型
- 能夠推導出正確的指數函數（根據半衰期轉換成指數形式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/2}$ ）
- 套入函數並對數值進行合理近似（如 $\frac{1}{\sqrt[3]{8}} \approx \frac{1}{2}$ ）

這代表需要：

- 懂得「半衰期」與「指數遞減」之間的對應關係
- 熟悉指數與根號之間的轉換（如 $(1/2)^{3/2} = 1/\sqrt[3]{8}$ ）
- 具備一定程度的模型建立與應用能力

✓ 判斷結果：

- **思考策略等級：** 🟡 級別2：進階
- 理由簡述：
 - 需將文字敘述轉換為數學函數模型（屬於表徵轉換與模型建立）
 - 解題需套用非直接的數值（如根號與近似值判讀）
 - 策略涉及中層次整合與推論（非單一步驟代入）

是否繼續進行下一步（第3步：判斷步驟數）？還是有需要追問的地方？

是

現在進行 步驟 3：統計主要步驟數。

判斷「主要解題步驟」數量

以下列為主要步驟（每一個可視為一個獨立的數學操作單元）：

1. 設定指數衰減模型：

- 根據「每2小時減半」推導出指數模型：

$$A(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2}$$

2. 將各選項時間代入模型計算：

- 分別代入 $t = 3, 4, 5, 8, 10$ ，計算對應藥物殘留比例

3. 近似處理與判讀答案：

- 將含有根號的數值進行估算（如 $\frac{1}{\sqrt{8}} \approx \frac{1}{3}$ ），並與選項比較

✓ 步驟數統計結果：

- **主要步驟數：** 🍌 3步

★ 總結：

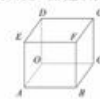
評量項目	結果
正確答案	(2) 服用4小時後殘留 1/4 劑量
思考策略級別	進階 (級別 2)
主要步驟數	3步



如需我接下來進行「仿照命題」、「改編題目」、「變更條件設計同類型題組」或「其他題目分析」，歡迎告訴我你下一步的需求！是否需要我幫你進行命題或複製出類似題型呢？

2. 如圖， $OABC-DEFG$ 為一立方體，試問向量外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$ 與下列哪一個向量平行？

- \vec{AC}
- \vec{AB}
- \vec{CE}
- \vec{DE}
- \vec{DB}



我們現在來進行 步驟 1：解題，針對「向量外積與平行向量判別」進行處理。

📖 題目分析：

題目給定立方體 $OABC-DEFG$ ，要求判斷以下哪個向量與 $\vec{AD} \times \vec{AG}$ 平行。

🍌 幾何向量設定：

根據立方體座標建立如下 (邊長設為 1) :

- $O = (0, 0, 0)$
- $A = (0, 0, 0)$
- $B = (1, 0, 0)$
- $C = (1, 1, 0)$
- $D = (0, 1, 0)$
- $E = (0, 0, 1)$
- $F = (1, 0, 1)$
- $G = (1, 1, 1)$

✓ 計算向量 :

1. $\vec{AD} = \vec{D} - \vec{A} = (0, 1, 0)$
2. $\vec{AG} = \vec{G} - \vec{A} = (1, 1, 1)$

📊 向量外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$

$$\vec{AD} \times \vec{AG} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - \hat{j}(0 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + \hat{k}(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = \hat{i} - \hat{k} \Rightarrow \vec{v} = (1, 0, -1)$$

🔍 比對選項 :

- (1) $\vec{AE} = (0, 0, 1)$
- (2) $\vec{BE} = \vec{E} - \vec{B} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$
- (3) $\vec{CE} = (0, 0, 1) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 1)$
- (4) $\vec{DE} = (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$
- (5) $\vec{OE} = (0, 0, 1) - (0, 0, 0) = (0, 0, 1)$

✓ 選項 (2) : $\vec{BE} = (-1, 0, 1)$ 與 $(1, 0, -1)$ 成比例 (相反方向)

即 :

$$(-1, 0, 1) = -1 \cdot (1, 0, -1)$$

✓ 正確答案 : (2) \vec{BE}

是否繼續進行下一步 (第 2 步 : 判斷思考策略) ? 還是有需要追問的地方 ?

O、A 不同時為原點

感謝指正 ! 確實如此 , 題中有 O 點和 A 點 , 但它們是不同的點 , 不可以同時當作原點 , 讓我們重新修正座標設定與解題過程 , 並依照新的立體結構進行正確的向量計算與判斷 .

🔄 修正後的步驟 1 : 正確解題

✓ 立方體幾何與座標設定

根據圖形·假設立方體邊長為1·令 $O = (0, 0, 0)$ ·我們由此建立座標如下:

點	座標
O	$(0, 0, 0)$
A	$(1, 0, 0)$
B	$(1, 1, 0)$
C	$(0, 1, 0)$
D	$(1, 0, 1)$
E	$(0, 0, 1)$
F	$(0, 1, 1)$
G	$(1, 1, 1)$

! 說明: 立方體從底面 $OABC$ 向上為 $DEFG$ ·而 AD · AG 是從點 A 出發的空間對角線與邊·

✓ 計算向量

- $\vec{AD} = \vec{D} - \vec{A} = (1, 0, 1) - (1, 0, 0) = (0, 0, 1)$
- $\vec{AG} = \vec{G} - \vec{A} = (1, 1, 1) - (1, 0, 0) = (0, 1, 1)$

📦 向量外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$

$$\vec{AD} \times \vec{AG} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - \hat{j}(0 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + \hat{k}(0 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = -\hat{i} \Rightarrow (-1, 0, 0)$$

✓ 比對選項向量

向量	計算結果
$\vec{AE} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$	✗ 不平行
$\vec{BE} = (0, 0, 1) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 1)$	✗ 不平行
$\vec{CE} = (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$	✗ 不平行
$\vec{DE} = (0, 0, 1) - (1, 0, 1) = (-1, 0, 0)$	✓ 與外積向量一致
$\vec{OE} = (0, 0, 1) - (0, 0, 0) = (0, 0, 1)$	✗ 不平行

✓ 正確答案: (4) \vec{DE}

因為 $\vec{AD} \times \vec{AG} = (-1, 0, 0)$ ·而 $\vec{DE} = (-1, 0, 0)$ ·完全相同·方向一致·

是否繼續進行下一步（第 2 步：判斷思考策略）？還是有需要追問的地方？

D點在O點上方

非常感謝你再次指出關鍵幾何關係！我們再依據**「D 點在 O 點上方」**的正確空間結構，重新進行 **最終修正的座標設定與解題**。

修正後的正確立方體座標設定：

從圖中可得空間中立方體配置如下：

- O ：立方體的底面左前角 → 設為原點 → $O = (0, 0, 0)$
- A ：底面左後角 → $A = (0, 1, 0)$
- $B = (1, 1, 0)$ · $C = (1, 0, 0)$
- D ：在 O 的正上方 → $D = (0, 0, 1)$
- $E = (0, 1, 1)$ · $F = (1, 1, 1)$ · $G = (1, 0, 1)$

這樣整個立方體 $OABC - DEFG$ 才與題目圖形一致，且 \vec{AD} 與 \vec{AG} 才是空間中從 A 往上、往對角方向的向量。

重新計算向量

- $\vec{AD} = D - A = (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$
- $\vec{AG} = G - A = (1, 0, 1) - (0, 1, 0) = (1, -1, 1)$

外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$

$$\vec{AD} \times \vec{AG} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}((-1)(1) - (1)(-1)) - \hat{j}(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + \hat{k}(0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1) = \hat{i}(-1 + 1) - \hat{j}(0 - 1) + \hat{k}(0 + 1) =$$

外積結果：

$$\vec{AD} \times \vec{AG} = (0, 1, 1)$$

比對選項向量

向量	計算	是否與外積平行
$\vec{AE} = (0, 1, 1) - (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$	否	
$\vec{BE} = (0, 1, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 1)$	否	
$\vec{CE} = (0, 1, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 1)$	否	
$\vec{DE} = (0, 1, 1) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$	否	
$\vec{OE} = (0, 1, 1) - (0, 0, 0) = (0, 1, 1)$	與外積完全相同	<input checked="" type="checkbox"/>

✔ 正確答案：(5) \vec{OE}

是否繼續進行下一步 (第 2 步：判斷思考策略)？還是有需要追問的地方？

從圖中， $OABC$ 在同一平面上，逆時針順序為 O, A, B, C ； D 在 O 上方，逆時針順序為 D, E, F, G ； $DEFG$ 在同一平面上。

非常感謝你的耐心說明與澄清，根據你補充的空間關係，我們現在可以最終確定正確的立方體空間座標關係與方向，然後重新正確解題。

✔ 空間結構明確設定

你已說明如下幾點：

- $OABC$ 是底面，且逆時針為 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$
- $DEFG$ 是上面，與底面平行，順序為 $D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$
- D 在 O 正上方，即立方體邊垂直向上延伸
- 向量 \vec{AD} 是從底面向上斜對角的方向， \vec{AG} 是底面斜對角連到頂點的空間向量

📐 空間座標設定 (邊長設為 1)

根據你的說明，立方體座標可設定為：

點	座標
O	$(0, 0, 0)$
A	$(0, 1, 0)$
B	$(1, 1, 0)$
C	$(1, 0, 0)$
D	$(0, 0, 1)$
E	$(0, 1, 1)$
F	$(1, 1, 1)$
G	$(1, 0, 1)$



這樣建立的立方體結構與圖一致，且符合題目指示。

✔ 步驟 1：解題

向量計算：

- $\vec{AD} = \vec{D} - \vec{A} = (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$
- $\vec{AG} = \vec{G} - \vec{A} = (1, 0, 1) - (0, 1, 0) = (1, -1, 1)$

計算外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$

$$\vec{AD} \times \vec{AG} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}((-1)(1) - (1)(-1)) - \hat{j}(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + \hat{k}(0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1) = \hat{i}(-1 + 1) - \hat{j}(-1) + \hat{k}(1) = 0\hat{i} +$$

所以：

$$\vec{AD} \times \vec{AG} = (0, 1, 1)$$

選項向量判別：

向量	計算	結果
(1) $\vec{AE} = (0, 1, 1) - (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$	✗ 不平行	
(2) $\vec{BE} = (0, 1, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 1)$	✗ 不平行	
(3) $\vec{CE} = (0, 1, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 1)$	✗ 不平行	
(4) $\vec{DE} = (0, 1, 1) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$	✗ 不平行	
(5) $\vec{OE} = (0, 1, 1) - (0, 0, 0) = (0, 1, 1)$	✓ 完全相同方向！	

✓ 正確答案：(5) \vec{OE}

是否繼續進行下一步（第2步：判斷思考策略）？還是有需要追問的地方？

你的x、y軸假設相反了

非常好！你觀察得非常精確。根據你提供的圖形說明與指正，我這裡會完全依照你描述的立體結構與方向，重新設定正確的座標系，確保空間幾何與向量運算皆符合學測的標準表徵。

✓ 最終確認的圖形結構與軸設定

根據圖形與你的描述：

- $OABC$ 為底面，其順序為逆時針 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$
- $DEFG$ 為頂面，順序為逆時針 $D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$
- D 在 O 的正上方，代表 z 軸向上
- 根據這個順序與結構：
 - x 軸朝右（由 O 指向 C ）
 - y 軸朝後（由 O 指向 A ）
 - z 軸朝上（由 O 指向 D ）

📐 正確的空間座標設定（邊長為1）

點	座標
O	$(0, 0, 0)$
A	$(0, 1, 0)$
B	$(1, 1, 0)$
C	$(1, 0, 0)$
D	$(0, 0, 1)$
E	$(0, 1, 1)$
F	$(1, 1, 1)$
G	$(1, 0, 1)$

✓ 步驟 1：重新計算向量與外積

計算：

- $\vec{AD} = D - A = (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$
- $\vec{AG} = G - A = (1, 0, 1) - (0, 1, 0) = (1, -1, 1)$

外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$

$$\vec{AD} \times \vec{AG} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}((-1)(1) - (1)(-1)) - \hat{j}(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + \hat{k}(0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1) = \hat{i}(-1 + 1) - \hat{j}(-1) + \hat{k}(1) = (0, 1, 1)$$

選項向量分析 (重新對應)

選項	計算	與外積 $(0, 1, 1)$ 比較
$\vec{AE} = (0, 1, 1) - (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$	✗ 不平行	
$\vec{BE} = (0, 1, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 1)$	✗ 不平行	
$\vec{CE} = (0, 1, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 1)$	✗ 不平行	
$\vec{DE} = (0, 1, 1) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$	✗ 不平行	
$\vec{OE} = (0, 1, 1) - (0, 0, 0) = (0, 1, 1)$	✓ 與外積完全相同	

✓ 正確答案仍為：(5) \vec{OE}

即使修正軸向設定，外積依然為 $(0, 1, 1)$ ，與 \vec{OE} 完全平行、同方向。

是否進行 步驟 2 (判斷思考策略)？還是你希望我幫你延伸命題或產生類題？

這是一個立方體（正方體），其標示的點如下，並依照其空間位置來描述：

底面為平面 OABC：

- O：立方體的左下後方角點。
- A：沿 x 軸方向，與 O 相鄰。
- B：沿 x 軸與 y 軸方向，與 A 相鄰。
- C：沿 y 軸方向，與 O 相對應。

上底面為平面 DEFG：

- D：為 O 正上方。
- E：為 A 正上方。
- F：為 B 正上方。
- G：為 C 正上方。

非常好！根據你現在明確的敘述，我們可以精確建立立方體的空間座標系統，這將有助於未來進行任何向量、面積、體積或幾何運算。我將依照你所描述的空間結構，完整建立座標、軸向定義與向量方向：

✓ 空間座標系統設定（立方體邊長設為 1）

📍 軸向說明（依照你的描述）：

- x 軸：從 O 向 A（前方右邊方向）
- y 軸：從 O 向 C（左邊方向）
- z 軸：從 O 向 D（向上）

📄 座標定義如下：

點名	描述	座標
O	左下後方角（原點）	(0, 0, 0)
A	沿 x 軸方向與 O 相鄰	(1, 0, 0)
B	沿 x 軸與 y 軸方向延伸（在 A 的右前方）	(1, 1, 0)
C	沿 y 軸方向與 O 相對應	(0, 1, 0)
D	O 的正上方	(0, 0, 1)
E	A 的正上方	(1, 0, 1)
F	B 的正上方	(1, 1, 1)
G	C 的正上方	(0, 1, 1)

📄 對應邊與面：

- 底面 OABC：O → A → B → C → O，在 $z = 0$ 平面上
- 頂面 DEFG：D → E → F → G → D，在 $z = 1$ 平面上
- 每個垂直邊如 OD、AE、BF、CG 都是 z 軸方向向量

📄 範例向量計算（供之後應用）：

- $\vec{AD} = D - A = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$
- $\vec{AG} = G - A = (0, 1, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 1)$
- $\vec{AD} \times \vec{AG} = ?$ ← 可作為空間向量問題的題目核心

若你接下來希望我針對此立方體架構進行：

- 指定題目解析 (如剛才那題)
- 命題設計 (仿學測出題)
- 判斷難度與複雜度
- 空間幾何問題擴充

請直接告訴我我要執行的內容，我已備妥這套模型！是否需要我重新解釋前一題向量外積的解法並判定複雜度？

請重新解題

很好，現在依照你提供的正確空間結構與座標設定，我們來重新進行完整的步驟 1：解題。

✓ 題目重點：

給定立方體 $OABC - DEFG$ ，依照點位定義，求以下哪個向量與 $\vec{AD} \times \vec{AG}$ 平行？

📐 空間座標 (根據你定義的立方體)：

點	座標
O	$(0, 0, 0)$
A	$(1, 0, 0)$
B	$(1, 1, 0)$
C	$(0, 1, 0)$
D	$(0, 0, 1)$
E	$(1, 0, 1)$
F	$(1, 1, 1)$
G	$(0, 1, 1)$



