

第肆章 分析與討論

本章根據蒐集到的資料配合本研究的「研究問題」分別討論了：第一節「學生變數概念層次的改變」；第二節「變數概念測驗結果分析與討論」；第三節「學生線型函數概念層次的改變」；第四節「線型函數概念測驗結果分析與討論」；第五節「線型函數概念的發展對變數概念層次發展的影響」。

第一節 學生變數概念層次的改變

利用自行設計的「變數概念測驗」在線型函數單元學習前和學習後，分別進行前測與後測，以探討學生變數概念層次改變的情形。

一、「變數概念測驗」前、後測施測通過個別層次分析

此處所謂個別層次的通過是指，對於內化、壓縮、物化三個層次，個別依照 CSMS 的分析方法（郭汾派等，民 78），如果答對某一層次內問題的三分之二以上，則為通過此一層次（Guttman Scalegram analysis），本研究的設定則為答對率必須達 70% 以上才算通過該層次。但因各層次題數的不同，答對率的設定也跟著稍有不同，變數概念測驗內化層次有 15 題而 $15 \times 70\% = 10.5$ 題，因此以題數而言，本研究設定答對 11 題以上方為通過內化層次，換算成百分比則為 73.3%；壓縮層次有 15 題而 $15 \times 70\% = 10.5$ 題，因此以題數而言，本研究設定答對 11 題以上方為通過壓縮層次，換算成百分比則為 73.3% 以上；物化層次有 10 題而 $10 \times 70\% = 7$ 題，因此以題數而言，本研究設定答對 7 題以上方為通過物化層次，換算成百分比則為 70% 以上。表 4-1 為依此標準所評量學生通過「變數概念測驗」各個層次的人數及百分比。

【表 4-1 變數概念測驗前、後測通過各個層次，調整前人數統計表】

	變數概念測驗前測			變數概念測驗後測		
	內化	壓縮	物化	內化	壓縮	物化
受測人數	590	590	590	602	602	602
通過人數	490	360	97	498	395	126
通過百分率	83.1 %	61.0 %	16.4 %	82.7 %	65.6 %	20.9 %

變數概念測驗前測有 83.1 % 的學生達到內化的層次，到了後測有 82.7 % 的學生達到內化的層次，施測的結果略為下降。前測有 61.0 % 的學生達到壓縮的層次，到了後測有 65.6 % 的學生達到壓縮的層次，施測的結果略為上升。前測有 16.4 % 的學生達到物化的層次，到了後測有 20.9 % 的學生達到物化的層次，施測的結果略為上升。

因為前、後測的施測人數不一，無法了解施測結果增減的確實原因，為了控制變因及了解前測、後測學生通過各個層次學生個人的改變情形，只將四次測驗都沒有缺考的學生資料納入比較。表 4-2 為依此標準所評量學生通過「變數概念測驗」各個層次的人數及百分比。

【表 4-2 變數概念測驗前、後測通過各個層次，調整後人數統計表】

	變數概念測驗前測			變數概念測驗後測		
	內化	壓縮	物化	內化	壓縮	物化
統計人數	564	564	564	564	564	564
通過人數	474	351	96	475	385	124
通過百分率	84.0 %	62.2 %	17.0 %	84.2 %	68.3 %	22.0 %

調整後，前測有 84.0 % 的學生達到內化的層次，到了後測有 84.2 % 的學生達到內化的層次。前測有 62.2 % 的學生達到壓縮的層次，到了後測有 68.3 % 的學生達到壓縮的層次。前測有 17.0 % 的學生達到物化的題目，到了後測有 22.0 % 的學生達到物化的層次。

二、「變數概念測驗」施測結果的層次安置分析

依 CSMS 層次的診斷方法（郭汾派等，民 78）是以學生的最高層次表現，

且必須通過之前的低層次才算達到該層次，否則為錯誤樣本，但錯誤樣本不能超過 7%。本節的層次安置即是依 CSMS 的辦法處理，錯誤樣本前測共有 9 人，後測共有 2 人，因此本測驗前測的錯誤樣本比例為 1.6%，後測的錯誤樣本比例為 0.4%，皆未超過 7% 符合 CSMS 的標準。表 4-3 為依此標準將學生的概念層次安置於「變數概念測驗」各個層次的人數及百分比。

【表 4-3 變數概念測驗前、後測層次安置人數統計表】

	變數概念測驗前測				變數概念測驗後測			
	內化前	內化	壓縮	物化	內化前	內化	壓縮	物化
受測人數	590	590	590	590	602	602	602	602
統計人數	564	564	564	564	564	564	564	564
該層次人數	86	122	256	91	87	92	259	120
該層次百分	15.2 %	21.6 %	45.4 %	16.1 %	15.4 %	16.3 %	45.9 %	21.3 %
錯誤樣本	9				2			

三、變數概念層次的改變情形

表 4-4 是根據表 4-3，剔除缺考人數及錯誤樣本之後所得到的，前、後測通過各個層次改變人數對照表：

【表 4-4 變數概念測驗前、後測通過各個層次改變人數對照表】

變數概念測驗前測 概念層次人數(人)		內化前	內化	壓縮	物化	總計
變數概念 測驗後測 概念層次 人數(人)	內化前	66	19	0	0	85
	內化	14	57	18	1	90
	壓縮	3	41	187	24	255
	物化	2	4	51	66	123
	總計	85	121	256	91	553
層次降低人數		0	19	18	25	62
層次未變人數		66	57	187	66	376
層次提升人數		19	45	51	0	115

至於前測各層次的學生，到了後測時如何改變，從表 4-4 可以看出：

(一) 前測在「層次內化前」

共有 85 人，到了後測時：

層次提升的人數有 19 人，佔前測層次內化前人數的 22.35 %。

集中在提升到內化層次，佔前測層次內化前人數的 16.47 % ；

層次提升到壓縮和物化層次的人數分別僅佔 3.53 % 和 2.35 %。

因為內化前已經是最低層次，所以無人層次降低。

(二) 前測在「內化層次」

共有 121 人，到了後測時：

層次提升人數有 45 人，佔前測內化層次人數的 37.19 %。

集中在提升到壓縮層次，佔前測內化層次人數的 33.88 % ；

提升到物化層次的人數僅佔 3.31 %。

層次降低人數有 19 人，佔前測內化層次人數的 15.70 %。

(三) 前測在「壓縮層次」

共有 256 人，到了後測時：

層次提升到物化層次的人數有 51 人，佔前測壓縮層次人數的 19.92 % ；

層次降低的人數有 18 人，佔前測壓縮層次人數的 7.03 % ，

層次降低的人都是降低到內化層次，沒有人降到層次內化前。

(四) 前測在「物化層次」

共有 91 人，到了後測時：

因為已經是最高層次，所以無人層次提升；

層次降低的人數有 25 人，佔前測物化層次人數的 27.5 %。

層次降低到壓縮層次，佔前測物化層次人數的 26.37 % ；

層次降低到內化層次的人數僅佔 1.10 %，沒有人降到層次內化前。

(五) 層次提升的人數比率在層次內化前、內化、壓縮都有顯著的增加，層次降低在層次內化、壓縮、物化也都有發生。那麼到底學生在變數概念的前、後測之間，發展層次是否有顯著的改變，利用包卡爾對稱性考驗 (Bowker's test of symmetry) (林清山，民 81) 來檢驗，虛無假設 $H_0: P_{ij}=P_{ji} (i < j)$ ，其中 P_{ij} 的 i 、 j 分別代表變數概念測驗前、後測之層次的行數及列數，得 $\chi^2=27.7365$ ， $df=6$ ，大於查表的 $\chi^2_{.99(6)}=16.812$ ，所以我們拒絕 $H_0: P_{ij}=P_{ji}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念層次的改變達到統計上 $\alpha=.01$ 的顯著水準。以總數而言層次提升的總人數有 115 人，層次降低的總人數有 62 人，因此可以說明在經過線型函數單元的教學之後，學生變數概念的成長有較正面的影響。