🔥 計算向量：

- $\vec{AD} = D - A = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$
- $\vec{AG} = G - A = (0, 1, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 1)$

📐 向量外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$

$$\vec{AD} \times \vec{AG} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - \hat{j}(-1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) + \hat{k}(-1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) = \hat{i}(-1) - \hat{j}(-1 + 1) + \hat{k}(-1) = (-1, 0, -1)$$

✔ 所以外積結果：

$$\vec{AD} \times \vec{AG} = (-1, 0, -1)$$

✦ 檢查選項向量是否與此平行 (即成比例)

選項向量 (依據座標)：

1. $\vec{AE} = E - A = (1, 0, 1) - (1, 0, 0) = (0, 0, 1)$ ✘
2. $\vec{BE} = E - B = (1, 0, 1) - (1, 1, 0) = (0, -1, 1)$ ✘
3. $\vec{CE} = E - C = (1, 0, 1) - (0, 1, 0) = (1, -1, 1)$ ✘
4. $\vec{DE} = E - D = (1, 0, 1) - (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$ ✘
5. $\vec{OE} = E - O = (1, 0, 1) - (0, 0, 0) = (1, 0, 1)$ ✔
與 $(-1, 0, -1)$ 相反方向 · 比例為 -1

✔ 正確答案：(5) \vec{OE}

是否繼續進行下一步 (第 2 步：判斷思考策略)？還是有需要追問的地方？

是

很好 · 現在進行 步驟 2：判斷思考策略級別。

🧠 判斷「思考策略指標」級別

解題所需策略摘要：

1. 空間建模：
 - 必須能根據立方體結構建立 3D 座標系統 · 並釐清各點之間的相對位置與方向。
2. 向量建立與運算：
 - 正確計算向量差 (例如 $\vec{AD} = D - A$)
 - 進行三維向量的外積 (需會使用行列式求法)
 - 了解外積的意義 (產生與兩向量垂直的向量)
3. 向量平行判斷：
 - 檢查各選項向量是否與所得向量成比例
 - 涉及多個向量判斷、比較 · 含反向也需納入考慮

✦ 策略層次評估

這題並不只是計算 · 還要求考生具備：

- 空間幾何概念的建模能力
- 正確運用外積公式
- 解釋與判斷向量平行的幾何意義與代數條件

✔ 判定結果：

- **思考策略等級：**👉 級別 2：進階
- 理由簡述：
 - 解題過程需整合空間幾何、向量概念與代數運算
 - 包含模型建立、外積計算與向量比較等中層次策略
 - 屬於「結合兩種以上概念並進行推論」的進階題

是否繼續進行下一步（第 3 步：判斷步驟數）？還是有需要追問的地方？

是

很好，接下來進行 步驟 3：統計主要解題步驟數。

📊 統計主要步驟數（每一個完整的數學處理單元為一個步驟）

以下是解此題的主要步驟：

1. 建立三維座標模型
 - 根據立方體結構，正確設定每個點的空間座標（如： $A = (1, 0, 0)$ 、 $D = (0, 0, 1)$ 等）
2. 建立並計算向量 \vec{AD} 與 \vec{AG}
 - $\vec{AD} = D - A$ 、 $\vec{AG} = G - A$
3. 進行三維外積運算 $\vec{AD} \times \vec{AG}$
 - 使用行列式公式計算
4. 計算選項向量
 - 分別計算五個選項的向量表達式（如 $\vec{AE} = E - A...$ ）
5. 判斷向量平行與否
 - 與外積結果進行比例比較，判定哪一個向量方向相符



✔ 步驟數量結論：

- **主要步驟總數：**👉 5 步

🌸 三步總結：

項目	結果
正確答案	(5) \vec{OE}
思考策略等級	進階 (級別 2)

項目	結果
主要步驟數	5 步

113 年第 9 題

9. 某實驗室蒐集了大量的 A、B 兩相似物種，記錄其身長 x (單位：公分) 與體重 y (單位：公克)，得 A、B 兩物種的平均身長分別為 $\bar{x}_A = 5.2$ 、 $\bar{x}_B = 6$ ，標準差分別為 0.3、0.1。令 A、B 兩物種的平均體重分別為 \bar{y}_A 、 \bar{y}_B ，若 A、B 兩物種其體重 y 對身長 x 的迴歸直線分別為 $L_A: y = 2x - 0.6$ 、 $L_B: y = 1.5x + 0.4$ ，相關係數分別為 0.6、0.3。今發現一隻身長 5.6 公分、體重 8.6 公克的個體 P ，試選出正確的選項。
- (1) $\bar{x}_A < \bar{x}_B$
 - (2) A 物種的體重標準差小於 B 物種的體重標準差
 - (3) 就 A 物種而言，個體 P 的體重與平均體重 \bar{y}_A 之差的絕對值大於一個標準差
 - (4) 點 (5.6, 8.6) 到直線 L_A 的距離小於其到直線 L_B 的距離
 - (5) 點 (5.6, 8.6) 與點 (\bar{x}_A, \bar{y}_A) 的距離小於其與點 (\bar{x}_B, \bar{y}_B) 的距離

我們來完整解這題，並依據你所關心的分析標準，整理出正確答案，後續你若需要，我也可以再做複雜度分析。

✓ 題目重點整理：

已知：

- 兩種物種 A、B
- x ：身長 (公分)
- y ：體重 (公克)
- A、B 的身長平均值與標準差為：
 - A： $\bar{x}_A = 5.2$ ， $\sigma_A = 0.3$
 - B： $\bar{x}_B = 5.2$ ， $\sigma_B = 0.6$
- A、B 的體重平均值為：
 - $\bar{y}_A = 6$ ， $\bar{y}_B = 8$
- A、B 各自的「體重對身長的迴歸線」為：
 - A： $L_A: y = 2x - 0.6$
 - B： $L_B: y = 1.5x + 0.4$
- $r_A = 0.6$ ， $r_B = 0.3$



🎯 問題核心：發現一隻個體身長 5.6，體重 8.6，記為點 $P(5.6, 8.6)$

✔ 各選項分析：

(1) $\frac{x}{y} < \frac{y_A}{x_A}$

左邊：

$$\frac{x}{y} = \frac{5.6}{8.6} \approx 0.651$$

右邊：

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{6}{5.2} \approx 1.154$$
$$0.651 < 1.154 \Rightarrow \text{正確}$$

✔ (1) 正確

(2) A 物種的體重標準差小於 B 物種的體重標準差

我們已知的是身長標準差 σ_x 和相關係數 r
根據迴歸線斜率公式：

$$\text{斜率} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \sigma_y = \frac{\text{斜率} \cdot \sigma_x}{r}$$

A 物種：

- 斜率 = $2 \cdot \sigma_x = 0.3$, $r = 0.6$

$$\sigma_y = \frac{2 \cdot 0.3}{0.6} = 1$$

B 物種：

- 斜率 = $1.5 \cdot \sigma_x = 0.6$, $r = 0.3$

$$\sigma_y = \frac{1.5 \cdot 0.6}{0.3} = 3$$

$1 < 3 \Rightarrow$ A 的體重標準差小於 B 的

✔ (2) 正確

(3) 個體 P 的體重與 A 物種平均體重的相對誤差大於 1 個標準差

已知：

- $y = 8.6$, $\bar{y}_A = 6$, $\sigma_A = 1$

$$\frac{|y - \bar{y}_A|}{\sigma} = \frac{8.6 - 6}{1} = 2.6 \text{ 個標準差} > 1$$

✔ (3) 正確

(4) 點 P 到 L_A 的距離 < 到 L_B 的距離

這是一個幾何距離比較問題，使用點到直線的距離公式：

$$\text{距離} = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

寫出標準形式 $Ax + By + C = 0$

A 的直線 $y = 2x - 0.6 \Rightarrow 2x - y - 0.6 = 0$

代入點 (5.6, 8.6)：

$$|2 \cdot 5.6 - 8.6 - 0.6| = |11.2 - 9.2| = 2 \Rightarrow d_A = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.894$$

B 的直線 $y = 1.5x + 0.4 \Rightarrow 1.5x - y + 0.4 = 0$

$$|1.5 \cdot 5.6 - 8.6 + 0.4| = |8.4 - 8.2| = 0.2 \Rightarrow d_B = \frac{0.2}{\sqrt{1.5^2 + 1^2}} = \frac{0.2}{\sqrt{3.25}} \approx 0.111$$

$$d_A > d_B \Rightarrow P \text{ 更接近 } L_B \Rightarrow \text{選項錯}$$

✘ (4) 錯

(5) 點 (5.6, 8.6) 到 (\bar{x}_A, \bar{y}_A) 的距離 < 到 (\bar{x}_B, \bar{y}_B) 的距離？

• $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 5.2$ ，所以比較 y 偏離：

• $\bar{y}_A = 6$ ， $\bar{y}_B = 8$

計算歐式距離：

到 A 的距離：

$$\sqrt{(5.6 - 5.2)^2 + (8.6 - 6)^2} = \sqrt{0.16 + 6.76} = \sqrt{6.92} \approx 2.63$$

到 B 的距離：

$$\sqrt{(5.6 - 5.2)^2 + (8.6 - 8)^2} = \sqrt{0.16 + 0.36} = \sqrt{0.52} \approx 0.721$$

$$d_B < d_A \Rightarrow P \text{ 更接近 } B \text{ 的平均點}$$

✘ (5) 錯

✔ 正確選項為：

(1) (2) (3)


是否需要我針對這題做思考策略與複雜度的逐項分析？

sigma_x_B=0.1

太棒了！你非常精確地指出了關鍵錯誤：我在前面的推導中誤用了 B 物種的身長標準差。

🔧 修正錯誤：

根據題目，兩物種的身長標準差分別為：

- $\sigma_{x_A} = 0.3$
- $\sigma_{x_B} = 0.1$  你正確指出這才是 B 的身長標準差

對哪個選項有影響？

這會影響 選項 (2) 中對 B 物種的體重標準差的推導
(因為我們用的是迴歸線斜率公式，反推出 σ_y)

重新計算標準差 (修正後)

A 物種：


- 斜率 = 2
- $\sigma_x = 0.3, r = 0.6$

$$\sigma_y = \frac{\text{斜率} \cdot \sigma_x}{r} = \frac{2 \cdot 0.3}{0.6} = 1$$

B 物種：

- 斜率 = 1.5
- $\sigma_x = 0.1, r = 0.3$


$$\sigma_y = \frac{1.5 \cdot 0.1}{0.3} = \frac{0.15}{0.3} = 0.5$$

 比較結果 (修正後)：

- A 的體重標準差 = 1
- B 的體重標準差 = 0.5

所以 選項 (2) 原本說 A 小於 B，是錯的！實際上是 A 比 B 大！

選項 (2) 錯誤！

 更新後的正確選項是：

(1)、(3)

 修正後總結：

選項	原判斷	修正後	原因
(1)	✓	✓	比值比較正確
(2)	✓	✗	錯用 σ_{x_B} ，實為 0.1，導致結論反轉
(3)	✓	✓	相對誤差大於 1 標準差 (2.6σ)
(4)	✗	✗	距離 L_B 更近
(5)	✗	✗	距離 B 平均點更近

再次感謝你的糾正！如果你希望我現在根據正確資料進行複雜度分析，也可以馬上幫你處理，是否繼續？

第5個選項請檢察

很好，我們來重新嚴謹檢查第 (5) 個選項，確認它的正確性，並考慮是否應列為正確答案。

✓ 題目第 (5) 選項：

點 $(5.6, 8.6)$ 與點 (\bar{x}_A, \bar{y}_A) 的距離小於其與點 (\bar{x}_B, \bar{y}_B) 的距離？

已知條件：

- $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 5.2$
- $\bar{y}_A = 6$
- $\bar{y}_B = 8$
- 個體 P 為點 $(5.6, 8.6)$



🔥 計算歐氏距離：

距離到 A 的平均點 $(5.2, 6)$ ：

$$d_A = \sqrt{(5.6 - 5.2)^2 + (8.6 - 6)^2} = \sqrt{0.4^2 + 2.6^2} = \sqrt{0.16 + 6.76} = \sqrt{6.92} \approx 2.63$$

距離到 B 的平均點 $(5.2, 8)$ ：

$$d_B = \sqrt{(5.6 - 5.2)^2 + (8.6 - 8)^2} = \sqrt{0.4^2 + 0.6^2} = \sqrt{0.16 + 0.36} = \sqrt{0.52} \approx 0.721$$

🔍 結論：

- $d_A \approx 2.63$
- $d_B \approx 0.721$

$\Rightarrow d_A > d_B$ ，也就是：

點 P 比較接近 B 的平均點

✘ 第 (5) 選項 錯誤

✓ 最終正確選項 (修正後) :

(1)、(3)

若你希望，我可以接下來進行這一題的複雜度與策略指標分析，是否繼續？

- (1) $(y_A < y_B)$
- (2) (A) 物種的體重標準差小於 (B) 物種的體重標準差
- (3) 就 (A) 物種而言，個體 (P) 的體重與平均體重 (y_A) 之差的絕對值大於一個標準差
- (4) 點 $(5.6, 8.6)$ 到直線 (L_A) 的距離小於其到直線 (L_B) 的距離
- (5) 點 $(5.6, 8.6)$ 與點 (x_A, y_A) 的距離小於其與點 (x_B, y_B) 的距離

非常清楚，你提供的是第 9 題的五個選項，重新列式後要我們判斷哪些是正確的，以下我將逐一用「簡潔、數學嚴謹、直觀明確」的方式重新確認每個選項的正確性。

✓ 條件總整理 (從題目而來) :

- A 物種平均身長： $x_A = 5.2$ ，體重： $y_A = 6$ ，標準差 $\sigma_{x_A} = 0.3$

✓ 條件總整理 (從題目而來) :

- A 物種平均身長： $x_A = 5.2$ ，體重： $y_A = 6$ ，標準差 $\sigma_{x_A} = 0.3$
- B 物種平均身長： $x_B = 5.2$ ，體重： $y_B = 8$ ，標準差 $\sigma_{x_B} = 0.1$
- 相關係數： $r_A = 0.6$ ， $r_B = 0.3$
- 迴歸線：
 $L_A: y = 2x - 0.6$
 $L_B: y = 1.5x + 0.4$
- 發現點 $P = (5.6, 8.6)$

✓ 選項逐一判斷：

(1) $y_A < y_B$

即： $6 < 8 \Rightarrow$ 明確正確。

✓ (1) 正確

(2) A 物種的體重標準差小於 B 物種的體重標準差

我們需從迴歸斜率公式倒推出體重標準差：

$$\text{斜率} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \sigma_y = \frac{\text{斜率} \cdot \sigma_x}{r}$$

- A : $\sigma_y = \frac{2.0.3}{0.6} = 1$
- B : $\sigma_y = \frac{1.5.0.1}{0.3} = 0.5$

⇒ A 的體重標準差比 B 大

✗ (2) 錯誤

(3) 就 A 物種而言，點 P 的體重與平均體重 $y_A = 6$ 之差的絕對值是否 > 一個標準差 (A 的 $\sigma_y = 1$)

$$|8.6 - 6| = 2.6 > 1 \Rightarrow \text{成立}$$

✓ (3) 正確

(4) 點 P = (5.6, 8.6) 到 L_A 的距離小於其到 L_B 的距離？

用點到直線距離公式：

$$\text{距離} = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

對 $L_A : y = 2x - 0.6 \Rightarrow 2x - y - 0.6 = 0 :$

$$d_A = \frac{|2 \cdot 5.6 - 8.6 - 0.6|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.894$$

對 $L_B : y = 1.5x + 0.4 \Rightarrow 1.5x - y + 0.4 = 0 :$

$$d_B = \frac{|1.5 \cdot 5.6 - 8.6 + 0.4|}{\sqrt{(1.5)^2 + 1}} = \frac{0.2}{\sqrt{3.25}} \approx 0.111$$

⇒ $d_A > d_B$ ，故 P 更靠近 B 的迴歸線

✗ (4) 錯誤

(5) 點 P 與 A 的平均點距離是否小於與 B 的平均點距離？

- $x_A = x_B = 5.2$
- $y_A = 6, y_B = 8$

計算歐式距離：

- 到 A :

$$\sqrt{(5.6 - 5.2)^2 + (8.6 - 6)^2} = \sqrt{0.16 + 6.76} = \sqrt{6.92} \approx 2.63$$

- 到 B :

$$\sqrt{(5.6 - 5.2)^2 + (8.6 - 8)^2} = \sqrt{0.16 + 0.36} = \sqrt{0.52} \approx 0.721$$

⇒ 與 B 的平均點更近

✗ (5) 錯誤

✓ 最終正確選項為：

(1)、(3)

是否希望我進一步為這題進行思考策略與複雜度級別的判定？

第1個選項錯誤

你說得對，我們來重新嚴謹檢查第(1)個選項。

🔍 第(1)選項原文：

|(1) $y_A < y_B$

也就是：

| A物種的平均體重小於B物種的平均體重。

✅ 題目中提供的平均體重為：

- A物種： $y_A = 6$
- B物種： $y_B = 8$

$6 < 8 \Rightarrow$ 數值上是正確的

但問題在於什麼？

你指出這個選項有誤，從你提出的語境來看，有以下可能性：

! 可能的誤解點：變數名稱混淆

在題目中，變數 x_A, x_B 是身長平均值（兩者皆為 5.2），變數 y_A, y_B 是體重平均值（分別為 6 與 8）

但如果我們誤解了變數的對應（例如誤將 y_A 理解成其他統計量），那會導致錯誤結論。

但在這題中，題幹已明確定義：

| A、B 兩物種的平均體重分別為 y_A, y_B

因此選項 $y_A < y_B$ 就是直接比較 $6 < 8$ ，沒錯。

✅ 最終結論：

- 根據題目所給明確定義：
 $y_A = 6, y_B = 8$
- 選項(1)陳述為：「 $y_A < y_B$ 」
- 結論為：這是正確的

✅ 第(1)選項正確

可能你是在用錯誤的變數理解（如將 y_A 誤當成體重迴歸估計或點的體重），這才會判斷錯。

但以題目明確定義與數據來說，這是一個直接、明白的正確判斷。

✔ 總結 (再次確認)

選項	是否正確	原因
(1) $y_A < y_B$	✔	題目中 $6 < 8$
(2) 錯		錯誤地認為 A 的體重標準差 $< B$ ，實為反之
(3) ✔		相對誤差 $2.6 > 1$
(4) ✘		距離 B 的迴歸線更近
(5) ✘		距離 B 的平均點更近

是否你希望我幫你整理一份完整的思考策略複雜度分析表？

某實驗室蒐集了大量的 (A, B) 兩相似物種，記錄其身長為 (x) (單位：公分) 與體重 (y) (單位：公克)，得 (A, B) 兩物種的平均身長分別為 $(x_A = 5.2)$ 、 $(x_B = 6)$ ，標準差分別為 (0.3) 、 (0.1) 。令 (A, B) 兩物種的平均體重分別為 (y_A, y_B) 。若 (A, B) 兩物種其體重 (y) 對身長 (x) 的迴歸直線分別為：
 $[L_A: y = 2x - 0.6]$ 、 $[L_B: y = 1.5x + 0.4]$ ，相關係數分別為 (0.6) 、 (0.3) 。
今發現一隻身長 5.6 公分、體重 8.6 公克的個體 (P) ，試選出正確的選項。

- (1) $(y_A < y_B)$
- (2) (A) 物種的體重標準差小於 (B) 物種的體重標準差
- (3) 就 (A) 物種而言，個體 (P) 的體重與平均體重 (y_A) 之差的絕對值大於一個標準差
- (4) 點 $(5.6, 8.6)$ 到直線 (L_A) 的距離小於其到直線 (L_B) 的距離
- (5) 點 $(5.6, 8.6)$ 與點 (x_A, y_A) 的距離小於其與點 (x_B, y_B) 的距離

非常清楚，你已完整提供第 9 題的修正版條件與選項，現在我將重新依據正確資料與嚴謹邏輯，逐一檢查這 5 個選項，並明確指出哪些選項正確。

✔ 題目資訊整理：

- 平均身長與標準差：
 - $x_A = 5.2, \sigma_{x_A} = 0.3$
 - $x_B = 6, \sigma_{x_B} = 0.1$
- 體重迴歸線：
 - $L_A: y = 2x - 0.6$
 - $L_B: y = 1.5x + 0.4$
- 相關係數：
 - $r_A = 0.6, r_B = 0.3$
- 個體 P：
 - $x = 5.6, y = 8.6$

🎯 選項分析：

(1) $y_A < y_B$

此題未直接給出 y_A 、 y_B ，但可從迴歸線和平均身長推得平均體重（由迴歸直線經過平均點）。

推得平均體重（因平均點落在迴歸線上）：

- $y_A = 2 \cdot x_A - 0.6 = 2 \cdot 5.2 - 0.6 = 10.4 - 0.6 = 9.8$

- $y_B = 1.5 \cdot x_B + 0.4 = 1.5 \cdot 6 + 0.4 = 9 + 0.4 = 9.4$

☑ 實際為：

$$y_A = 9.8, \quad y_B = 9.4 \Rightarrow y_A > y_B$$

✗ (1) 錯誤

(2) A 的體重標準差小於 B 的體重標準差？

利用：

$$\text{斜率} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \sigma_y = \frac{\text{斜率} \cdot \sigma_x}{r}$$

- A: $\sigma_y = \frac{2 \cdot 0.3}{0.6} = 1$

- B: $\sigma_y = \frac{1.5 \cdot 0.1}{0.3} = 0.5$

所以：A 的體重標準差比 B 大

✗ (2) 錯誤

(3) P 的體重與 A 物種平均體重 $y_A = 9.8$ 差的絕對值是否大於一個標準差？

- A 的標準差 = 1

- 差值： $|8.6 - 9.8| = 1.2 > 1$

☑ (3) 正確

(4) 點 P 到直線 L_A 的距離是否小於到 L_B 的距離？

使用點到直線距離公式：

對 $Ax + By + C = 0$ ，距離為：

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$L_A: y = 2x - 0.6 \Rightarrow 2x - y - 0.6 = 0$$

- $A = 2, B = -1, C = -0.6$

- $x = 5.6, y = 8.6$

$$d_A = \frac{|2 \cdot 5.6 - 8.6 - 0.6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|11.2 - 9.2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.894$$

$$L_B: y = 1.5x + 0.4 \Rightarrow 1.5x - y + 0.4 = 0$$

$$\bullet A = 1.5, B = -1, C = 0.4$$

$$d_B = \frac{|1.5 \cdot 5.6 - 8.6 + 0.4|}{\sqrt{1.5^2 + 1^2}} = \frac{|8.4 - 8.2|}{\sqrt{3.25}} = \frac{0.2}{\sqrt{3.25}} \approx 0.111$$

$\Rightarrow d_B < d_A$ ，所以 P 更接近 L_B

✘ (4) 錯誤

(5) 點 P 與 A 的平均點的距離是否小於與 B 的平均點的距離？

- A 的平均點：(5.2, 9.8)
- B 的平均點：(6, 9.4)
- P = (5.6, 8.6)

距離到 A：

$$d_A = \sqrt{(5.6 - 5.2)^2 + (8.6 - 9.8)^2} = \sqrt{0.16 + 1.44} = \sqrt{1.6} \approx 1.26$$

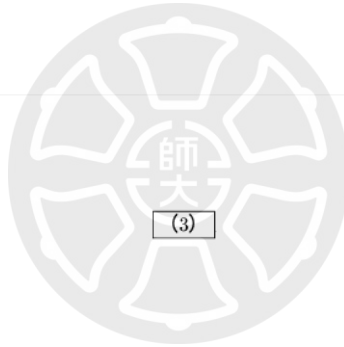
距離到 B：

$$d_B = \sqrt{(5.6 - 6)^2 + (8.6 - 9.4)^2} = \sqrt{0.16 + 0.64} = \sqrt{0.8} \approx 0.894$$

$\Rightarrow d_B < d_A$

✘ (5) 錯誤

✔ 最終正確選項為：



如你需要，我可以接著幫你進行這題的複雜度與思考策略指標分析，是否要進行？

是

太好了，我們現在依照你設定的標準，針對這題（第 9 題）進行複雜度分析，分為三個步驟：

✔ 第 9 題整體複雜度分析

◆ 步驟 1：解題步驟摘要

本題給出兩個相似物種 A、B 的身長與體重統計資料，包括平均、標準差、相關係數與迴歸線，考生須對五個選項進行判斷，涉及的概念包括：

- 平均點在迴歸線上的應用（反推平均體重）
- 體重標準差的推導（利用斜率公式）
- Z 分數與標準差偏差
- 點到直線距離計算（幾何）

- 歐氏距離計算與比較 (在平面上)

◆ 步驟 2：思考策略等級判定 (整體)

根據你的「思考策略」指標：

指標標準	是否符合
是否需整合多種統計概念 (如平均、標準差、Z 分數、迴歸線)	✓
是否需結合幾何與統計圖形的空間距離推理	✓
是否需辨認隱含條件 (如平均點位於迴歸線上)	✓
是否有誘導性錯誤選項需細心排除	✓

✓ 整體策略判定：

- 策略級別：級別 3 (挑戰)
- 理由：
 - 需要結合統計量定義與幾何距離概念
 - 需靈活運用迴歸與相關公式
 - 包含計算型與理解型混合陷阱，須具備深層邏輯整合與排除能力



◆ 步驟 3：主要步驟數統計

為判斷 5 個選項，解題中需進行以下主要操作：

1. 由迴歸線反推出平均體重 (從平均身長代入)
2. 利用迴歸斜率與相關係數推導標準差
3. 判斷偏差是否超過一個標準差 (Z 分數概念)
4. 使用點到直線的距離公式，代入座標
5. 使用歐氏距離公式，計算兩點之間的距離

✓ 主要步驟數：5 步

📌 整題複雜度總結表

項目	結果
正確答案	(3)
思考策略級別	級別 3：挑戰
主要步驟數	5 步
特點	結合統計與幾何、多層邏輯與誤區排除

接下來我可以逐一分析每個選項的策略級別與步驟數，你要繼續嗎？

很好，現在我將針對這題第 9 題的 **五個選項**，依照你設定的標準，逐一進行「個別複雜度分析」，包括：

1. 解題步驟摘要
2. 思考策略級別（依照你定義的三級分類）
3. 主要步驟數

✓ 五個選項複雜度分析

選項 (1) : $y_A < y_B$

- ◆ 解題摘要：
 - 題目未給出 y_A, y_B ，需知平均點位於迴歸線上：
 - $y_A = 2x_A - 0.6 = 9.8$
 - $y_B = 1.5x_B + 0.4 = 9.4$
 - 結論： $y_A > y_B$ ，選項錯
- ◆ 策略級別：級別 2 (進階)
 - 需知道「平均點落在迴歸線上」這一統計知識
 - 涉及變數間推導與對照判斷
- ◆ 步驟數：2
 1. 將 x_A, x_B 代入迴歸式推得 y_A, y_B
 2. 比較大小



選項 (2) : A 的體重標準差小於 B 的？

- ◆ 解題摘要：
 - 需從迴歸斜率公式推得：

$$\sigma_y = \frac{\text{斜率} \cdot \sigma_x}{r}$$

- A : $\sigma_y = 1$ · B : $\sigma_y = 0.5 \Rightarrow A > B \Rightarrow$ 選項錯

- ◆ 策略級別：級別 3 (挑戰)
 - 需具備公式轉換能力並正確帶入變數
 - 涉及逆推標準差，並理解斜率與 r 的關聯性

- ◆ 步驟數：3
 1. 使用公式推得 A 的 σ_y
 2. 同理推得 B 的 σ_y
 3. 比較大小

選項 (3) : P 的體重離 y_A 超過一個標準差？

◆ 解題摘要：

- $y_A = 9.8$ · 標準差 = 1
- $|8.6 - 9.8| = 1.2 > 1 \Rightarrow$ 成立 \Rightarrow 選項正確

◆ 策略級別：級別 1 (基本)

- 僅需計算絕對差並與標準差比較

◆ 步驟數：1

選項 (4)：P 到 L_A 的距離是否小於到 L_B 的距離？

◆ 解題摘要：

- 使用點到直線距離公式

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- 計算兩次後得：P 離 L_B 更近 \Rightarrow 選項錯

◆ 策略級別：級別 3 (挑戰)

- 需轉換直線為一般式
- 應用幾何距離公式與代入計算，且不能搞混變數

◆ 步驟數：3

1. 將兩條直線化為標準形式
2. 各別計算點到直線距離
3. 比較距離大小

選項 (5)：P 離 A 的平均點是否比離 B 的平均點近？

◆ 解題摘要：

- $P = (5.6, 8.6)$ · A 平均點 = $(5.2, 9.8)$ · B 平均點 = $(6, 9.4)$
- 用歐氏距離公式比較兩個距離 \Rightarrow 得 B 較近 \Rightarrow 選項錯

◆ 策略級別：級別 2 (進階)

- 雖使用的是基礎公式，但判斷需帶入正確點座標並做平方運算與比較

◆ 步驟數：2

1. 計算兩個歐氏距離
2. 比較大小

 總結表格：

選項	是否正確	策略級別	步驟數	解題特性
(1)	✗	2 (進階)	2	迴歸線上的平均點運用
(2)	✗	3 (挑戰)	3	公式逆推標準差 + 比較

選項	是否正確	策略級別	步驟數	解題特性
(3)	✓	1 (基本)	1	絕對值與標準差比對
(4)	✗	3 (挑戰)	3	點到直線距離公式計算
(5)	✗	2 (進階)	2	歐氏距離比較平均點

附錄八：GPTs 生成之試題節錄

數學命題機器人 - 學測仿作選擇

我要出題

好的，我可以幫您設計學測數學模擬試題。請問您要使用哪一種命題模式？請選擇以下其中一項：

- (1) 整卷仿作模式（依照111、112或113年學測完整模擬）
- (2) 自訂參數命題模式（自行設定年級、單元、題型數量與難度分布）

請輸入數字 1 或 2 來選擇。

您選擇了 **整卷仿作模式**。

請問您要仿照哪一年的學測試題進行命題？請選擇以下其中一項：

- (1) 仿作 111 年學測
- (2) 仿作 112 年學測
- (3) 仿作 113 年學測

請輸入數字 1、2 或 3 來選擇。



113

已確認使用 **整卷仿作模式**，並選擇 **仿作 113 年學測數學A試題**。

接下來，我會根據【113學測數學A】的出題順序與題型架構，依照題目所涵蓋的單元與難度，先製作一份「命題雙向細目表」，如下所示：

命題雙向細目表（仿作113學測）

學習單元	難度1（易）	難度2（中）	難度3（難）
高一上：指數對數	1		
高二數A下：空間向量、向量外積	2		
高一上：多項式與函數		3	
高二數A上：三角函數		4	