第二節 變數概念測驗結果分析與討論

本節分成三個部分，在第一部分主要探討學生變數概念的錯誤類型，並且針對學生在變數概念的前、後測之間，每題「答對率」的增減是否有顯著的改變，利用採用麥內瑪考驗（McNemar test）（林清山，民 81）來檢驗。虛無假設 $H_0: P_{12}=P_{21}$ ，其中 P_{12} 代表前測答案正確且後測答案不正確的人數， P_{21} 代表前測答案不正確且後測答案正確的人數。在第二部分以空白率探討學生答題意願的改變情形。第三部分則是探討學生對不同形式空格的看法。

一、學生變數概念的錯誤類型與變數概念答對率的改變情形

以下的分析是根據題目的概念層次，說明各層次（Sfard，1991）的錯誤類型。另一方面根據題目的內容，分別探討答對率在前、後測之間的改變情形，及其代表的意義。

（一）內化層次

我們將內化層次的試題，以變數的特徵來區分，可分成四種題型，以下將學生的答題情形分開說明。

變數特徵 1：能完成具有某種規則的數列

對應的題號分別是第一大題第 1 題中的第 1、2、3 小題（請參閱附錄一、附錄二）。題目中的規則是，每一項都是單一變因的數列。包括遞增的等差數列、遞減的等差數列和完全平方數所組成的數列。各題的答對人數和答對率見表 4-5。

【表 4-5 變數概念內化層次各題答對率一覽表（1）】

題號	第 1 1 小題		第 1 2 小題		第 1 3 小題	
	前測	後測	前測	後測	前測	後測
答對人數（人）	552	561	538	554	390	440
答對率（%）	97.872	99.468	95.39	98.227	69.149	78.014

本題型的題目共有 3 小題，從第 1¹ 小題、第 1² 小題兩題整體的答對率，都在九成五以上看來，學生對於這兩題的處理都沒有甚麼問題。至於發生錯誤的學生中，層次內化前的學生的錯誤都是空白，而其他層次學生的錯誤則大多是筆誤。

而第 1³ 小題的內容是遞增的完全平方數數列，學生的答對率低於其他兩小題的答對率，錯誤類型分別敘述如下。

(1) 把此數列當成等差數列處理。

例如：前測時，有學生利用題目的前兩項，求出 1 與 4 的差為 3，再將每個空格前的數字都加 3，求得該空格的數字。

(2) 把此數列當成兩個等差數列處理。

以兩個數為一組，每組的第一個數所成的數列為一個等差數列，第二個數所成的數列也是一個等差數列。

例如：前測時，有學生利用題目兩組相鄰的項分別求差，求出 25 與 16 的差為 9、36 與 25 的差為 11，而後以第一個空格前的數 36 加 9 得到第一個空格的值 45，再以 45 加 11 得到第二個空格的值 56。

(3) 能掌握完全平方數的特徵，但是答案不完全正確。

這種類型的答案多半沒有計算過程，而且只在物化層次的學生的試卷上發現。這些學生雖然有能力將想法以成熟的物件呈現，但是在過程固化成靜態的物件時，因為粗心遺漏了其中的細節。

例如：沒有計算過程，直接將空格的值分別填寫「49, 81」。

另一方面，各題的答對率都是增加的，顯示學生在這一個部分的解題是有正面的發展，經麥內瑪考驗的結果，第 1¹ 小題的 $\chi^2=6.250$ 大於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ 。而且第 1² 小題的 $\chi^2=8.758$ 、第 1³ 小題的 $\chi^2=22.164$ ，兩題 χ^2 的值更大於 $\chi_{.99(1)}^2=6.635$ 。所以我們拒絕 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，線型函數單元學

習前和學習後，學生變數概念「能完成具有某種規則的數列」的「遞增的等差數列」、「遞減的等差數列」、「遞增的完全平方數數列」答對率的增加至少都達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

變數特徵 2：能找出一元、二元一次關係式的解

對應的題號分別是第二大題第 1 題，第四大題第 1 題，第五大題第 1 題（請參閱附錄一、附錄二）。其內容包括解一元一次方程式、求出比例式的一些解和求二元一次方程式的解，各題的答對人數和答對率見表 4-6。

【表 4-6 變數概念內化層次各題答對率一覽表（2）】

題號	第二大題第 1 題		第四大題第 1 題		第五大題第 1 題	
	前測	後測	前測	後測	前測	後測
答對人數（人）	457	471	291	297	428	429
答對率（%）	81.028	83.511	51.596	52.66	75.887	76.064

本題型的題目共有 3 題，其中在「解一元一次方程式」和「求二元一次方程式的解」的部分，學生的答對率約有八成，而「求出比例式的一些解」的部分，學生的答對率約有八成。兩部分的數學內容不完全相同，因此解題策略和錯誤類型將依照題目的不同分別說明。

（1）解一元一次方程式

- a. 解型如 $ax+b=cx+d$ 的一元一次方程式時，內化層次的學生的計算過程，通常有三個步驟，而壓縮或物化層次的學生一般都會省略步驟一或步驟二：

步驟一：移項得到 $ax-cx=d-b$

步驟二：等號兩邊同除 $(a-c)$

步驟三：得到 $x = \frac{d-b}{a-c}$

因此在解題的步驟中，常出現如下的錯誤類型：

- （a）移項時未變號。

例如：前測第二大題第 1 題，進行步驟一之後，”=”右邊原來應該是 $20-10$ ，學生寫成 $20+10$ 。

(b) 誤用指數律。

例如：前測第二大題第 1 題，進行步驟一之後，”=”左邊原來應該是 $x+x$ ，學生將加號當乘號，寫成 x^2 。

(c) 等量公理的使用錯誤。

例如：前測第二大題第 1 題，進行步驟一之後得到「 $2x=10$ 」，進行步驟二時原來應該是等號兩邊同除 2 的算式「 $x=10\div 2$ 」，學生寫成「 $x=10-2$ 」或寫成「 $x=10\times 2$ 」。

b. 代入求值時，代錯未知數。

例如：將應該代入 y 的值，代到 x 的位置。

c. 計算時漏寫了題目中的某項。

例如：移項時漏了題目最右測的「 $-x$ 」，因此寫成「 $x=24-12$ 」。

d. 四則運算錯誤。

例如：「 $3\times(-15)=-35$ 」。

(2) 求出比例式的一些解

a. 不明瞭比例式的意義。

以加法策略策略解題，將比例式的前、後項都逐次加一個定值。

例如：(a) 前測題目出現「 $x:y=3:2$ 」，學生將比例式的前、後項都逐次加 1，答案寫成「 $4:3, 5:4, 6:5$ 」。

(b) 後測題目出現「 $x:y=2:5$ 」，學生將比例式的前、後項都逐次加 2，答案寫成「 $4:7, 6:9, 8:11$ 」。

b. 未能掌握比例式中變數變動的特徵，只寫一組答案。

另一方面，答對率經麥內瑪考驗的結果，第二大題第 1 題的 $\chi^2=3.082$ 、第四大題第 1 題的 $\chi^2=0.559$ ，第五大題第 1 題的 $\chi^2=0.225$ ，都小於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ 。所以我們接受 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生在「能找出一元、二元一次關係式的解」中「解一元一次方程式」、「求出二元一次方程式的一些解」和「求出比例式的一些解」答對率的改變情形未能達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