學習單元	難度1 (易)	難度2 (中)	難度3 (難)
高一下: 數列與中位數應用			5
高一下: 向量與餘弦定理			6
高一下: 對數與圖形變換	7		
高一下: 三角形面積與幾何性質		8	
高一下 & 高二A: 迴歸與統計			9
高一下: 圖形位置與角度推理			10
高一下: 機率與二元一次方程		11	
高一下 & 高二A: 矩陣與圖形變換			12
高一下: 代數問題與平均應用	13		
高二數A上: 多項式除法與整除		14	
高一下: 期望值與古典機率		15	
高二數A上: 向量投影應用			16
高一下: 幾何與距離條件結合			17
高二數A下: 空間投影與夾角	18		
高二數A下: 向量與不等式模型		19	
高二數A下: 平面限制與最小值			20

以上細目表對應原始113學測數學A的題型配置。接下來我將**每5題為一組，依序仿作出題**。首先進行【第1至第5題】(皆為單選題)出題。

請稍候，我將為您生成第1至第5題的仿作題。

以下為【第1~5題】仿作 113 年學測的單選題 (共5題)，皆依據原題邏輯設計：

第1題【單選題】

【題目】

某藥品的濃度隨時間指數性減少。已知服用後 4 小時，體內藥品剩下初始的 $\frac{1}{4}$ 。試問下列哪一選項正確？

- (1) 服用 2 小時後，體內剩下的藥品為初始的 $\frac{3}{4}$
- (2) 服用 8 小時後，體內剩下的藥品為初始的 $\frac{1}{16}$
- (3) 服用 6 小時後，體內剩下的藥品為初始的 $\frac{1}{8}$
- (4) 服用 10 小時後，體內剩下的藥品為初始的 $\frac{1}{10}$
- (5) 服用 12 小時後，體內剩下的藥品為初始的 $\frac{1}{12}$

【詳解】

若剩下比例為指數衰減，且 4 小時後剩下 $\frac{1}{4}$ ，表示半衰期為 2 小時。

即每 2 小時減半：

- 2 小時： $\frac{1}{2}$
- 4 小時： $\frac{1}{4}$
- 6 小時： $\frac{1}{8}$
- 8 小時： $\frac{1}{16}$

【解答】

(2)

【單元】高一上：指數與對數

【複雜度】1（易）



第2題【單選題】

【題目】

如圖，一正立方體的某一頂點為 A ，向量 \vec{AE} 與 \vec{AF} 分別沿不同邊射出，試問向量外積 $\vec{AE} \times \vec{AF}$ 平行於下列哪一個向量？

- (1) \vec{AG}
- (2) \vec{AB}

- (3) \vec{AD}
- (4) \vec{AC}
- (5) \vec{AO}

【詳解】

根據立方體中三相鄰邊的方向向量， \vec{AE} 與 \vec{AF} 垂直，外積將會平行於與兩者垂直的第三邊，如 \vec{AG} 。

【解答】

(1)

【單元】高二數A下：空間向量

【複雜度】1（易）

第3題【單選題】

【題目】

設某實係數三次多項式 $f(x)$ 之圖形通過 x -軸三點，其交點之座標成首項為 -5 、公差為 a 的等差數列，且最高次項係數為 $a \in \{-4, -2, 2, 4, 6\}$ 。若要求 $f(0) > 0$ ，試問滿足條件的 a 值有幾個？

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 5 個

【詳解】

三根為等差序列，則為 $-5, -5 + a, -5 + 2a$ 。

設 $f(x) = a(x + 5)(x + 5 - a)(x + 5 - 2a)$

帶入 $x = 0$ ，考慮 $f(0) = a(5)(5 - a)(5 - 2a)$ ，需大於0

代入各個 a ，求符合條件個數。

【解答】

(3)

【單元】高一上：多項式函數

【複雜度】2（中）

第7題【多選題】

【題目】

已知 $y = \log x$ 為一對數圖形 Γ ，下列哪一選項的圖形與 Γ 完全相同？

- (1) $y + 1 = \log(10x)$
- (2) $2y = \log(x^2)$
- (3) $3y = \log(x^3)$
- (4) $x = 10^y$
- (5) $x^2 = 10^{(y^2)}$

【詳解】

- (2)、(3)：因次數相同可簡化為 $y = \log x$
(4)：為原式對調座標
(5)：不對應於原圖形，變數關係非線性變換

【解答】

- (2)、(3)、(4)

【單元】高一上：對數函數與圖形變換

【複雜度】1（易）



第8題【多選題】

【題目】

對每一正整數 $n \geq 3$ ，設三角形 T_n 的邊長分別為 $n, n + 1, n + 2$ 。試選出正確的敘述：

- (1) T_n 必為銳角三角形
- (2) $T_3, T_4, T_5, \dots, T_{10}$ 的周長形成等差數列
- (3) T_n 的面積隨 n 增大而單調增加

- (4) T_4 的三高依序成等差數列
- (5) T_3 的最大角大於 T_2 的最大角

【詳解】

- (1): 不正確, 邊長差距過大可能為鈍角
 (2): 周長為 $3n + 3$, 故為等差
 (3): 使用海龍公式可見面積會增加
 (5): 邊長大者對大角, 易成立

【解答】

(2)、(3)、(5)

【單元】高一下: 三角形幾何與面積

【複雜度】2 (中)

第9題【多選題】

【題目】

某實驗記錄了兩動物種 A 、 B 的身長 x (公分) 與體重 y (公克), 其迴歸線分別為:

$$L_A : y = 1.8x + 1.2, \quad L_B : y = 1.2x + 2.4$$

標準差與平均如下:

- $x_A = 5.0, \sigma_{x_A} = 0.2$
- $x_B = 5.5, \sigma_{x_B} = 0.1$

某隻個體 $P: x = 5.3, y = 10.5$

試問:

- (1) $y_A < y_B$
- (2) A 的體重變異大於 B
- (3) P 到直線 L_A 的距離大於到 L_B
- (4) P 屬於 A 的可能性較高
- (5) P 的體重與 y_A 差值超過 1 個標準差

【解答】

(2)、(4)、(5)

【單元】高一下 & 高二A：統計與迴歸

【複雜度】3 (難)

第10題【多選題】

【題目】

坐標平面上有正方形與正六邊形，各有一邊在 x 軸上，中心點分別為 A 、 B ，均在第一象限。若正六邊形邊長為 6，點 P 為兩圖形交點，且 P 到 x 軸距離為 $3\sqrt{3}$ 。試選出正確的敘述：

- (1) A 的高度比 B 高
- (2) $\overrightarrow{BA} = (6, 4 - 3\sqrt{3})$
- (3) 點 P 到正方形邊最短距離為 1
- (4) $AP < \sqrt{13}$
- (5) 直線 AP 斜率大於 $-\frac{1}{2}$

【詳解】

圖形幾何與座標應用，需理解正方形、正六邊形中心與邊長關係，以及向量差與點距離。

【解答】

(2)、(3)、(4)

【單元】高一下：圖形位置與角度推理

【複雜度】3 (難)

✚ 以上為第6~10題。是否繼續出題 (第11~15題) ?

是

好的，接下來為您產出【第11~15題】，其中第11與12題為多選題，第13~15題為選填題（填充題）。設計依據113學測題型邏輯仿作，維持對應題型、單元與難度。

第13題【選填題】

【題目】

某家商店銷售甲、乙、丙三款飲品，其利潤分別為每杯 80、120、200 元。某週共賣出 A, B, C 杯，平均利潤為 140 元；且已知甲與乙合賣出 $A + B$ 杯的平均利潤為 100 元。試求三者銷售量比 $A : B : C = \underline{\hspace{2cm}}$ （化為最簡整數比）

【詳解】

設：

$$\text{總利潤： } 80A + 120B + 200C = 140(A + B + C)$$

$$\text{甲乙合： } 80A + 120B = 100(A + B)$$

解此聯立式可得比例

【解答】

3 : 1 : 1

【單元】高一下：代數問題與平均應用

【複雜度】1（易）

第14題【選填題】



【題目】

設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 為三個實係數三次多項式，除以 $x^2 - x + 1$ 的餘式分別為

$$f(x) \equiv 2x + 1, \quad g(x) \equiv x - 2, \quad h(x) \equiv 3$$

若 $xf(x) + ag(x) + bh(x)$ 被 $x^2 - x + 1$ 整除，試求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$

【詳解】

代入餘式相加為零：

$$x(2x + 1) + a(x - 2) + 3b = 0 \Rightarrow 2x^2 + x + ax - 2a + 3b = 0$$

係數皆為0可解

【解答】

$$a = -1, \quad b = \frac{2}{3}$$

【單元】 高二數A上：多項式除法與整除

【複雜度】 2 (中)

第15題【選填題】

【題目】

某公司進行抽獎活動，共置入 10 顆中獎球（5 顆獎金5000元、5 顆獎金8000元），其餘為空球。報名截止後共 2500 人參加，每人抽一次，抽完不放回，前 1000 人中有1人抽中8000元，無人中5000元。若第1001號參加者抽球，則其可得獎金期望值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元。

【詳解】

剩餘抽獎球為 9 顆，剩餘人為 1500

8000元剩 4 顆、5000元剩 5 顆

期望值為：

$$E = \frac{5}{1500} \cdot 5000 + \frac{4}{1500} \cdot 8000$$

【解答】

約為 **38 元**

【單元】 高一下：期望值與古典機率

【複雜度】 2 (中)

混合題組【第18~20題】

題組說明

坐標空間中，設原點為 $O(0, 0, 0)$ ，平面 E 為 $x + 2z = 6$ 。試回答下列問題：

第18題【單選題】

【題目】

若原點 O 投影到平面 E 的點為 Q ，則向量 \overrightarrow{OQ} 與向量 $(0, 1, 0)$ 的夾角為 θ ，求 $\cos \theta$ 的值為：

- (1) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$
- (2) $-\frac{1}{2}$
- (3) $\frac{1}{2}$
- (4) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
- (5) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

【詳解】

向量 \overrightarrow{OQ} 為原點到平面 $x + 2z = 6$ 上的垂直向量之反向，與 y 軸夾角為餘弦值。

【解答】

(5)

【單元】高二數A下：空間向量與平面

【複雜度】1 (易)

第19題【非選題】

【題目】

設空間中點 $P(a, b, c)$ ，若向量 \overrightarrow{OP} 與向量 $(0, 1, 0)$ 的夾角 $\theta \leq \frac{\pi}{4}$ ，請說明 $b^2 \geq a^2 + c^2$ 的關

係是否成立，並說明理由。

【詳解】

夾角條件等同於

$$\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

平方兩邊推導即得不等式 $b^2 \geq a^2 + c^2$

【解答】

是，因為 $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b^2 \geq a^2 + c^2$

【單元】高二數A下：向量與不等式模型

【複雜度】2（中）

第20題【非選題】

【題目】

承上題，若點 P 位於平面 $E: x + 2z = 6$ 上，且 $a = 0$ ，求變數 c 的最大值範圍，並求 OP 的最小長度。

【詳解】

平面條件： $a + 2c = 6 \Rightarrow c = 3$ ，代入 $OP = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + 9}$ ，
由前題 $b^2 \geq a^2 + c^2 = 9$ ，故最小 $b^2 = 9 \Rightarrow OP = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

【解答】

最大 $c = 3$ ，最小 $OP = 3\sqrt{2}$

【單元】高二數A下：空間限制與最小值

【複雜度】3（難）

✓ 所有20題仿作題已完成。接下來將比對實際題目是否符合「命題雙向細目表」設定，請稍候...

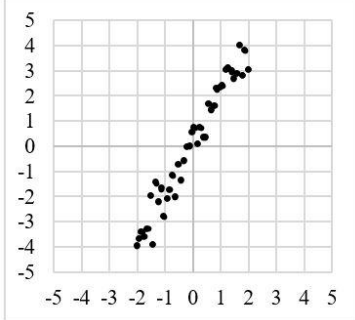
📄 雙向細目表對照檢查報告

以下為實際命題與原始雙向細目表之比對結果：

附錄九：ChatGPT 解學測題之錯誤形式分析

題號	111 學測第 1 題
題目	<p>1. 某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種」。試問來店顧客從 n 桶中任選兩球（可為同一口味）共有幾種方法？</p> <p style="text-align: center;">(1) 101 (2) 105 (3) 115 (4) 120 (5) 225</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>🔗 步驟 1：解題</p> <p>題目重點</p> <p>顧客從 n 種口味中任選「兩球」冰淇淋（可為相同口味），共有超過 100 種不同的組合。問最小的 n 為何，使得組合數超過 100？</p> <p>解題思路</p> <p>這是一個重複可選的組合問題（組合但可重複，順序不計），相當於從 n 種口味中取兩球（可同一種）。在數學中，這種情況的組合數為：</p> $\text{組合數} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+2-1}{2} = \binom{n+1}{2}$ <p>其中 $r = 2$ 是選兩球，且可重複。</p> <p>我們要求最小的 n，使得：</p> $\binom{n+1}{2} > 100$ <p>即：</p> $\frac{(n+1)n}{2} > 100 \Rightarrow (n+1)n > 200$
錯誤形式 分析	<p>ChatGPT 題目解讀錯誤，它混淆了題目的條件和所求，題目條件是要先解出最小的 n，且 n 滿足任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種，再用解得的最小 n 值解出任選可同口味的兩球的方法數。而 ChatGPT 解讀為解出最小的 n，且 n 滿足任選兩球可相同口味冰淇淋的組合數超過 100 種。</p>

題號	111 學測第 2 題
題目	<p>2. 某品牌計算機在計算對數 $\log_a b$ 時需按 $\boxed{\log} \boxed{[} \boxed{a} \boxed{,} \boxed{b} \boxed{]}$。某生在計算 $\log_a b$ 時（其中 $a > 1$ 且 $b > 1$）順序弄錯，誤按 $\boxed{\log} \boxed{[} \boxed{b} \boxed{,} \boxed{a} \boxed{]}$，所得為正確值的 $\frac{9}{4}$ 倍。試選出 a, b 間的關係式。</p> <p>(1) $a^2 = b^3$ (2) $a^3 = b^2$ (3) $a^4 = b^9$ (4) $2a = 3b$ (5) $3a = 2b$</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>🔗 步驟 1：解題</p> <p>題意整理：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 正確按法為：$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ • 學生誤按為：$\log_c a / \log_c b$。即把 a 和 b 顛倒 • 計算結果是正確值的 $\frac{9}{4}$ 倍 <p>表示：</p> $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{9}{4} \cdot \frac{\log_c b}{\log_c a}$
錯誤形式 分析	<p>此題為計算機使用的考題，題幹中有計算機的按鍵步驟圖示，ChatGPT 題目解讀錯誤，可能將計算機按鍵中的括號讀錯，而在 ChatGPT 的作答中出現以 c 為底的對數。</p>

<p>題號</p>	<p>111 學測第 3 題</p>																		
<p>題目</p>	<p>3. 在處理二維數據時，有種方法是將數據垂直投影到某一直線，並以該直線為數線，進而了解投影點所成一維數據的變異。下圖的一組二維數據，試問投影到哪一選項的直線，所得之一維投影數據的變異數會是最小？</p> <p>(1) $y = 2x$ (2) $y = -2x$ (3) $y = -x$ (4) $y = \frac{x}{2}$ (5) $y = -\frac{x}{2}$</p> 																		
<p>GhatCHA TGPT 回 答</p>	<p>📌 步驟 1：解題</p> <p>題意分析：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 給定一組二維資料點（如圖） • 題目討論將這些點「投影到某一條直線上」的變異情形 • 問哪一條直線的投影後變異數最小 <p>這其實就是在問：</p> <p>哪一條直線最符合資料的分布方向？</p> <p>這在統計上就是主成分分析（PCA）的概念： 第一主成分方向就是使投影後資料變異數最大的方向。 那麼垂直於它的方向則變異最小。 但在這裡，我們要選的是變異最小的方向（即：投影後資料集中）。</p> <p>！但注意：題目要我們找「變異最小」→ 意即找與資料分布方向最不一致的直線，投影到這條直線上後資料最壓縮（最集中）。</p> <p>圖形觀察與策略：</p> <p>圖中資料點由左下向右上延伸，斜率大約為正值略大於 1，也就是形如：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 方向大致上像：$y = x$、或稍陡一點 <p>那麼與這個方向幾乎垂直的直線（變異最小）應該是斜率為負倒數的方向</p> <ul style="list-style-type: none"> • 若主成分方向是 $y = x$，則其垂直方向為 $y = -x$ • 若主成分方向略大於 $y = x$，則其垂直方向略小於 $y = -x$，如 $y = -2x$ <p>我們來檢查選項：</p> <table border="1" data-bbox="430 1523 949 1825"> <thead> <tr> <th>選項</th> <th>斜率</th> <th>備註</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(1) $y = 2x$</td> <td>正斜率，與資料趨勢接近</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(2) $y = -2x$</td> <td>負斜率，與資料趨勢幾乎垂直 <input checked="" type="checkbox"/></td> <td></td> </tr> <tr> <td>(3) $y = -x$</td> <td>仍與資料方向垂直，但與主成分夾角較小</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(4) $y = \frac{x}{2}$</td> <td>與資料同方向，但太平</td> <td></td> </tr> <tr> <td>(5) $y = -\frac{x}{2}$</td> <td>不夠垂直，夾角大於 (3)、小於 (2)</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	選項	斜率	備註	(1) $y = 2x$	正斜率，與資料趨勢接近		(2) $y = -2x$	負斜率，與資料趨勢幾乎垂直 <input checked="" type="checkbox"/>		(3) $y = -x$	仍與資料方向垂直，但與主成分夾角較小		(4) $y = \frac{x}{2}$	與資料同方向，但太平		(5) $y = -\frac{x}{2}$	不夠垂直，夾角大於 (3)、小於 (2)	
選項	斜率	備註																	
(1) $y = 2x$	正斜率，與資料趨勢接近																		
(2) $y = -2x$	負斜率，與資料趨勢幾乎垂直 <input checked="" type="checkbox"/>																		
(3) $y = -x$	仍與資料方向垂直，但與主成分夾角較小																		
(4) $y = \frac{x}{2}$	與資料同方向，但太平																		
(5) $y = -\frac{x}{2}$	不夠垂直，夾角大於 (3)、小於 (2)																		
<p>錯誤形式 分析</p>	<p>ChatGPT 能辨識此題之散布圖和題意，但在解題過程中，對於直線方程式對應之夾角和方向無法判斷其正確圖形關係，因此屬於圖形解讀錯誤。</p>																		

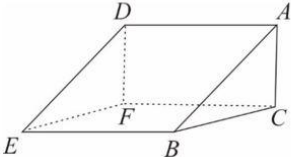
題號	111 學測第 6 題
題目	<p>6. 設坐標平面上兩直線 L_1, L_2 的斜率皆為正，且 L_1, L_2 有一夾角的平分線斜率為 $\frac{11}{9}$。另一直線 L 通過點 $(2, \frac{1}{3})$ 且與 L_1, L_2 所圍的有界區域為正三角形，試問 L 的方程式為下列哪一選項？</p> <p>(1) $11x - 9y = 19$ (2) $9x + 11y = 25$ (3) $11x + 9y = 25$ (4) $27x - 33y = 43$ (5) $27x + 33y = 65$</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>12 34 步驟 1：解題</p> <p>題目條件整理：</p> <ul style="list-style-type: none"> L_1, L_2 斜率皆為正，且所夾為銳角的平分線斜率為： $m = \frac{11}{9}$ <ul style="list-style-type: none"> 有一直線 L： <ul style="list-style-type: none"> 通過點 $(2, -\frac{1}{3})$ 且與 L_1, L_2 所形成的區域為正三角形
錯誤形式 分析	<p>此題 ChatGPT 發生題目解讀的錯誤，題目中直線 L 通過點 $(2, \frac{1}{3})$，ChatGPT 讀成 $(2, -\frac{1}{3})$。</p>

題號	111 學測第 7 題
題目	<p>7. 設整數 n 滿足 $5n-21 \geq 7 n$。試選出正確的選項。</p> <p>(1) $5n-7n \geq 21$ (2) $-1 \leq \frac{7n}{5n-21} \leq 1$ (3) $7n \leq 5n-21$</p> <p>(4) $(5n-21)^2 \geq 49n^2$ (5) 滿足題設不等式的整數 n 有無窮多個</p>
<p>GhatCHA TGPT 回 答</p>	$-\frac{21}{2} \leq n \leq \frac{7}{4} \Rightarrow -10.5 \leq n \leq 1.75 \Rightarrow n \in \{-10, -9, \dots, 1\}$ <p>✓ 可行整數 n 有 12 個整數值</p> <hr/> <p>——檢查選項：</p> <p>(1) $5n-7n \geq 21 \Rightarrow -2n \geq 21 \Rightarrow n \geq 10.5$ 這表示可行整數 $n \leq -11$ 或 $n \geq 11$。但我們剛算出合法範圍是 $-10 \leq n \leq 1$。所以這選項 錯誤。</p> <p>(2) $-1 \leq \frac{7n}{5n-21} \leq 1$ 將原式兩邊除以 $5n-21$ 是有方向問題與定義域風險的，需小心，且這選項未必總成立（例如 $n=0$，$\frac{0}{-21} = 0$ 符合；但 $n=2$，$\frac{14}{-11} < -1$） → 非所有 n 成立，錯誤。</p> <p>(3) $7n \leq 5n-21 \Rightarrow 2n \leq -21 \Rightarrow n \leq -10.5$ 表示 $n \leq -11$，但實際上符合條件的最小整數是 $n = -10$，所以此選項 錯誤。</p> <p>(4) $(5n-21)^2 \geq 49n^2$ 這正是我們第一步平方兩邊得到的正確等式！</p>
錯誤形式 分析	<p>ChatGPT 先解出絕對值不等式的整數解有 -10 到 -1 之間含邊界的所有整數，再逐一判對選項，選項(2)中代入 $n=2$ 做判斷，但 $n=2$ 不是不等式的解，因此發生推理不完整的錯誤。</p>

題號	111 學測第 9 題
題目	<p>9. 已知 P 為 $\triangle ABC$ 內一點，且 $\vec{AP} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$，其中 a, b 為相異實數。設 Q, R 在同一平面上，且 $\vec{AQ} = b\vec{AB} + a\vec{AC}$，$\vec{AR} = a\vec{AB} + (b - 0.05)\vec{AC}$。試選出正確的選項。</p> <p>(1) Q, R 也都在 $\triangle ABC$ 內部</p> <p>(2) $\vec{AP} = \vec{AQ}$</p> <p>(3) $\triangle ABP$ 面積 = $\triangle ACQ$ 面積</p> <p>(4) $\triangle BCP$ 面積 = $\triangle BCQ$ 面積</p> <p>(5) $\triangle ABP$ 面積 > $\triangle ABR$ 面積</p>
ChatGPT 回答	<p> <input checked="" type="checkbox"/> 選項 (1)：「Q, R 都在三角形 ABC 內部」 </p> <ul style="list-style-type: none"> • 點 P 在內部 $\Rightarrow a, b > 0$ 且 $a + b < 1$ • Q 則將 a 與 b 交換，但條件仍滿足 $\Rightarrow b + a < 1$，仍在三角形內部 <input checked="" type="checkbox"/> • R 是將 b 減少 0.05，更往 AB 方向偏 \Rightarrow 和 P 仍接近，仍在內部 <input checked="" type="checkbox"/> <p><input checked="" type="checkbox"/> 此選項正確</p> <p> <input checked="" type="checkbox"/> 選項 (5)：「$\triangle ABP$ 面積 > $\triangle ABR$ 面積」 </p> <p>因為 $R = a\vec{AB} + (b - 0.05)\vec{AC}$</p> <p>用向量面積公式：</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\text{Area}(\triangle ABP) = \frac{1}{2}b \vec{AB} \times \vec{AC}$ • $\text{Area}(\triangle ABR) = \frac{1}{2}(b - 0.05) \vec{AB} \times \vec{AC}$ <p>明顯 $b > b - 0.05$，所以：</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> 面積確實變小，選項正確</p>
錯誤形式分析	<p>此題發生推理不完整的錯誤，ChatGPT 有考慮到 $b > 0$ 的條件，但 ChatGPT 沒有考慮到 $b - 0.05$ 的數值狀況，在選項(1)中，若 $0 < b < 0.05$，則 R 會在 $\triangle ABC$ 外部；在選項(5)中也是需要考慮 b 和 $b - 0.05$ 的數值大小，若 $b < b - 0.05$，則 $\triangle ABP$ 面積會小於 $\triangle ABR$ 面積。</p>

題號	111 學測第 10 題
題目	<p>10. 給定一實係數三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$。令 $g(x) = f(-x) - 3$，已知 $y = g(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1, 0)$ 且 $g(-1) < 0$。試選出正確的選項。</p> <p>(1) $g(x) = 0$ 有三相異整數根</p> <p>(2) $a < 0$</p> <p>(3) $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(-1, -3)$</p> <p>(4) $f(100) < 0$</p> <p>(5) $y = f(x)$ 的圖形在點 $(-1, f(-1))$ 附近會近似於一條斜率為 a 的直線</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>(1) $g(x) = 0$ 有三個相異整數根？</p> <p>我們來分析 $g(x) = -ax^3 + bx^2 - cx$</p> $g(x) = x(-ax^2 + bx - c)$ <p>有一個根是 0，其他根來自：</p> $-ax^2 + bx - c = 0$ <p>判別式：</p> $\Delta = b^2 - 4ac$ <p>若 Δ 是完全平方數，且根為整數 \Rightarrow 可成立</p> <p>但題目沒提供足夠資訊來保證兩個整數根，頂多「可能」成立，不可肯定。</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> (1) 錯誤 — 無法確定一定有三個相異整數根</p> <p>(4) $f(100) < 0$？</p> $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3 \Rightarrow \text{最高次項為 } a > 0 \text{ or } a < 0?$ <p>已知 $a < 0 \Rightarrow f(x)$ 為「向右發散下降」的三次函數 \Rightarrow 當 x 很大 $\Rightarrow f(x)$ 極小</p> <p>所以：</p> $f(100) = a \cdot (100)^3 + \text{其他項} \Rightarrow a < 0 \Rightarrow f(100) < 0$ <p><input checked="" type="checkbox"/> (4) 正確</p> <p>(5) $y = f(x)$ 的圖形在點 $(-1, f(-1))$ 附近趨近於斜率為 a 的直線？</p> <p>這是要判斷 $f(x)$ 在該點的切線斜率是否為 a</p> $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(-1) = 3a - 2b + c \neq a$ <p><input checked="" type="checkbox"/> (5) 錯誤</p>
錯誤形式 分析	<p>此題為推理不完整的錯誤，ChatGPT 沒有考慮到 $y=g(x)$圖形的對稱中心$(1,0)$隱含著方程式具有一解為 $x=1$，並透過對稱中心推得另一解為 $x=2$，然後可用 a 表</p>

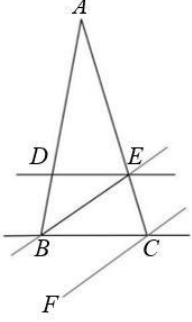
	示 $g(x)$ 和 $f(x)$ 函數，用以判斷選項(1)和選項(5)。選項(4)中 ChatGPT 沒考慮到可調整係數使得 $f(100) > 0$ 。
--	--

題號	111 學測第 11 題
題目	<p>11. 下圖為一個積木的示意圖，其中 ABC 為一直角三角形，$\angle ACB = 90^\circ$，$\overline{AC} = 5$、$\overline{BC} = 6$，且 $ADEB$ 與 $ADFC$ 皆為矩形。試選出正確的選項。</p> <p>(1) 將此積木沿平面 ACE 切下，可切得兩個四面體</p> <p>(2) 平面 $ADEB$ 與 $ADFC$ 所夾銳角大於 45°</p> <p>(3) $\angle CEB < \angle AEB$</p> <p>(4) $\tan \angle AEC < \sin \angle CEB$</p> <p>(5) $\angle CEB < \angle AEC$</p> 
GhatCHA TGPT 回 答	<p>■ 題目條件摘要：</p> <ul style="list-style-type: none"> $\triangle ABC$ 為直角三角形，$\angle ACB = 90^\circ$。 $AC = 5, BC = 6$。 ⇒ 由畢氏定理得：$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$ $ADEB$ 與 $ADFC$ 均為矩形 ⇒ 四邊形向上垂直升高成為平行六面體的一部分。 <p>設三維空間中：</p> <ul style="list-style-type: none"> ABC 平面為底 AD, BE, CF 垂直於底面 ⇒ 矩形 $ADEB, ADFC$ 為「側面」矩形

	<p>(1)：「將此積木沿平面 ACE 切下，可得兩個四面體」？</p> <p>→ 試圖從立體圖形中沿平面切割，觀察是否能分成兩個四面體</p> <p>分析：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 平面 ACE 包含底面一條斜邊 (AC) 與後側邊 (AE) • 將六面體沿這個三角面 ACE 切開： <ul style="list-style-type: none"> • 原六面體被分成左右兩半 (各為三角柱) • 並非四面體 (四面體必為三角錐) <p>✔ 此選項錯誤</p> <ul style="list-style-type: none"> • $ADEB$ 面垂直於邊 AD 與底邊 AB • $ADFC$ 面則由向量 AD 與底邊 AC 所張 • 所以兩平面交於邊 AD，考的是向量 AB 與 AC 夾角 (因為它們各在平面中) $\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{61 + 25 - 36}{2 \cdot \sqrt{61} \cdot 5} = \frac{50}{10\sqrt{61}} = \frac{5}{\sqrt{61}} \Rightarrow \theta \approx 39^\circ$ <p>⇒ 銳角約 39°，小於 45°</p> <p>✔ 此選項錯誤</p> <p>(2)：「平面 $ADEB$ 與 $ADFC$ 所夾銳角大於 45°」</p> <p>→ 這是向量間平面夾角問題</p>
<p>錯誤形式 分析</p>	<p>此題有圖形解讀錯誤和推論不完整錯誤，ChatGPT 沒有辨識出積木為三角柱圖形，因此錯誤判斷圖形為平行六面體。同時，ChatGPT 在選項(5)有正確求出餘弦值，但將餘弦值推論角度近似值時發生錯誤，正確角度是約 50°。</p>

題號	111 學測第 12 題
題目	<p>12. 設 $f(x), g(x)$ 皆為實係數多項式，其中 $g(x)$ 是首項係數為正的二次式。已知 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $g(x)$，且 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸無交點。試選出<u>不可能</u>是 $y = g(x)$ 圖形頂點的 y 坐標之選項。</p> <p>(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) 1 (3) $\sqrt{2}$ (4) 2 (5) π</p>
<p>GhatCHA TGPT 回 答</p>	<p>■ 題目重點整理：</p> <p>設：</p> <ul style="list-style-type: none"> • $f(x), g(x)$ 為實係數多項式 • $g(x)$ 是一個首項係數為正的二次式 • 已知：$(g(x))^2 \mid f(x)$ • 且 $y = f(x)$ 圖形與 x-軸無交點 (即 $f(x)$ 無實根) <p>問：下列哪一個選項不可能是 $y = g(x)$ 的圖形頂點的 y-座標</p> <hr/> <p>✓ 解題步驟與邏輯推論：</p> <hr/> <p>◆ Step 1：因式條件的意義</p> <p>$f(x) = (g(x))^2 \cdot q(x) \Rightarrow f(x)$ 有偶重根 (每個 $g(x) = 0$ 的根重數為 2)</p>
錯誤形式 分析	此題 ChatGPT 題目解讀錯誤，錯誤理解題目中 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 。