變數特徵 3：能根據題意完成式子中的空格

對應的題號分別是第二大題第 2 題的第 1 2 3 4 小題，第 4 1 小題（請參閱附錄一、附錄二）。其內容包括平方差公式、完全平方公式和因數分解。各題的答對人數和答對率見表 4-7。

【表 4-7 變數概念內化層次各題答對率一覽表（3）】

題號	第 2 1 小題		第 2 2 小題		第 2 3 小題		第 2 4 小題		第 4 1 小題	
	前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測
前、後測 答對人數 (人)	514	509	461	470	504	507	505	391	455	505
答對率 (%)	91.135	90.248	81.738	83.333	89.362	89.894	89.539	69.326	80.674	89.539

本題型的題目共有 5 小題，針對題目內容、空格數和空格必須填寫的內容，說明如下：

第 2 1 小題內容包含平方差公式，不同的空格，答案必須填寫相同的數字。

第 2 2 小題內容包含平方差公式，不同的空格，答案必須填寫相同的未知數。

第 2 3 小題內容包含完全平方公式，只有一個空格，答案必須填寫數字。

第 2 4 小題內容包含完全平方公式，只有一個空格，答案必須填寫未知數。

第 4 1 小題內容包含因數分解，只有一個空格，答案必須填寫數字。

從大部分题目的答對率都有八成以上（唯一的例外是第二大題第 2.4 小題的後測）來看，學生對這個题目的處理都沒有甚麼問題，少數學生的錯誤多半是除法的計算錯誤所造成的，發生錯誤學生的變數概念層次發展，大都集中在內化前。

學生在處理第二大題第 2 題的四個小題時，只需熟練乘法公式，並能加以運用即可，主要的錯誤類型是層次內化前或內化層次的學生，忘記乘法公式，或是乘法公式的運用時變數的外型變化錯誤所產生的。

(1) 沒有作變數的改變，直接以題目所給的 x^2 項作答。

例如：後測的第 2.4 小題，學生的答案是「 $4x^2$ 」。

(2) x^2 項與數字分開處理，只處理 x^2 項的係數， x^2 都未處理。

例如：後測的第 2.4 小題，學生的答案是「 $2x^2$ 」。

(3) x^2 項與數字分開處理，只處理 x^2 ，係數未處理。

例如：前測試題第 2.2 小題，應該將题目中 x^2 項的係數「9」改變成「 3^2 」，但是學生沒有作，將答案寫成「 $9x, 9x$ 」。

(4) 將文字符號省略：答案中有正確的係數但是缺未知數，這種類型只發生在第 2.2 小題、第 2.4 小題。

例如：後測的第 2.2 小題學生的答案是「3, 3」；第 2.4 小題，學生的答案是「2」。

(5) 認為不同的空格就必須填寫不同的答案。

例如：後測試題第 2.2 小題，學生寫成「 $9x, x$ 」。

另一方面，各題的答對率經麥內瑪考驗的結果，第 2.1 小題的 $\chi^2=0.286$ 、第 2.2 小題的 $\chi^2=1.704$ 、第 2.3 小題的 $\chi^2=0.095$ ，都小於查表的 $\chi^2_{.95(1)}=3.841$ ，所以我們接受 $H_0: P_{12}=P_{21}$ ，換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能根據題意完成式子中的空格」中的：

「內容包含平方差公式，不同的空格，答案必須填寫相同的數字」

「內容包含平方差公式，不同的空格，答案必須填寫相同的未知數」

「內容包含完全平方公式，只有一個空格，答案必須填寫數字」

的改變未能達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。但第 2 4 小題的 $\chi^2=103.910$ ，更大於 $\chi_{.99(1)}^2=6.635$ ，所以我們拒絕 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能根據題意完成式子中的空格」中的「內容包含完全平方公式，只有一個空格，答案必須填寫未知數」答對率的改變達到統計上 $\alpha=.01$ 的顯著水準。

而第 4 1 小題的 $\chi^2=22.915$ ，也大於 $\chi_{.99(1)}^2=6.635$ ，所以我們拒絕 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。

換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能根據題意完成式子中的空格」中的「內容包含因數分解，只有一個空格，答案必須填寫數字」答對率的增加達到統計上 $\alpha=.01$ 的顯著水準。

變數特徵 4：能將多項式的未知數用數字代入求值

對應的題號分別是第三大題第 1 題的第 1 2 3 4 小題（請參閱附錄一、附錄二）。4 個小題的內容都是將數字代入多項式中的未知數。各題的答對人數和答對率見表 4-8。

【表 4-8 變數概念內化層次各題答對率一覽表（4）】

題號	第 1 1 小題		第 1 2 小題		第 1 3 小題		第 1 4 小題	
	前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測
答對人數（人）	516	521	482	503	514	524	469	489
答對率（%）	91.489	92.376	85.461	89.184	91.135	92.908	83.156	86.702

本題型的題目共有 4 小題，學生的答對率都有八成以上，發生錯誤的學生集中在變數概念層次內化前，錯誤類型為：

(1) 直接將值代入計算。

計算程序有誤，沒有作先乘除後加減。

例如：後測時第 1 3 小題先減後乘，錯誤的算式為：「 $2x-1=2\times 3-1=2\times 2=4$ 」。

(2) 先將式子展開再代入求值。

分配律的錯誤使用，也就是說展開時，常數項未乘括號前的數字。

例如：後測時第 1 2 小題，錯誤的算式為：「 $2(2x-1)=4x-1=4-1=3$ 」。

(3) 答案仍具有未知數。

只將括號展開，未作代入求值。

例如：前測時第 1 2 小題，錯誤的算式為：「 $2(2x+1)=4x+2$ 」。

(4) 將某一題錯誤的答案當作次一題的單位值。

此種錯誤類型的特徵是，同時會有兩題答案相關的情形，前一題的答案是自變數，次一題的答案是應變數。

例如：後測時，第 1 3 小題錯誤的算式為「 $2\times 3-1=2\times 2=4$ 」。以第 1 3 小題計算程序有誤的結果，直接代入第 1 4 小題計算，得到第 1 4 小題的算式為「 $-5\times 4=-20$ 」。

另一方面，各題的答對率都是增加的，顯示學生在這一個部分的解題是有正面的發展，經麥內瑪考驗的結果，除了第 1 1 小題的 $\chi^2=1.000$ ，小於查表的 $\chi^2_{.95(1)}=3.841$ ，我們接受 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 之外，其餘各題第 1 2 小題的 $\chi^2=5.714$ 、第 1 3 小題的 $\chi^2=5.714$ 、第 1 4 小題的 $\chi^2=5.714$ ，都大於查表的 $\chi^2_{.95(1)}=3.841$ 。所以我們拒絕 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能將多項式的未知數用數字代入求值」答對率的增加，多數能達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

(二) 壓縮層次

壓縮層次的試題以對應的變數特徵分類，又可分成三個部分討論：

變數特徵 1：能用文字符號代替一序列的數字

對應的題號分別是第一大題第 2 題、第 3 題，第四大題第 2 題的第 1 2 3 4 小題（請參閱附錄一、附錄二）。內容包括「以一個文字符號代替變動的數值的位置」、「以二個文字符號分別代替不同位置的變動數值」、「觀察出比例式的比值為變數的本質」。各題的答對人數和答對率見表 4-9。

【表 4-9 變數概念壓縮層次各題答對率一覽表 (1)】

題號	第一大題				第四大題							
	2		3		2 ¹		2 ²		2 ³		2 ⁴	
前 後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測
答對人數 (人)	450	377	449	472	473	494	473	491	470	498	172	214
答對率 (%)	79.79	66.84	79.61	83.69	83.87	87.59	83.87	87.06	83.33	88.30	30.50	37.94

本題型的題目中有 4 小題，學生的答對率都有八成左右，發生錯誤的學生集中在變數概念層次內化前。但第一大題第 2 題後測學生的答對率不到七成，第四大題第 2⁴ 小題學生的答對率只有三成多，發生錯誤的學生分布在變數概念的四個層次。

從本題型可以看出，如果將題意的引導過程放在同一個題目，如第一大題第 2 題、第 3 題，學生比較可以將漫長序列的動作，逐漸壓擠成為更易處理的單位（至於第一大題第 2 題為什麼答對率反而降低，請見 p.84 的說明）；相反的若將引導過程放在不同的小題，如第四大題第 2 題的四個小題雖然在同一個題幹，但是大部分的學生不能從前三小題的結果，獲得正確解答第 4 小題所需的資訊。各題的錯誤類型為：

(1) 誤解題目的意思，在概念壓縮的過程中，去求題目中某些項的和。

例如：前測的第一大題第 2 題的第四格，將表格中所有列的值加起來，得到「 $30+60+90+120+150=450$ 」，然後解釋「第 x 週時彬彬共存了」為 450 和 x 的乘積，最後學生的答案寫「 $450x$ 」。

(2) 在概念壓縮的過程中，沒有將變數包含的所有元素固化成一個整體的物件。

例如：後測的第一大題第 2 題，代表變數變動過程的式子為：

$$290=30\times \underline{\hspace{2cm}}+200$$

$$320=30\times \underline{\hspace{2cm}}+200$$

$$350=30\times \underline{\hspace{2cm}}+200$$

我們可以看出上面的三個式子中的空格，代表的變數並不包含係數與常數項。題目最後「第 x 週時彬彬共存了____元。」中的空格，代表的變數是包含常數項，形如 $ax+b$ 的多項式。

學生認為正確答案「 $30\times x+200$ 」中的乘號可以省略，代表「30」和「 x 」是一體的可以寫成「 $30x$ 」，而「 $30x$ 」和「200」是不可合併的不同類項，因此不少人的答案寫的是「 $30x$ 」，未能將「 $30x$ 」和「200」視為一個整體的物件「 $30x+200$ 」。發生此類錯誤的學生，變數概念層次分布在內化、壓縮、物化三個層次，顯示題目的某些因素造成學生解題時的干擾（請參考 p.84）。

(3) 文字符號位置相反：自變數和應變數的因果關係混淆。

例如：第一大題第 3 題，

學生未能正確的用文字符號列出兩個變數間的關係式，

如前測第四格的答案寫「 $x=y-3$ 」，

後測第四格的答案寫「 $x=y-33$ 」等。

(4) 缺乏含有自變數和應變數的函數觀念。

例如：第一大題第 3 題，學生以多項式「 $x-y$ 」表示或以大小關係「 $x > y$ 」表示。沒有從題目的提示過程中，引出函數（或二元一次方程式）的

關係式。

(5) 無法將漫長序列的動作，逐漸壓擠成為更易處理的單位。

- a. 第一大題第 2 題、第一大題第 3 題，都有不少的學生是前三格答案正確，但是第四格答案空白的。發生此種錯誤的學生，變數概念層次集中在內化層次，如能將層次提升，則第四格答案空白的情形當可減少。
- b. 第四大題第 2 4 小題的錯誤類型「能確定比例式的比值」，學生解釋的理由分別是：
 - (a) 將 x 、 y 以定值代入可以計算；
 - (b) 題目有一定的規律；
 - (c) 約分後比值相同。

這些都是無法從前三小題的解題過程，體會出雖然 $x : y$ 的比值是定值，但是比例式「 $(x+1) : y$ 」的比值是變數。

另一方面答對率增加的題目，經麥內瑪考驗的結果，第一大題第 3 題答對率的 $\chi^2=8.670$ 、第四大題第 2 4 小題答對率的 $\chi^2=9.151$ ，都大於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ ，所以我們拒絕 $H_0 : P_{12}=P_{21}$ ，換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能用文字符號代替一序列的數字」之內容為「以二個文字符號分別代替不同位置的變動數值」，「觀察出比例式的比值為變數的本質」答對率的增加達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

而答對率減少的題目，第一大題第 2 題答對率的 $\chi^2=41.462$ ，大於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ ，所以我們拒絕 $H_0 : P_{12}=P_{21}$ ，換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能用文字符號代替一序列的數字」之內容為「以一個文字符號代替變動的數值的位置」答對率的減少達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

第一大題第 2 題的答題情形相當特殊，尤其是前測時正確，到了後測時前三

格也正確，而只有第四格寫錯或空白的人數相當多，其中不乏概念層次安置於壓縮層次或物化層次的學生，問題可能出現在題目本身，經重新檢視兩次測驗題目的第一大題第 2 題，題目的差異共有兩點：

(1) 後測試題比前測試題多了常數項。

以概念發展達到壓縮層次或物化層次的學生而言，此點應該不是產生困擾的原因。那麼視覺上誤導的可能性便增大了許多。

(2) 前後測試題中的空格長度不同。

前測試題中的空格長度約有 3 cm 長，後測試題中的空格長度只有約 0.8 cm。以前測時與本題難度相近的第一大題第 3 題而言，試題中就沒有類似空格長度的問題，學生答對率的增加能達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。比較之下，在第一大題第 2 題學生的答題情形，較有可能是受到空格長度的干擾。這是研究者始料未及之處，能夠有這樣的發現算是「無心插柳柳成蔭」的意外收穫。

變數特徵 2：能知道「空格」可以代表不同的數值或變數

對應的題號是第二大題第 2 題的第 5 小題，第 3 題，第 4 題的第 2 小題，第五大題第 2 題（請參閱附錄一、附錄二）。內容包括「完全平方公式」、「因數分解」、「以數對的方式，填寫二元一次方程式的解」和「以數值寫出代表參數的空格」。各題的答對人數和答對率見表 4-10。

【表 4-10 變數概念壓縮層次各題答對率一覽表 (2)】

題號	第二大題						第五大題	
	第 2 ⁵ 小題		第 3 題		第 4 ² 小題		第 2 題	
前、後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測
答對人數 (人)	471	455	292	376	400	406	284	367
答對率 (%)	83.511	80.674	51.773	66.667	70.922	71.986	50.355	65.071