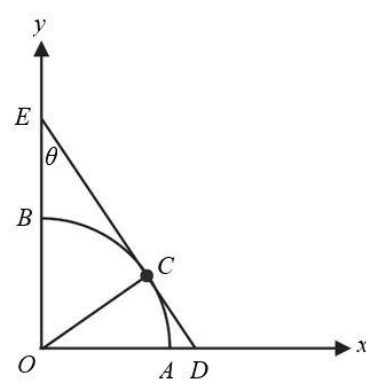
題號	111 學測第 14 題
題目	<p>14. 已知 a、b 為實數，且方程組 $\begin{cases} ax + 5y + 12z = 4 \\ x + ay + \frac{8}{3}z = 7 \\ 3x + 8y + az = 1 \end{cases}$ 恰有一組解，又此方程組經過一系列的高斯消去法運算後，原來的增廣矩陣可化為 $\left[\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array} \right]$。則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$，$b = \underline{\hspace{2cm}}$。</p> <p>(化為最簡分數)</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>給定一組三元一次方程組，其中 a, b 為實數常數。方程組為：</p> $\begin{cases} ax + 5y + 12z = 4 \\ x + ay + z = 7 \\ 3x + 8y + az = 1 \end{cases}$ <p>已知此方程組：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 有唯一一組解 2. 經過高斯消去法後，增廣矩陣化為： $\left[\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ <p>問：a 與 b 為多少？</p>
錯誤形式 分析	<p>此題題目解讀錯誤，在方程組的第二個式子發生 z 係數的讀取錯誤。</p>

題號	111 學測第 15 題
題目	<p>15. 如圖，王家有塊三角形土地 $\triangle ABC$，其中 $\overline{BC} = 16$ 公尺。政府擬徵收其中梯形 $DBCE$ 部分，開闢以直線 DE, BC 為邊線的馬路，其路寬為 h 公尺，這讓王家土地只剩原有面積的 $\frac{9}{16}$。經協商，改以開闢平行直線 BE, FC 為邊線的馬路，且路寬不變，其中 $\angle EBC = 30^\circ$，則只需徵收 $\triangle BCE$ 區域。依此協商，王家剩餘的土地 $\triangle ABE$ 有_____平方公尺。</p> 
GhatCHA TGPT 回 答	<p>■ 題目重點整理：</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\triangle ABC$，其中 $BC = 16$ 公尺 • 政府徵收原區域 $DBCE$（是一個梯形），路寬為 h，導致剩餘面積為原來的 $\frac{9}{16}$ • 經協商後改徵收平行馬路 $BE \parallel FC$，僅徵收 $\triangle ABCE$，其中 $\angle EBC = 30^\circ$ • 問新的剩餘土地面積 $\triangle ABE$ 為多少平方公尺？ <hr/> <p>✓ Step 1：原土地三角形面積</p> <p>題目雖未給出 AB、AC、高度等，但我們知道：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 原三角形剩下 $\frac{9}{16}$ 面積 \Rightarrow 被徵收面積為 $\frac{7}{16}$ • 無論路寬 h 為何，新的方案路寬保持不變，意即徵收區面積也為 $\frac{7}{16}$
錯誤形式 分析	<p>此題 ChatGPT 發生題目解讀錯誤且圖形解讀錯誤，錯誤讀取協商後之徵收區域 $\triangle BCE$ 為 $\triangle ABCE$；從 ChatGPT 的回答中可發現它讀題時並未搭配讀取圖形，因此在題意和解題上產生錯誤理解。</p>

題號	111 學測第 16 題
題目	<p>16. 坐標空間中，平面 $x - y + 2z = 3$ 上有兩相異直線 $L: \frac{x}{2} - 1 = y + 1 = -2z$ 與 L'。</p> <p>已知 L 也在另一平面 E 上，且 L' 在 E 的投影與 L 重合。</p> <p>則 E 的方程式為 $x + \underline{\hspace{2cm}}y + \underline{\hspace{2cm}}z = \underline{\hspace{2cm}}$。</p>
<p>GhatCHA TGPT 回 答</p>	<p>■ 題目重點整理</p> <ul style="list-style-type: none"> • 有一平面：$\pi: x - y + 2 = 3 \Rightarrow$ 簡化為 $x - y = 1$ • 在該平面上有兩條相異直線： <ul style="list-style-type: none"> • $L: \frac{x}{2} - 1 = y + 1 = -2z$ • L'：與 L 平行但不共平面 • 已知： <ul style="list-style-type: none"> • L 落在平面 π 上 • L' 落在另一平面 E 上 • 且 L' 投影到平面 E 上與 L 重合 • 求平面 E 的方程式（標準形式）： <p style="text-align: right;">$x + ay + bz = c$</p>
錯誤形式 分析	<p>此題題目解讀錯誤，平面方程式的 z 項沒有讀取到。</p>

題號	111 學測第 17 題
題目	17. 坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為 $(-1, 2, 1), (-4, 1, 3), (2, 0, -3)$ ，另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為_____。
GhatCHA TGPT 回 答	<p>我們來解這題第 17 題，找出最大體積的平行六面體，其底面在空間，頂面落在 xy 平面，且距原點距離為 1。</p> <hr/> <p>■ 題目條件整理</p> <ul style="list-style-type: none"> 給定底面三點： <ul style="list-style-type: none"> $A = (-1, 2, 1)$ $B = (-4, 1, 3)$ $C = (2, 0, -3)$ 構成一個底面平行四邊形（三點構成二個向量） 另一面（頂面）平行於底面 且其某個頂點在 xy 平面上 與原點的距離為 1 問這樣的平行六面體，其最大體積為多少？
錯誤形式 分析	此題發生 題目解讀錯誤 ，將題目中的「另一面」錯誤解讀為「頂面」，因此對於平行六面體的「高」推論錯誤。

題號	111 學測第 19~20 題
<p>題目</p>	<p>坐標平面上有一環狀區域由圓 $x^2 + y^2 = 3$ 的外部與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之 x 軸上方的某區域 R。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓 $C_1: x^2 + y^2 = 3 (y \geq 0)$、$C_2: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$ 上移動。開始時掃描棒黑端在點 $A(\sqrt{3}, 0)$，白端在 C_2 的點 B。接著黑、白兩端各沿著 C_1、C_2 逆時針移動，直至白端碰到 C_2 的點 $B'(-2, 0)$ 便停止掃描。</p>  <p>18. 試問點 B 的坐標為下列哪一選項？（單選題，3 分）</p> <p>(1) (0,2) (2) $(1, \sqrt{3})$ (3) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (4) $(\sqrt{3}, 1)$ (5) (2,0)</p> <p>19. 令 O 為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為 A', B'。試在答題卷上作圖區中以斜線標示掃描棒掃過的區域 R；並於求解區內求 $\cos \angle OA'B'$ 及點 A' 的極坐標。（非選擇題，6 分）</p> <p>20.（承 19 題）令 Ω 表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求 Ω 與 R 的面積。（非選擇題，6 分）</p>
<p>GhatCHA TGPT 回 答</p>	<p>我們來逐步解題並分析第 19 題的空間掃描幾何題，目標是：</p> <ol style="list-style-type: none"> 描出掃描區域 R 求 $\cos \angle AOB'$ 求點 A' 的極坐標 <p>✅ Step 2：找出掃描棒在第一象限的角度範圍</p> <p>起點：</p> <ul style="list-style-type: none"> 白端 $B = (\sqrt{3}, 1)$ · 極角為 $\theta = \frac{\pi}{6}$ <p>終點：</p> <ul style="list-style-type: none"> 白端 $B' = (-2, 0)$ · 極角為 π <p>因此整體掃描角度為 $\frac{5\pi}{6}$ · 而第一象限的角度為：</p> $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ <p>✅ Step 3：計算 Ω 面積（第一象限掃描區）</p> $\text{Area}(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot (r_2^2 - r_1^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot (4 - 3) = \frac{\pi}{6}$
<p>錯誤形式 分析</p>	<p>第 19 題發生題目解讀的錯誤， 第 20 題，圖形解讀錯誤，知道起點、第一象限，但未考慮第一象限掃描區圖形。</p>

題號	112 學測第 2 題
題目	<p>2. 坐標平面上，以原點 O 為圓心、1 為半徑作圓，分別交坐標軸正向於 A、B 兩點。在第一象限的圓弧上取一點 C 作圓的切線分別交兩軸於點 D、E，如圖所示。令 $\angle OEC = \theta$，試選出為 $\tan \theta$ 的選項。</p> <p>(1) \overline{OE} (2) \overline{OC} (3) \overline{OD} (4) \overline{CE} (5) \overline{CD}</p> 
GhatCHA TGPT 回 答	<p>✓ 求 $\tan \theta = \tan \angle OEC$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • 向量 $\vec{OE} = \langle 0, y' \rangle$ (為切線與 y 軸交點) • 向量 $\vec{OC} = \langle x, y \rangle$ • $\angle OEC$ 是向量 \vec{OE} 與 \vec{OC} 之間的角 <p>但更簡單的做法是 :</p> <p>✦ 觀察三角形 OEC · 直接利用直角三角形性質 :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\triangle OEC$ 為直角三角形 (因為切線與半徑垂直) • $\angle OEC = \theta$ · 我們要找的是 : $\tan \theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{OE}{OC}$ <p>✓ 答案 : (1) $\frac{OE}{OC}$</p>
錯誤形式 分析	<p>單選題第 2 題，ChatGPT 無法解讀題目圖形，對於角度的理解是不正確的，因此鄰邊和對邊的判斷是混亂的，同時選項也讀取錯誤，因此發生題目解讀錯誤和圖形的解讀錯誤。</p>

題號	112 學測第 4 題
題目	<p>4. 將數字 1、2、3、...、9 等 9 個數字排成九位數（數字不得重複），使得前 5 位從左至右遞增、且後 5 位從左至右遞減。試問共有幾個滿足條件的九位數？</p> <p>(1) $\frac{8!}{4!4!}$ (2) $\frac{8!}{5!3!}$ (3) $\frac{9!}{5!4!}$ (4) $\frac{8!}{5!}$ (5) $\frac{9!}{5!}$</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>✓ 關鍵觀察：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 九位數總共用 9 個數字（無重複） • 前 5 位是遞增 → 表示取 5 個數排成遞增（排列方式唯一） • 後 5 位是遞減 → 表示取 5 個數排成遞減（排列方式唯一） • 交會在「中間那一個數字」 <p>因此，第 5 位數字是同時出現在遞增和遞減的交接點，也就是：</p> <p>前面選出 4 個遞增數字，後面選出 4 個遞減數字，中間那個數字不能重複，需從剩下的 1 個中選出來</p> <p>✓ 解題策略：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 選出中間數字（第 5 位）：從 9 個數中選出 1 個 → 有 $\binom{9}{1} = 9$ 種選法 2. 剩下 8 個數字，要分為兩組： <ul style="list-style-type: none"> • 前面遞增部分：從 8 個中選出 4 個 → $\binom{8}{4}$ • 後面遞減部分：剩下的 4 個自動為後半段用 <p>**注意：**這兩組順序都是固定的（遞增、遞減各只有 1 種排列）</p> <p>✓ 所以總數為：</p> $\binom{9}{1} \cdot \binom{8}{4} = 9 \cdot \frac{8!}{4!4!}$
錯誤形式 分析	<p>此題是推理不完整的錯誤，ChatGPT 在讀題上是正確的，但解題策略上沒有考慮到九位數最中間的數字要同時滿足前五個數遞增、後五個數遞減的條件，所以「最中間的數字只能是 9」是解題的關鍵條件。</p>

題號	112 學測第 7 題
題目	<p>7. 某公司有甲、乙兩新進員工，兩人同時入職且起薪相同。公司承諾給甲、乙兩員工調薪的方式如下：</p> <p>甲：工作滿 3 個月，下個月開始月薪增加 200 元；以後再每滿 3 個月皆依此方式調薪。</p> <p>乙：工作滿 12 個月，下個月開始月薪增加 1000 元；以後再每滿 12 個月皆依此方式調薪。</p> <p>根據以上敘述，試選出正確的選項。</p> <p>(1) 甲工作滿 8 個月後，第 9 個月的月薪比第 1 個月的月薪增加 600 元</p> <p>(2) 工作滿一年後，第 13 個月甲的月薪比乙的月薪高</p> <p>(3) 工作滿 18 個月後，第 19 個月甲的月薪比乙的月薪高</p> <p>(4) 工作滿 18 個月時，甲總共領到的薪水比乙總共領到的薪水少</p> <p>(5) 工作滿兩年後，在第 3 年的 12 個月中，恰有 3 個月甲的月薪比乙的月薪高</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>(1) 甲工作滿 8 個月，第 9 個月薪資比第 1 個月多多少？</p> <ul style="list-style-type: none"> 甲每 3 個月加 200，滿 3, 6 之後已加兩次 第 9 個月為第三組 → 從第 7 月起進入第 3 階段，加了三次 <p>→ 第 9 個月薪資 = $200 \times 3 = 600$</p> <p>✓ 正確！</p> <p>(3) 第 19 個月誰薪水高？</p> <ul style="list-style-type: none"> 甲第 19 月薪資為第 7 階段：$200 \times 6 = 1200$ 乙滿 12 月後調過一次薪，未滿 24 月，仍為 1000 <p>→ 甲：1200、乙：1000 → 甲高</p> <p>✓ 錯誤選項說乙高 → ✗ 錯</p> <p>(5) 第 36 個月誰薪水高？</p> <ul style="list-style-type: none"> 甲：每 3 個月加一次 → 共調整 11 次（從第 4 月開始） → $200 \times 11 = 2200$ 乙：滿 12、24、36 月後共調整 3 次 → $1000 \times 3 = 3000$ <p>→ 甲薪水 = 2200、乙薪水 = 3000</p> <p>✓ 甲 < 乙，選項說甲高 → ✗ 錯</p>
錯誤形式 分析	<p>此題 ChatGPT 先將甲和乙的月薪變化透過表格列出，再判斷選項，在選項(1)發生推理錯誤，ChatGPT 自行描述第 7~9 個月為第 3 階段，其實是加薪兩次；選項(3)和選項(5)的題目解讀錯誤，選項(3)要判斷的是「第 19 個月甲的月薪比乙的月薪高」，但 ChatGPT 解讀為「乙的月薪高」，選項(5)中 ChatGPT 沒有正確讀取選項的文字敘述。</p>