本題型的題目都含有兩個以上的空格，不同的空格必須填寫不同的答案。第

第二大題第 2⁵ 小題，有八成以上學生答對全部空格的題目，它的內容是「完全平方公式」，寫錯的同學主要是對乘法公式的運用錯誤，錯誤類型如下：

(1) 兩格填寫相同的答案。

犯這種錯誤的學生變數概念層次集中在內化層次。

(2) 對乘法公式的映象模糊。

犯這種錯誤的學生變數概念層次以層次內化前最多，其次為內化層次。

第二大題第 3 題，學生的答對率由前測的五成進步到後測的六成五左右。題目的內容「要求學生以數對的方式，填寫二元一次方程式的解」。學生對於本題，並沒有去了解題目的變數特徵：「空格是否可以代表不同的數值」或是「求出空格代表的數」。主要的解題策略和所產生的主要的錯誤類型為：

(1) 習慣性的填寫「0, 0」。

例如：學生直接在試卷空白處列表如右，

x	3	0
y	0	2

並在空格處填寫 0，如「(3, 0)，(0, 2)」

(2) 以文字符號作答，沒有求出空格代表的數值。

這種類型在前測時並不多見，在後測時人數較多。

例如：後測時在應該填寫數值的地方，數對中 x 坐標的位置填寫 x，y 坐標的位置填寫 y，學生將答案寫成「(3, y)，(x, 2)」。

(3) 計算錯誤。

多半是四則運算錯誤或移項時性質符號沒有變號。

第二大題第 4² 小題，學生的答對率約有七成。題目內容是因數分解，答案包含兩個空格，不同的空格內必須填寫不同的答案，而且同一個空格內的答案不是唯一的。對學生而言本題的計算是不成問題的。所以錯誤類型主要再以下兩類：

(1) 沒有掌握變數代表數值變動的特徵。

(2) 只填寫其中一個空格的答案造成的。

例如：a. 完整的填寫“=”右側的空格，但是“=”左側的空格沒有填寫答案。

b. “=”左、右側不同的空格內填寫不同的答案，但是答案不完整，前測填寫「 $117=3\times 39$ ， $147=3\times 49$ ， $177=3\times 59$ 」三個式子的其中之一，後測填寫「 $825=3\times 275$ ， $855=3\times 285$ ， $885=3\times 295$ 」三個式子的其中之一。

第二大題第 4² 小題，有一種答案「在空格內填寫運算符號和數字」是較為特殊的，雖然人數不多，我們仍然在此提出說明。

例如：前測的左、右空格分別填入「-」號和數字「-2」，

將答案寫成「 $1 \boxed{-} 7 = 3 \times \boxed{-2}$ 」。

例如：後測的左、右空格分別填入「-」號和數字「1」，

將答案寫成「 $8 \boxed{-} 5 = 3 \times \boxed{1}$ 」。

第五大題第 2 題，題目的內容是「二元一次關係式的參數式」，要求學生以數值寫出代表參數的空格。學生主要的解題策略是代入求值，答案包含六個空格，依次以兩個空格為一組，同一組空格內的答案是相同的，不同組的空格內必須填寫不同的答案。主要的錯誤類型如下：

(1) 以題幹中 x 、 y 的值當作答案主體，沒有實際去計算以求出空格所代表的值。

例如：前測學生寫的六個空格答案，依次為「4，-3，6，-6，8，-9」。

(2) 沒有實際去計算以求出空格所代表的值，雖然能寫出同一組的兩格答案是相同的，不同組的答案是不同的，但是答案是錯的。

例如：學生將六個空格的答案，分別寫成「2，2，3，3，4，4」。

(3) 沒有去區別不同空格所代表的值是否相同，同一組的兩格答案寫成相反數。

例如：學生將六個空格的答案，分別寫成「2，-2，3，-3，4，-4」。

(4) 沒有去區別不同空格所代表的值是否相同，全部的空格填寫同一個數值。

另一方面，第二大題第 3 題、第 4² 小題，第五大題第 2 題的答對率都是增加的，經麥內瑪考驗的結果，第二大題第 3 題答對率的 $\chi^2=49.390$ 、第五大題第

2 題答對率的 $\chi^2=28.741$ ，大於查表的 $\chi^2_{.95(1)}=3.841$ 。對於這兩題我們拒絕 $H_0: P_{ij}=P_{ji}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能知道空格可以代表不同的數值或變數」中，內容是「以數對的方式，填寫二元一次方程式的解」和內容是「以數值寫出代表參數的空格」，在後測時答對率的增加達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。而第 4 2 小題，經麥內瑪考驗的結果，答對率的 $\chi^2=3.206$ ，小於查表的 $\chi^2_{.95(1)}=3.841$ 。所以我們接受 $H_0: P_{ij}=P_{ji}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能知道空格可以代表不同的數值或變數」中，內容是「因數分解」的部分，答對率的增加未能達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

第二大題第 2 5 小題的答對率是減少的，經麥內瑪考驗的結果，答對率的 $\chi^2=5.263$ ，大於查表的 $\chi^2_{.95(1)}=3.841$ 。所以我們拒絕 $H_0: P_{ij}=P_{ji}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能知道空格可以代表不同的數值或變數」中，內容是「完全平方公式」的部分，答對率的減少達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準，以空白率提高約 2.92 %（請參考表 4-16，p98），答對率的減少約 2.84 %，推測答對率減少的原因最有可能是答題意願降低的結果。

變數特徵 3：能以新的未知數代換已有的未知數

對應的題號分別是第三大題第 1 題的第 5 6 小題，第 2 題的第 1 2 3 小題（請參閱附錄一、附錄二）。內容包括「以新的未知數代換多項式中的未知數」、「以新的未知數代換方程式中的未知數」。各題的答對人數和答對率見表 4-11。

【表 4-11 變數概念壓縮層次各題答對率一覽表（3）】

題號	第 1 5 小題		第 1 6 小題		第 2 1 小題		第 2 2 小題		第 2 3 小題	
	前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測
答對人數 (人)	421	405	386	371	412	432	334	346	387	402
答對率	74.645	71.809	68.44	65.78	73.05	76.596	59.22	61.348	68.617	71.277

(%)										
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

本題型的題目都屬於難度中等的試題，題目內容相近都是「以新的未知數代換已有的未知數」，題目型態則有所差異，要被代換的式子第 1 題的兩個小題是多項式，第 2 題的三個小題是方程式，學生對於各題的錯誤類型主要都和概念壓縮的過程中發生錯誤有關，。

(1) 分配律的使用錯誤。多半是在將括號展開的時候，沒有乘到常數項。

(2) 解方程式。誤以為要求出未知數所代表的值。

例如：在前測的第 1⁵ 小題，在求出正確的答案「 $2x+1=2t+3$ 」之後，將答案「 $2t+3$ 」改寫成方程式「 $2t+3=0$ 」，解方程式得「 $t=-\frac{3}{2}$ 」

(3) 以某數值代入文字符號。

例如：前測時，以第 1⁵ 小題解方程式的結果「 $t=-\frac{3}{2}$ 」，代入第 1⁶ 小題的

$x=t+1$ 中得到「 $x=-\frac{1}{2}$ 」，再代入「 $3(2x+1)$ 」中計算，最後得到

「 $3(2x+1)=0$ 」。

(4) 使用的文字符號不符合題目的要求，以為等號右邊的自變數一定是 x 。

例如：後測時，第 2³ 小題求出「 $y=6s+5$ 」之後，又將答案中的文字符號

s 改寫成以 x 表示的「 $y=6x+5$ 」

(5) 代入後沒有進一步的作移項的動作。這種情形出現在第 2¹ 小題和第 2² 小題。

例如：前測第 2¹ 小題的答案寫「 $a+y=10$ 」，

第 2² 小題的答案寫「 $2t-1+y=3$ 」。

(6) 移項法則的錯誤使用。

例如：前測第 2¹ 小題的正確答案應該是「 $10-a$ 」，後測應該是「 $7-s$ 」，然

而學生的答案有四種情形。

(a) 寫成乘法，如前測的「 $10a$ 」，後測的「 $7s$ 」。

(b) 寫成除法，如前測的「 $\frac{10}{a}$ 」_、「 $\frac{a}{10}$ 」，後測的「 $\frac{7}{s}$ 」_、「 $\frac{s}{7}$ 」

(c) 寫成加法，如前測的「 $10+a$ 」，後測的「 $7+s$ 」

(d) 寫成相反數，如前測的「 $a-10$ 」，後測的「 $s-7$ 」。

另一方面，經麥內瑪考驗的結果，第 15 小題答對率的 $\chi^2=3.646$ 、第 16 小題答對率的 $\chi^2=2.651$ 、第 22 小題答對率的 $\chi^2=0.761$ 、第 23 小題答對率的 $\chi^2=3.252$ ，都小於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ ，對於這兩題我們接受 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。而第 21 小題答對率的 $\chi^2=3.846$ ，比查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ 大，我們拒絕 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，整體而言線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能以新的未知數代換已有的未知數」，內容是「多項式」與「方程式」，答對率的改變未能達到統計上 $\alpha=.01$ 的顯著水準。例外的情形是第 21 小題答對率的增加達到統計上 $\alpha=.01$ 的顯著水準，推測其原因，它是同一型態試題中難度最低的。

(三) 物化層次

物化層次的試題以對應的變數特徵分類，又可分成三個部分討論：

變數特徵 1：學習者能從不同的表徵去理解變數

對應的題號分別是第一大題第 4, 5, 6 題，第二大題第 4 題的第 3 小題（請參閱附錄一、附錄二）。

第一大題第 4, 5, 6 題的內容包括將文字敘述轉換成「包含兩個變因的代數式」_、「包含三個變因的代數式」_、「包含四個變因的代數式」；第二大題第 4 題的第 3 小題的內容是「對空格的不同意義的使用情形」，不探討答對率（相關說明請見 p91）。其餘各題的答對人數和答對率見表 4-12。

【表 4-12 變數概念物化層次各題答對率一覽表 (1)】

題號	第一大題
----	------

	第 4 題		第 5 題		第 6 題	
	前測	後測	前測	後測	前測	後測
答對人數 (人)	529	536	475	436	59	179
答對率 (%)	93.794	95.035	84.22	77.305	10.461	31.738

第一大題試題的內容，是將文字敘述轉換成代數式，其中第 4 題包含兩個變因，第 5 題包含三個變因，第 6 題包含四個變因。第 4 題的答對率有九成以上，表示此題並沒有造成學生的困擾，第 5 題的答對率在八成上下，而第 6 題的答對率約在一成到三成之間。比較之下，在第 5 題和第 6 題之間的答對率有很大的落差。第一大題第 4 題除了少數人的空白之外，有作答的學生幾乎全對。

包含三個變因的第一大題第 5 題，錯誤類型為：

(1) 未能清楚分辨兩變數之間的關係：兩個變數的位置排列順序錯誤。

- a. 自變數與應變數的因果關係的混淆，將自變數當成應變數，答案寫成分數的型式。

例如：如前測時，以為 y 是應變數所以放在等號左邊，而且以 x 代表父親的

年齡，列出關係式「 $y=2x+3$ 」，移項後得到「 $x=\frac{y-3}{2}$ 」，最後在空格

填寫「 $\frac{y-3}{2}$ 」。

- b. 題目解讀錯誤，以為「2 倍多 3」是 y 要先加 3 再乘 2，答案含有括號。

例如：前測寫成「 $2(y+3)$ 」，

(2) 將倍數解讀成未知數自乘的次數。

例如：前測時，將「2 倍」解讀成乘兩次，答案寫成「 y^2 」

(3) 以題幹中的數值運算。

例如：後測時，將題目中的兩個數字乘起來了，得到的錯誤答案是 36

(4) 未知數未以題目提供的文字符號 y 表示。這些答案都是將式子寫成含有 x ，

而且後測時的人數比前測時多了不少，顯示經過「線型函數的學習」之後，

學生認為自變數就是「 x 」的人數不少。

(5) 把不同類項合併。

例如：前測時，將「 $2y+3$ 」中的 $2y$ 和常數 3 合併而得「 $5y$ 」。

後測時，將「 $3y-12$ 」中的 $3y$ 和常數 -12 合併而得「 $-9y$ 」；

包含四個變因的第一大題第 6 題，除了概念層次在物化的學生，答題情形都是以空白未寫的人數最多，可見錯誤類型多數是由物化層次的學生產生的。學生在影響答案的四個變因之中，並不是同時都錯了，錯誤類型為：

- (1) **缺常數項。** 受到題目的空格型態的干擾（空格太小）。
- (2) **比值的問題，產生 x 項的係數有誤。** 學生無法將題目中的敘述「每升高 100 公尺，氣溫就下降 0.6」轉換成正確的比值。
- (3) **未能清楚分辨各變因之間的大小關係，導致性質符號有誤。** 題目同時出現「升高」和「下降」的字眼，造成學生對於大小關係的混淆。
- (4) **未能清楚分辨兩變數之間對應的關係。** 主要是學生缺乏「對應」的概念，只以 x 列出算式，並沒有以「算式 = y 」代表「 x 和 y 的對應關係」，最後的答案寫成只含一個變數的多項式。

另一方面，各題的答對率經麥內瑪考驗的結果，第 4 題答對率的 $\chi^2=2.613$ ，小於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ 。所以我們接受 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「將文字敘述轉換成包含兩個變因的代數式」答對率的增加沒有達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

第 5 題答對率的 $\chi^2=16.011$ ，大於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ 。所以我們拒絕 $H_0: P_{ij}=P_{ji}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「將文字敘述轉換成包含三個變因的代數式」答對率的減少達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

第 6 題答對率的 $\chi^2=93.308$ ，大於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ 。所以我們拒絕 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「將文字敘述