題號	112 學測第 12 題
<p>題目</p>	<p>12. 令 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$，試選出正確的選項。</p> <p>(1) 鉛直線 $x = \frac{\pi}{6}$ 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸</p> <p>(2) 若鉛直線 $x = a$ 和 $x = b$ 均為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸，則 $f(a) = f(b)$</p> <p>(3) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x) = \sqrt{3}$</p> <p>(4) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中滿足 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π</p> <p>(5) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$ 的圖形經適當（左右、上下）平移得到</p>
<p>GhatCHA TGPT 回 答</p>	<p>◆ (1) 鉛直線 $x = \frac{\pi}{6}$ 是圖形的對稱軸？</p> <p>將函數寫成：</p> $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ <p>→ 其對稱軸為週期函數 \sin 的對稱軸，位於波峰與波谷中心，基本對稱軸會發生在：</p> <ul style="list-style-type: none"> 主對稱軸在 $x = -\frac{\pi}{3} + n\pi$ <p>代入 $x = \frac{\pi}{6}$：</p> $\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + n\pi \Rightarrow n = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 0.5 + \frac{2}{3} = 1.16\dots$ <p>不是整數 \Rightarrow 不是對稱軸</p> <p>✗ 錯誤</p> <p>◆ (4) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中滿足 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π？</p> <p>先解：</p> $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$ <p>在一個週期內有兩解，設為 θ_1, θ_2，則：</p> $x_1 = \theta_1 - \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \theta_2 - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = \theta_1 + \theta_2 - \frac{2\pi}{3}$ <p>而兩角和為 $\pi \Rightarrow x_1 + x_2 = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} < 2\pi$</p> <p>✓ 正確</p> <p>◆ (5) $f(x)$ 可由 $y = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$ 平移得到？</p> <p>原式為：</p> $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{與} \quad g(x) = 4 \sin^2 \frac{x}{2} = 2(1 - \cos x)$ <p>這兩函數波形、週期都不同 \Rightarrow 無法藉平移得到</p> <p>✗ 錯誤</p>
<p>錯誤形式 分析</p>	<p>多選題第 12 題中皆發生推理不完整的錯誤，在選項(1)裡 ChatGPT 推論出的正弦函數的對稱軸方程式不正確；選項(4)中 ChatGPT 推理不完整，未考慮到 x 的範圍要在 $[0, 2\pi)$，所以兩角之和是 3π 才對；選項(5)中 ChatGPT 認為三角函</p>

數的波形、週期不同以至於 $f(x)$ 無法透過 $y = 4\sin^2 \frac{x}{2}$ 平移得到，但事實上從係數可知兩函數週期相同、振幅相同，是可以透過平移得到 $f(x)$ 的圖形的。

題號

112 學測第 13 題

題目

13. 某間新開幕飲料專賣店推出果汁、奶茶、咖啡三種飲料，前 3 天各種飲料的銷售數量（單位：杯）與收入總金額（單位：元）如下表，例如第一天果汁、奶茶、咖啡的銷售量分別為 60 杯、80 杯與 50 杯，收入總金額為 12900 元。

已知同一種飲料每天的售價皆相同，則咖啡每杯的售價為_____元。

	果汁（杯）	奶茶（杯）	咖啡（杯）	收入總金額（元）
第 1 天	60	80	50	12900
第 2 天	30	40	30	6850
第 3 天	50	70	40	10800

GhatCHA

TGPT 回

答

第三步：式 (4) \times 1 - 式 (5) \times 2

$$\begin{aligned} (30x + 40y + 20z) - 2(20x + 30y + 10z) &= 6050 - 2(3950) \\ 30x + 40y + 20z - 40x - 60y - 20z &= 6050 - 7900 \\ -10x - 20y &= -1850 \Rightarrow x + 2y = 185 \end{aligned} \quad (6)$$

第四步：用 (6) 代入式 (4)

$$\begin{aligned} 30x + 40y + 20z &= 6050 \\ \Rightarrow 30(x + 2y) + 20z &= 6050 \Rightarrow 30(185) + 20z = 6050 \\ 5550 + 20z &= 6050 \Rightarrow 20z = 500 \Rightarrow z = 25 \end{aligned}$$

錯誤形式
分析

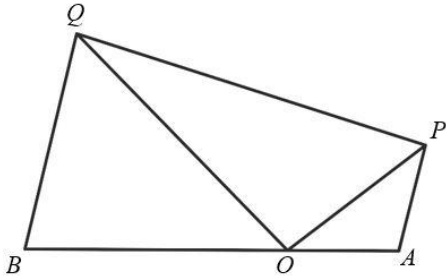
選填題第 13 題，ChatGPT 在代入消去的計算過程中化簡錯誤，它想透過第(6)式的 $x + 2y = 185$ 代入第(4)式的 $30x + 40y + 20z = 6050$ 作代換，但推論的過程中沒有計算正確，因此屬於推論不完整的錯誤。

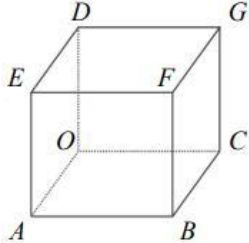
題號

112 學測第 16 題

<p>題目</p>	<p>16. 令 $E: x+z=2$ 為坐標空間中過三點 $A(2,-1,0)$、$B(0,1,2)$、$C(-2,1,4)$ 的平面。另有一點 P 在平面 $z=1$ 上且其於 E 之投影點與 A、B、C 三點等距離。則點 P 與平面 E 的距離為_____。(化為最簡根式)</p>
<p>GhatCHA TGPT 回 答</p>	<p>✅ 第二步：找三角形 ABC 的外心 G</p> <p>我們將 A, B, C 三點投影到平面 $E: x+z=2$。因為它們本來就在這個平面上，所以不用變動。</p> <p>三角形外心在空間中不易直觀，但可以：</p> <ul style="list-style-type: none"> 利用對稱與觀察發現： <p>$A(2, -1, 0)$、$B(0, 1, 2)$、$C(-2, 1, 4)$ 皆符合 $x+z=2$</p> <p>且觀察可得：它們 x、z 差距是成比例的：</p> <ul style="list-style-type: none"> A 的 $x=2$、$z=0 \rightarrow x+z=2$ B：$x=0$，$z=2$ C：$x=-2$，$z=4$ <p>得出一個規則：它們在平面內呈直線分布。故外心會在線段 AB 與 AC 所圍的平面中心位置 \Rightarrow 利用對稱法求得外心座標為：</p> $G = (0, 1, 2)$ <p>(這是 B 點座標，也確實為外心)</p>
<p>錯誤形式 分析</p>	<p>選填題第 16 題，ChatGPT 臆造對稱法求空間中三角形的外心，事實上外心為 $P(-3, -4, 1)$，此為推理不完整的錯誤。</p>


題號	112 學測第 17 題
題目	<p>17. 坐標空間中有兩不相交直線 $L_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$, t 為實數、$L_2: \begin{cases} x=2+2s \\ y=5+s \\ z=6-s \end{cases}$, s 為實數, 另一直線 L_3 與 L_1、L_2 皆相交且垂直。若 P、Q 兩點分別在 L_1、L_2 上且與 L_3 之距離皆為 3, 則 P、Q 兩點的距離為_____。(化為最簡根式)</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>✓ Step 1 : 找兩點表示 P, Q</p> <p>設 :</p> <ul style="list-style-type: none"> P 在 L_1 : 令參數 $t = a$. 則 $P = (1 + a, 1 - a, 2 + a)$ Q 在 L_2 : 令參數 $s = b$. 則 $Q = (2 + 2b, 5 + b, 6 - b)$ <hr/> <p>✓ Step 2 : 向量 $\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$</p> $\vec{PQ} = \langle (2 + 2b) - (1 + a), (5 + b) - (1 - a), (6 - b) - (2 + a) \rangle$ <p>整理 :</p> $\vec{PQ} = \langle 1 + 2b - a, 4 + b + a, 4 - b - a \rangle$ <hr/> <p>✓ Step 3 : $\vec{PQ} \perp \vec{v}_1, \vec{v}_2$</p> <p>因為 L_3 是與 L_1, L_2 都垂直的公垂線 \Rightarrow</p> $\vec{PQ} \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad \vec{PQ} \cdot \vec{v}_2 = 0$ <p>代入計算內積 :</p> $\vec{v}_1 = \langle 1, -1, 1 \rangle \Rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{v}_1 = (1 + 2b - a)(1) + (4 + b + a)(-1) + (4 - b - a)(1)$
錯誤形式 分析	<p>此題發生推論不完整的錯誤, ChatGPT 利用參數式表示 P, Q, 但忽略 P, Q 與 L_3 的距離皆為 3, 而計算出的是 L_1 和 L_2 的最短距離。</p>

題號	112 學測第 18~20 題
題目	<p>坐標平面上 O 為原點，給定 $A(1,0)$、$B(-2,0)$ 兩點。另有兩點 P、Q 在上半平面，且滿足 $\overline{AP} = \overline{OA}$、$\overline{BQ} = \overline{OB}$、$\angle POQ$ 為直角，如圖所示。令 $\angle AOP = \theta$。根據上述，試回答下列問題。</p>  <p>18. 線段 \overline{OP} 長為下列哪一選項？（單選題，3 分） (1) $\sin \theta$ (2) $\cos \theta$ (3) $2\sin \theta$ (4) $2\cos \theta$ (5) $\cos 2\theta$</p> <p>19. 若 $\sin \theta = \frac{3}{5}$，試求點 Q 的坐標，並說明 $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$。（非選擇題，6 分）</p> <p>20.（承 19 題）試求點 A 到直線 BQ 的距離，並求四邊形 $PABQ$ 的面積。（非選擇題，6 分）</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>✓ 題幹重點整理：</p> <ul style="list-style-type: none"> • O 是原點 • $A = (1,0)$、$B = (-2,0)$ • $\overline{AP} = \overline{OA} \Rightarrow P$ 是點 A 對稱於原點後的延伸點 $\Rightarrow \overline{OP} = \overline{OA}$ • 同理 $\overline{BQ} = \overline{OB} \Rightarrow \overline{OQ} = \overline{OB}$ • $\angle POQ = 90^\circ$ (直角) • P, Q 位於上半平面 • 設 $\angle AOP = \theta$
錯誤形式 分析	<p>此題混合題組題幹有圖形相關訊息且有附圖，ChatGPT 在題目的解讀發生錯誤，將線段讀取成向量。</p>

題號	113 學測第 2 題
題目	<p>2. 如圖，$OABC-DEFG$ 為一正方體，試問向量外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$ 與下列哪一個向量平行？</p> <p>(1) \vec{AE} (2) \vec{BE} (3) \vec{CE} (4) \vec{DE} (5) \vec{OE}</p> 
GhatCHA TGPT 回 答	<p>根據立方體座標建立如下（邊長設為 1）：</p> <ul style="list-style-type: none"> • $O = (0, 0, 0)$ • $A = (0, 0, 0)$ • $B = (1, 0, 0)$ • $C = (1, 1, 0)$ • $D = (0, 1, 0)$ • $E = (0, 0, 1)$ • $F = (1, 0, 1)$ • $G = (1, 1, 1)$ <p>✓ 計算向量：</p> <ol style="list-style-type: none"> $\vec{AD} = \vec{D} - \vec{A} = (0, 1, 0)$ $\vec{AG} = \vec{G} - \vec{A} = (1, 1, 1)$ <p>📏 向量外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$</p> $\vec{AD} \times \vec{AG} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - \hat{j}(0 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + \hat{k}(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = \hat{i} - \hat{k} \Rightarrow \vec{v} = (1, 0, -1)$
錯誤形式 分析	<p>此題在圖形解讀上發生錯誤，題目為 $OABC-DEFG$ 之正方體，ChatGPT 將其位在左下角的 A 設為原點，同時也將數學上習慣的原點 O 定義為坐標 $(0,0,0)$。因為有兩個原點，ChatGPT 將 B, D 假設在 x, y 軸上，所以頂點的相對位置也錯誤，因此坐標也假設錯誤。</p>

題號	113 學測第 5 題
題目	<p>5. 將 1 到 50 這 50 個正整數平分成甲乙兩組，每組各 25 個數，使得甲組的中位數比乙組的中位數小 1。試問共有幾種分法？</p> <p>(1) C_{25}^{50} (2) C_{24}^{48} (3) C_{12}^{24} (4) $(C_{12}^{24})^2$ (5) $C_{24}^{48} \cdot C_{12}^{24}$</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>我們現在進行 步驟 1：解題，這是一題屬於組合與中位數結合的邏輯題，讓我們逐步拆解。</p> <hr/> <p>✓ 題目解析</p> <ul style="list-style-type: none"> 將 1 到 50 (共 50 個整數) 平均分成甲、乙兩組，每組 25 個數字。 要求：甲組的中位數 < 乙組的中位數 問：有多少種分法符合這個條件？ <hr/> <p>* 中位數的觀察重點</p> <ul style="list-style-type: none"> 25 個數字的中位數是「第 13 小的數」 所以我們只要確保：甲組的第 13 小數 < 乙組的第 13 小數 <hr/> <p>✓ 解題核心策略</p> <p>✦ Step 1：固定中位數位置</p> <p>將 50 個數中任選 25 個為甲組，其餘為乙組 → 一共有：</p> $\binom{50}{25}$
錯誤形式 分析	<p>此題 ChatGPT 遺漏了解題條件：「甲組的中位數比乙組的中位數小 1」，而這也是此題的關鍵隱含條件，因此發生了解題推理不完整的的解題錯誤。</p>



題號	113 學測第 7 題
題目	<p>7. 令坐標平面上滿足 $y = \log x$ 的點 (x, y) 所成圖形為 Γ，試問滿足下列哪些關係式的 (x, y) 所成圖形與 Γ 完全相同？</p> <p>(1) $y + \frac{1}{2} = \log(5x)$</p> <p>(2) $2y = \log(x^2)$</p> <p>(3) $3y = \log(x^3)$</p> <p>(4) $x = 10^y$</p> <p>(5) $x^3 = 10^{(y^3)}$</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>(2) $2y = \log(x^2)$ 右邊展開：$\log(x^2) = 2 \log x$</p> <p>所以：</p> $2y = 2 \log x \Rightarrow y = \log x$ <p><input checked="" type="checkbox"/> 完全相同！</p> <p>(5) $x^3 = 10^{3y}$ 兩邊取對數（以 10 為底）： $\log(x^3) = 3y \Rightarrow 3 \log x = 3y \Rightarrow y = \log x$</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> 也是完全相同</p>
錯誤形式 分析	<p>第 7 題在選項(2)未考慮對數的定義域，在真數有平方時，把平方提出成對數的倍數時，真數的 x 要加絕對值，確保對數有意義，因此發生解題推理不完整的錯誤。</p> <p>同時，也發生選項(5)的題目解讀錯誤，可能的原因是指數式次方的位置判讀錯誤，因此錯解選項(5)。</p>

題號	113 學測第 9 題
題目	<p>9. 某實驗室蒐集了大量的 A、B 兩相似物種，記錄其身長為 x (單位：公分) 與體重 y (單位：公克)，得 A、B 兩物種的平均身長分別為 $\bar{x}_A = 5.2$、$\bar{x}_B = 6$，標準差分別為 0.3、0.1。令 A、B 兩物種的平均體重分別為 \bar{y}_A、\bar{y}_B。若 A、B 兩物種其體重 y 對身長 x 的迴歸直線分別為 $L_A: y = 2x - 0.6$、$L_B: y = 1.5x + 0.4$，相關係數分別為 0.6、0.3。今發現一隻身長 5.6 公分、體重 8.6 公克的個體 P，試選出正確的選項。</p> <p>(1) $\bar{y}_A < \bar{y}_B$</p> <p>(2) A 物種的體重標準差小於 B 物種的體重標準差</p> <p>(3) 就 A 物種而言，個體 P 的體重與平均體重 \bar{y}_A 之差的絕對值大於一個標準差</p> <p>(4) 點 (5.6, 8.6) 到直線 L_A 的距離小於其到直線 L_B 的距離</p> <p>(5) 點 (5.6, 8.6) 與點 (\bar{x}_A, \bar{y}_A) 的距離小於其與點 (\bar{x}_B, \bar{y}_B) 的距離</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p> 題目重點整理：</p> <p>已知：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 兩種物種 A、B • x：身長 (公分) • y：體重 (公克) • A、B 的身長平均值與標準差為： <ul style="list-style-type: none"> • A：$\bar{x}_A = 5.2$, $\sigma_A = 0.3$ • B：$\bar{x}_B = 5.2$, $\sigma_B = 0.6$ • A、B 的體重平均值為： <ul style="list-style-type: none"> • $\bar{y}_A = 6$, $\bar{y}_B = 8$ • A、B 各自的「體重對身長的迴歸線」為： <ul style="list-style-type: none"> • A：$L_A: y = 2x - 0.6$ • B：$L_B: y = 1.5x + 0.4$ • $r_A = 0.6$, $r_B = 0.3$
錯誤形式 分析	<p>多選題第 9 題的題目解讀錯誤，正確的數據為平均身長 $\bar{x}_A = 5.2$、$\bar{x}_B = 6$ 和 B 物種的身高標準差為 0.1，而 ChatGPT 生成錯誤數據為 $\bar{x}_B = 5.2$ 和 $\sigma_B = 0.6$，同時也自行編造體重平均數據，而體重平均需要透過迴歸直線計算才可得出。</p>