轉換成包含四個變因的代數式」的增加達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

對於第二大題第 4³ 小題我們不以答對率來說明，而以答案類型來說明學生對空格的不同意義的使用情形。分類的方式為：

(1) 將「 $20+ =40-$ 」或「 $2+ =6-$ 」視為一元一次方程式。

選擇「一元一次方程式」的學生，能將空格當作有特定值的未知數。

(2) 將「 $20+ =40-$ 」或「 $2+ =6-$ 」視為二元一次方程式。

選擇「二元一次方程式」的學生，能將空格當作變數。

(3) 將「 $20+ =40-$ 」或「 $2+ =6-$ 」視為含相同數字的算式。

選擇「不含文字符號的算式」的學生，能將空格當作特定的值。

(4) 包含選擇多個答案或選擇 D 其他式子，選擇 D 的學生在陳述理由時大多數說 A、B、C 三個選項都可以。

選擇「D 其他式子」的學生，能將空格作多元的使用。

(5) 空白：沒有寫任何答案或記號。

未作答的學生，答題意願不高。

表 4-13 是第二大題第 4³ 小題，各層次學生選擇答案情形的人數分布表，比例的計算是人數除以該層次的概念層次安置人數，四捨五入到整數位。

【表 4-13 能說明自己對變數的了解的想法，各層次學生人數一覽表】

答案類型		層次內化前		內化層次		壓縮層次		物化層次	
		前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測
(1)一元一次方程式	人數(人)	17	17	45	37	107	113	37	52
	比例(%)	20	19	37	41	42	44	41	42
(2)二元一次方程式	人數(人)	18	20	24	22	36	51	18	32
	比例(%)	21	23	20	24	14	20	20	26
(3)含相同數字的算式	人數(人)	23	16	44	22	82	71	30	30
	比例(%)	26	18	36	24	32	27	33	24
(4)其他	人數(人)	1	0	1	7	24	21	6	8

	比例 (%)	1	0	1	8	9	8	7	6
(5) 空白	人數 (人)	28	35	7	3	7	3	0	2
	比例 (%)	32	40	6	3	3	1	0	2
概念層次安置人數 (人)		87 人	88 人	121 人	91 人	256 人	259 人	91 人	124 人

從表 4-13 中觀察，我們可以發現：

- (1) 將兩個空格視為相同的文字符號的人數比例，和視為相同的數字的人數比例，兩個加起來的總合超過六成。顯示學生仍難跳脫空格外型的影響。
- (2) 將兩個空格視為不同的未知數：各層次學生的人數比例差不多，約在兩成左右。顯示如果有其他的選擇，學生選擇將空格視為變數的人數比例不高。

變數特徵 2：能求出改變量的值

對應的題號分別是第三大題第 3 題的第 1 2 3 小題（請參閱附錄一、附錄二）。

內容包括「自變數的量改變時，求出應變數改變的量」。

各題的答對人數和答對率見表 4-14。

【表 4-14 變數概念物化層次各題答對率一覽表 (2)】

題號	第 3 ₁ 小題		第 3 ₂ 小題		第 3 ₃ 小題	
	前測	後測	前測	後測	前測	後測
答對人數 (人)	315	307	157	174	100	105
答對率 (%)	55.851	54.433	27.837	30.851	17.73	18.617

本題型的題目，對學生而言是屬於中、高難度的題目，顯示學生對於「自變數的量改變時，求出應變數改變的量」的掌握是有困難的。主要的錯誤類型為：

- (1) 計算錯誤：代入求值時發生錯誤，無法求出正確的應變數的改變量。

例如：前測的第 3₃ 小題，學生直接以「 $x=3$ 」當作自變數的值代入計算。

- (2) 直接判斷應變數增減的情形，未寫出應變數改變量的值，對應的錯誤類型

為，答案只寫增加或減少。

另一方面，各題的答對率經麥內瑪考驗的結果，第 3 題的第 1 小題答對率的 $\chi^2 = 0.405$ ，第 2 小題答對率的 $\chi^2 = 1.744$ ，第 3 小題答對率的 $\chi^2 = 0.048$ 值，都小於查表的 $\chi_{.95(1)}^2 = 3.841$ 。所以我們接受 $H_0: P_{12} = P_{21}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能求出改變量的值」的數學內容

「自變數的量增加時，求出應變數增加的量」

「自變數的量增加時，求出應變數減少的量」

「自變數的量增加時，求出代表應變數改變量的變數」

，答對率的改變均未能達到統計上 $\alpha = .05$ 的顯著水準。

變數特徵 3：能寫出二元一次關係式的參數式

對應的題號分別是第四大題第 3 題，第五大題的第 3 題、第 4 題（請參閱附錄一、附錄二）。內容包括「以參數的觀念解比例式的問題」、「求出二元一次方程式的參數式」。各題的答對人數和答對率見表 4-15。

【表 4-15 變數概念物化層次各題答對率一覽表 (3)】

題號	第四大題		第五大題			
	第 3 題		第 3 題		第 4 題	
前、後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測
答對人數 (人)	238	268	56	48	118	160
答對率 (%)	42.199	47.518	9.9291	8.5106	20.922	28.369

第四大題第 3 題的內容以「比例式」為主，答對率只有四成多，難度算是中等的。錯誤類型為：

概念壓縮的過程發生知識性的錯誤，沒有使用參數作為解題的物件。

(1) 將題目中的比例式之前後兩項的值個別加 1。

例如：前測時，題目中的比例式為「 $x : y = 2 : 7$ 」，

學生將前後兩項的值個別加 1 的結果為「 $x : y = 3 : 8$ 」，

最後的答案寫「 $\frac{3}{8}$ 」。

(2) 將題目中的比例式之前後兩項的值個別減 1。

例如：後測時，題目中的比例式為「 $x : y = 2 : 7$ 」，

學生將前後兩項的值個別減 1 的結果為「 $x : y = 1 : 6$ 」，

最後的答案寫「 $\frac{1}{6}$ 」。

(3) 直接以題目內比例式中的值當作答案。

例如：題目中的比例式為「 $x : y = 2 : 7$ 」，

學生的答案直接寫「 $\frac{2}{7}$ 」，沒有其他的算式。

第五大題第 3 題、第 4 題的內容以「二元一次方程式」為主。整體的答對率，第 3 題不到一成，第 4 題也只有兩成多，兩題都屬於高難度的試題，其中第 3 題約有八成、第 4 題約有兩成五的學生空白未作答。答對第 3 題的學生，概念層次主要集中在物化，約佔答對人數的八成，概念層次壓縮的學生約佔答對人數的兩成，概念層次在內化前和內化的學生幾乎沒有人答對。答對第 4 題的學生，概念層次在內化前和內化的各約佔答對人數的一成，概念層次在壓縮和物化的各約佔答對人數的四成。第 4 題的答對率高於第 3 題的答對率，推測是和第 4 題為選擇題有關。另一方面，第 3 題以舉例說明的方式介紹了參數式，或多或少的影響學生的解題策略和錯誤類型。主要的錯誤類型是：

(1) 不能將參數的所有元素視為一個完整的物件：

a. 能找到二元一次方程式的一組正確的解，但是參數的係數是錯的。

(a) 參數的係數與說明例中參數的係數一樣。

例如：前測時，有學生解出方程式「 $2x+3y=6$ 」的一組正確的解

「 $x=6, y=-2$ 」, 答案寫成「 $x=6+2t, y=-2-3t$ 」。

(b) 參數的係數的性質符號錯誤。

例如：前測時，有學生解出方程式的一組正確的解「 $x=6, y=-2$ 」，沒有了解將參數代回原來的方程式時，參數會因正負抵銷而不見了，答案寫成參數的係數與方程式的係數同號，最後寫成