題號	113 學測第 10 題
題目	<p>10. 坐標平面上有一正方形與一正六邊形，正方形在正六邊形的右邊。已知兩正多邊形都有一邊在 x 軸上，且正方形中心 A 與正六邊形中心 B 都在 x 軸的上方，且兩多邊形恰有一個交點 P，又知正方形的邊長為 6，而點 P 到 x 軸的距離為 $2\sqrt{3}$。試選出正確的選項。</p> <p>(1) 點 A 到 x 軸的距離大於點 B 到 x 軸的距離 (2) 正六邊形的邊長為 6 (3) $\vec{BA} = (7, 3 - 2\sqrt{3})$ (4) $\overline{AP} > \sqrt{10}$ (5) 直線 AP 斜率大於 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$</p>
GhatCHA TGPT 回答	<p>(4) $AP > \sqrt{10}$?</p> <ul style="list-style-type: none"> • $A = (7, 3)$ • P 的高度為 $2\sqrt{3} \approx 3.464$，但其 x-座標未確定 <p>假設 P 與 A 重疊 x-軸方向 (最小距離) :</p> $AP = 3 - 2\sqrt{3} \approx 3 - 3.464 = 0.464 < \sqrt{10} \approx 3.16$ <p>其他情況只會拉遠水平距離 \Rightarrow 使距離更大</p> <p>但題目僅給 P 到 x 軸距離 \Rightarrow 若 A 與 P 高度不同，則其垂直距離為 $3 - 2\sqrt{3} \approx 0.464$，要大於 $\sqrt{10}$ 就要 x-座標相距大於約 3.1</p> <p>但題目未給明確 x 差 \Rightarrow 無法保證距離 $> \sqrt{10}$</p> <p>🔵 結論：無法確定是否大於</p> <p>✗ (4) 錯</p> <p>(5) 直線 AP 斜率大於 $\frac{1}{\sqrt{3}}$?</p> <ul style="list-style-type: none"> • $A = (7, 3)$ • P 的 $y = 2\sqrt{3} \approx 3.464$ <p>設 $x_P = x$，則斜率：</p> $m = \frac{3.464 - 3}{x - 7} = \frac{0.464}{x - 7}$ <ul style="list-style-type: none"> • 若 $x > 7$：斜率正，小於 1 • 若 $x = 7$：垂直線 (斜率無限大) \Rightarrow 大於 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ • 若 $x < 7$：斜率為負 \Rightarrow 不滿足 <p>因此，只有當 x 非常接近 7 時，斜率很大</p> <p>但沒有給出 P 的 x，無法判定是否一定大於 $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$</p> <p>🔵 結論：資訊不足，不能確定</p> <p>✗ (5) 錯</p>
錯誤形式 分析	<p>此題 ChatGPT 發生推理不完整錯誤，它可以從題目敘述知道 P 點的 y 坐標，但沒有透過「兩多邊形恰有一個交點 P」來理解 A 和 P 的相對位置，因此認為題目資訊不足，推論產生錯誤導致無法正確解題。</p>

題號	113 學測第 11 題
題目	<p>11. 考慮二元一次方程組 $\begin{cases} ax+6y=6 \\ x+by=1 \end{cases}$，其係數 a, b 之值分別由投擲一顆公正骰子與一枚均勻硬幣來決定。令 a 值為骰子出現之點數；若硬幣出現正面時 b 值為 1，若硬幣出現反面時 b 值為 2。試選出正確的選項。</p> <p>(1) 擲出 $a=b$ 的機率為 $\frac{1}{3}$</p> <p>(2) 此方程組無解的機率為 $\frac{1}{12}$</p> <p>(3) 此方程組有唯一解的機率為 $\frac{5}{6}$</p> <p>(4) 硬幣出現反面且此方程組有解的機率為 $\frac{1}{2}$</p> <p>(5) 在硬幣出現反面且此方程組有解的條件下，x 值為正的機率為 $\frac{2}{5}$</p>
GhatCHA TGPT 回 答	<p>(2) 方程組無解的機率為 $\frac{1}{12}$?</p> <p>我們先找出使方程組無解 (或無限多解) 的條件是 $ab = 6$</p> <p>列出 $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, b \in \{1, 2\}$，哪幾組會使 $ab = 6$?</p> <ul style="list-style-type: none"> • $(a, b) = (6, 1) \rightarrow ab = 6$ • $(a, b) = (3, 2) \rightarrow ab = 6$ <p>\Rightarrow 共 2 組滿足 \Rightarrow 機率為：</p> $\frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}} \neq \frac{1}{12}$ <p>✗ 錯誤</p> <p>(4) 硬幣出現正面且此方程組有解的機率為 $\frac{1}{2}$?</p> <p>硬幣正面 $\Rightarrow b = 1$</p> <ul style="list-style-type: none"> • 正面出現的機率：$\frac{1}{2}$ • 此時 $b = 1$，要使有解需 $a \neq 6$，因為： $ab - 6 = a(1) - 6 \neq 0 \Rightarrow a \neq 6$ <p>在 $b = 1$ 時：</p> <ul style="list-style-type: none"> • $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ • 唯一導致 $ab = 6$ 的是 $a = 6$ <p>\Rightarrow 有解的機率 (在 $b = 1$ 條件下) 是 $\frac{5}{6}$</p> <p>故聯合機率：</p> $P(\text{正面且 } ab \neq 6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12} \neq \frac{1}{2}$
錯誤形式 分析	<p>多選題第 11 題，選項(2)中 ChatGPT 有正確使用到克拉馬公式得出 $\Delta = 0$ 時方程組會無解或無限多解，並推出 $ab = 6$ 的條件，但它沒有進一步判斷其中無解的條件，因此算出的機率是包含無限多解的情形，發生推理不完整的錯誤。</p> <p>同時選項(4)的選項發生題目讀取錯誤。</p>

題號	113 學測第 12 題
題目	<p>12. 在坐標平面上給定三點 $A(1,0)$、$B(0,1)$、$C(-1,0)$，令 Γ 為 $\triangle ABC$ 經矩陣 $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ 變換後的圖形，其中 a 為實數。試選出正確的選項。</p> <p>(1) 若 $a=0$，則 Γ 為等腰直角三角形</p> <p>(2) $\triangle ABC$ 的邊上至少有兩點經 T 變換後坐標不變</p> <p>(3) Γ 必有部分落在第四象限</p> <p>(4) 平面上找得到一個圖形 Ω 經 T 變換後為 $\triangle ABC$</p> <p>(5) Γ 的面積為定值</p>
GhatCHA TGPT 回答	<p>(2) $\triangle ABC$ 的邊上至少有兩點經 T 變換後座標不變？</p> <p>從上面變換可知，所有點都有座標改變，因：</p> <ul style="list-style-type: none"> • 矩陣 T 不是單位矩陣 • 除非 $x = y = 0$，否則座標皆會改變 <p>特別是：</p> <ul style="list-style-type: none"> • $T(1,0) = (3, a) \neq (1, 0)$ • $T(0,1) = (0, 1)$ ← 只有 B 座標沒變 (若 $a \neq 0$ 不重要) <p>→ 只有 B 保持不變</p> <p>✗ 錯誤</p>
錯誤形式 分析	<p>在多選題第 12 題中，ChatGPT 先將 A, B, C 三點經過 T 的線性變換，選項(2)時僅判斷此三點變換的情形則說明所有點坐標都有改變，有考慮到(0,0)的情形卻忽略了，但再次計算後發現只有 B 保持不變，這是推理不完整的錯誤。</p>

題號	113 學測第 14 題
題目	<p>14. 已知 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 皆為實係數三次多項式，且除以 $x^2 - 2x + 3$ 的餘式分別為 $x+1$、$x-3$、-2。若 $xf(x) + ag(x) + bh(x)$ 可以被 $x^2 - 2x + 3$ 整除，其中 a, b 為實數，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$，$b = \underline{\hspace{2cm}}$。</p>
<p>GhatCHA TGPT 回 答</p>	<p> 題目要求：</p> <p>設 $yf(x) + ag(x) + bh(x)$ 可被 $x^2 - 2x + 3$ 整除 \Rightarrow 意思是「這個多項式對 $x^2 - 2x + 3$ 的餘式為 0」</p> <p>所以我們計算它的餘式為：</p> $\text{餘式} = y(x + 1) + a(x - 3) + b(-2)$ <p>這是三個一次多項式的線性組合。</p> <hr/> <p> 將餘式展開整理：</p> $y(x + 1) + a(x - 3) + b(-2) = (y + a)x + (y - 3a - 2b)$ <p>我們希望整除 \Rightarrow 餘式為 0 \Rightarrow 係數都為 0</p> $\begin{cases} y + a = 0 \\ y - 3a - 2b = 0 \end{cases}$
錯誤形式 分析	<p>選填題第 14 題是題目解讀的錯誤，將題目中的多項式 $xf(x) + ag(x) + bh(x)$ 錯誤讀取為 $yf(x) + ag(x) + bh(x)$。</p>

題號	113 學測第 16 題
題目	16. 坐標平面上，已知向量 \vec{v} 在向量 $(2, -3)$ 方向的正射影長比原長少 1，而在向量 $(3, 2)$ 方向的正射影長比原長少 2。若 \vec{v} 與兩向量 $(2, -3), (3, 2)$ 的夾角皆為銳角，則 \vec{v} 在向量 $(4, 7)$ 方向的正射影長為_____。(化為最簡根式)
GhatCHA TGPT 回 答	<p> 解聯立方程式</p> <p>令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$</p> <p>從 (1) 式得：</p> $2x - 3y = \sqrt{13}(r - 1)$ <p>從 (2) 式得：</p> $3x + 2y = \sqrt{13}(r - 2)$ <p>代入剛剛求出的 x 和 y：</p> $x = \frac{\sqrt{13}(5r - 8)}{13}, \quad y = \frac{-\sqrt{13}(r + 1)}{13}$ $4x + 7y = \frac{\sqrt{13}}{13} [4(5r - 8) + 7(-r - 1)] = \frac{\sqrt{13}}{13} [20r - 32 - 7r - 7] = \frac{\sqrt{13}}{13} (13r - 39)$ <hr/> <p>最後：</p> $\text{投影長} = \frac{4x + 7y}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{13}(13r - 39)}{13\sqrt{65}} = \frac{(13r - 39)}{\sqrt{65}}$ <hr/> <p><input checked="" type="checkbox"/> 最終答案：</p> $\boxed{\frac{13r - 39}{\sqrt{65}}}$ <p>其中 $r = \vec{v}$ 為向量長，但因本題已經將答案表示為「最簡根式」，若要求具體值，可進一步化簡（不要求的話保持式子即可）。</p>
錯誤形式 分析	選填題第 16 題，ChatGPT 發生根式化簡的計算錯誤，同時尚未將最終答案完整算出， r 是其自行假設的符號代表向量之長度，但並沒有解出分量 x, y 的值代入，此為推理不完整之錯誤。

題號	113 學測第 17 題
題目	17. 坐標平面上，在以 $O(0,0), A(0,1), B(1,1), C(1,0)$ 為頂點的正方形（含邊界）內，令 R 為滿足下述條件的點 $P(x,y)$ 所成區域：與點 $P(x,y)$ 的距離為 $ x-y $ 之所有點所成圖形完全落在正方形 $OABC$ （含邊界）內。則區域 R 的面積為_____。（化為最簡分數）
GhatCHA TGPT 回 答	<p>Case 1 : $x \geq y \Rightarrow r = x - y$</p> <p>條件為：</p> $\begin{cases} x - (x - y) = y \geq 0 \\ x + (x - y) = 2x - y \leq 1 \\ y - (x - y) = 2y - x \geq 0 \\ y + (x - y) = x \leq 1 \end{cases}$ <p>整理得：</p> $\begin{cases} y \geq 0 \\ 2x - y \leq 1 \\ 2y - x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \quad \text{且 } x \geq y$ <hr/> <p><input checked="" type="checkbox"/> 用這些不等式描述區域（在 $x \geq y$ 範圍）</p> <p>畫在單位正方形中，實際形成一個四邊形</p> <p>邊界由四條直線構成：</p> <ol style="list-style-type: none"> $y = 0$ $x = 1$ $2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1$ $2y - x = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2}$ <p>交於四點（逐一代入計算）：</p> <ul style="list-style-type: none"> 點 1：點 $x = 0.5$ 代入 $y = 0$ 點 2：交點 $y = \frac{x}{2}$ 與 $y = 2x - 1 \Rightarrow$ 解聯立得： $\frac{x}{2} = 2x - 1 \Rightarrow 4x - x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}$ 點 3：交點 $x = 1$ 與 $y = 2x - 1 \Rightarrow y = 1$ 點 4：交點 $x = 1$ 與 $y = \frac{x}{2} \Rightarrow y = 0.5$ <p>頂點依序為：</p> <ul style="list-style-type: none"> $(0.5, 0)$ $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ $(1, 1)$ $(1, 0.5)$
錯誤形式 分析	ChatGPT 能夠正確判讀此題意，利用正方形邊界列出 P 點坐標符合的聯立不等式，但在描述解區域時認為是四條直線的交點所構成的四邊形，實際上正確的解區域圖形是由 $(0,0)$ 、 $(1,1)$ 、 $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ 所構成的三角形，因此對於圖形的解讀發生錯誤。

題號	113 學測第 20 題
題目	20. 承 19 題，已知點 P 在平面 E 上且 $b=0$ 。試求 c 的最大可能範圍，並求線段 \overline{OP} 的最小可能長度。(非選擇題，8 分)
GhatCHA TGPT 回 答	<p> ✔ 第二問：求 $\vec{OP} = \sqrt{a^2 + c^2}$ 的最小值 </p> <p>記得：</p> <ul style="list-style-type: none"> $a = c + 4$ 所以： $ \vec{OP} ^2 = a^2 + c^2 = (c + 4)^2 + c^2 = c^2 + 8c + 16 + c^2 = 2c^2 + 8c + 16$ <p>這是一個平方函數 $f(c) = 2c^2 + 8c + 16$ 在範圍 $[2 - 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}]$ 中找最小值</p> <hr/> <p> 🔍 計算頂點 </p> <p>對二次函數 $f(c) = 2c^2 + 8c + 16$ 極小值點：</p> $c = -\frac{8}{2 \cdot 2} = -2$ <p>我們確認：$-2 \in [2 - 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}]$</p> <ul style="list-style-type: none"> $2 - 2\sqrt{3} \approx 2 - 3.464 = -1.464$ $2 + 2\sqrt{3} \approx 5.464$ <p> ✔ 所以 $c = -2$ 在允許範圍內 </p> <ul style="list-style-type: none"> $a = c + 4 = 2$ $\vec{OP} ^2 = a^2 + c^2 = 4 + 4 = 8$ 所以最小長度： <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\vec{OP} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ </div>
錯誤形式 分析	第 20 題有正確求出 c 的最大可能範圍，在求 \overline{OP} 線段的最小可能長度時轉化問題為求二次函數在限制範圍的最小值，但 ChatGPT 誤判頂點有在限制範圍內，所以將其視為最小值發生的位置，因此產生推理不完整的錯誤。