「 $x=6+3t, y=-2+2t$ 」。

(c) 參數的係數與方程式的係數相同

例如：前測時，有學生以方程式「 $2x+3y=6$ 」中 x 的係數 2，當作 x 參數的係數，寫成「 $x=6+2t$ 」，同樣的以 y 的係數 3，當作 y 參數的係數，寫成「 $y=-2+3t$ 」，最後的答案寫成「 $x=6+2t, y=-2+3t$ 」。

(d) 只有數字，沒有寫參數的部分。

例如：前測時，學生以方程式的一組解為答案「 $x=6, y=-2$ 」。

b. 參數的係數正確，但是未能找到二元一次方程式的一組正確的解。

(a) 只有參數。

例如：前測時學生的答案寫成「 $x=3t, y=-2t$ 」。

(b) 找到二元一次方程式的一組解是錯誤。

例如：前測時，學生的答案寫成「 $x=2+3t, y=3-2t$ 」。

(2) 只注意到參數式的表面形式，沒有注意到參數的性質：

a. 直接以說明例當解答。

例如：前測「 $x=4+2t, y=-3-3t$ 」，

後測為「 $x=4+2t, y=3+3t$ 」。

b. 以說明例中參數的係數乘以二元一次方程式中未知數的係數。

例如：前測時學生以 $(4+2t)$ 乘 2 以 $(-3-3t)$ 乘 3，得到「 $x=8+4t, y=-9-9t$ 」。

後測時學生以 $(4+2t)$ 乘 2 以 $(3+3t)$ 乘 (-3) ，得到「 $x=8+4t, y=-9-9t$ 」。

c. 將二元一次方程式中的某一個未知數移項。

例如：前測時，將方程式「 $2x+3y=6$ 」作移項的動作，

得 $x = \frac{6-3y}{2}$ ， $y = \frac{6-2x}{3}$ ，更進一步的將“=”右邊的未知數 x 、 y 改成

參數 t ，得到 $x = \frac{6-3t}{2}$ ， $y = \frac{6-2t}{3}$ 。

另一方面，答對率增加的有兩題，經麥內瑪考驗的結果，第四大題第 3 題的 $\chi^2=4.371$ ，第五大題第 4 題的 $\chi^2=8.963$ ，都大於查表的 $\chi^2_{.95(1)}=3.841$ 。所以我們拒絕 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能寫出二元一次關係式的參數式」中的內容包含「比例式」和「二元一次方程式(選擇題題型)」答對率的增加達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

答對率減少的是第五大題第 3 題，經麥內瑪考驗的結果 $\chi^2=0.620$ ，小於查表的 $\chi^2_{.95(1)}=3.841$ 。所以我們接受 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生變數概念「能寫出二元一次關係式的參數式」中的內容包含「二元一次方程式(填充題題型)」答對率的改變未能達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

二、學生答題意願的改變情形

本研究以前測有作答，後測空白者為作答意願降低，如此認定的理由為：在設計前、後測試卷時，對應題號的試題內容是一致的，因此同樣的題目內容在前測時有作答(不一定正確)，經過一段時間的學習後，概念發展即使有受到干擾，干擾的結果也應該是作答錯誤，不應該是未作答，因此將未作答的原因，歸於答題意願降低。相反的，以前測未作答，後測有作答者定為作答意願增加。

「空白率」的增減，是否有顯著的改變，採用麥內瑪考驗(林清山，民 81)來檢驗，虛無假設 $H_0: P_{12}=P_{21}$ ，其中 P_{12} 代表前測答案空白且後測有作答的人數、 P_{21} 代表前測有作答且後測答案空白的人數。

【表 4-16 變數概念測驗前、後測試題空白率一覽表 (1)】

項目 題號		空白率			項目 題號		空白率		
		前測	後測	χ^2			前測	後測	χ^2
第一大題	第 1 ₁ 題	1.37	0.52	2.778	第三大題	第 1 ₃ 題	6.70	6.01	0.800
	第 1 ₂ 題	1.89	0.86	2.571		第 1 ₄ 題	7.04	6.53	0.429
	第 1 ₃ 題	10.14	10.14	0		第 1 ₅ 題	11.17	9.11	3.789
	第 2 題	1.20	1.03	0.111		第 1 ₆ 題 (㊟)	12.54	10.14	4.667
	第 3 題	1.37	1.37	0		第 2 ₁ 題 (㊟)	15.12	11.000	9.931
	第 4 題	2.58	2.41	0.077		第 2 ₂ 題 (㊟)	17.01	13.06	8.138
	第 5 題	6.19	5.34	0.758		第 2 ₃ 題	19.76	17.70	1.800
	第 6 題 (㊟)	49.14	30.76	61.886		第 3 ₁ 題 (㊟)	18.38	13.92	9.657
第二大題	第 1 題	10.82	8.93	2.889	第四大題	第 3 ₂ 題 (㊟)	24.91	18.73	12.226
	第 2 ₁ 題	3.95	6.19	5.452		第 3 ₃ 題 (㊟)	25.43	20.96	6.145
	第 2 ₂ 題	4.81	4.81	0		第 1 題	44.50	44.67	0.006
	第 2 ₃ 題	6.70	8.25	2.613		第 2 ₁ 題	10.82	9.11	2.778
	第 2 ₄ 題	6.87	9.28	6.125		第 2 ₂ 題 (㊟)	11.51	9.28	4.568
	第 2 ₅ 題	7.90	10.82	7.811		第 2 ₃ 題 (㊟)	11.68	9.28	4.900
	第 3 題 (㊟)	22.51	13.92	23.148		第 2 ₄ 題	23.20	23.54	0.039
	第 4 ₁ 題	7.56	7.56	0		第 3 題 (㊟)	35.91	30.58	6.816
	第 4 ₂ 題	23.54	20.62	2.701		第五大題	第 1 題 (㊟)	16.84	10.65
第 4 ₃ 題	8.25	8.76	0.153	第 2 題 (㊟)	25.60		14.60	35.310	
第 1 ₁ 題	6.36	6.01	0.200	第 3 題 (㊟)	50.17		41.75	14.207	
	第 1 ₂ 題	6.70	6.19	0.474	第 4 題 (㊟)		28.52	16.32	35.252

表 4-16 中沒有加註「 χ^2 」或「(㊟)」的部分，空白率 χ^2 的值小於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ 。所以我們接受 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，沒有加註「 χ^2 」或「(㊟)」的變數概念內容，線型函數單元學習前和學習後，答題意願的改變未能達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

經麥內瑪考驗的結果，空白率增加而且 χ^2 的值大於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ 的題號分別是表 4-16 加註「 χ^2 」的部分。所以我們拒絕 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，線

型函數單元學習前和學習後，答題意願的減少達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。答題意願減少的部分，學生的變數概念內容分別為：

(一)「能根據題意完成式子中的空格」

1. 平方差公式，不同的空格，答案必須填寫相同的數字
2. 完全平方公式，只有一個空格，答案必須填寫未知數

(二)能知道空格可以代表不同的數值或變數，內容是「完全平方公式」

經麥內瑪考驗的結果，空白率減少而且 χ^2 的值大於查表的 $\chi_{.95(1)}^2=3.841$ 的題號分別是表 4-16 加註「㊸」的部分。對於這些題目我們拒絕 $H_0: P_{12}=P_{21}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，答題意願的增加達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。答題意願增加的部分，學生的變數概念內容分別為：

變數特徵	數學內容
(一)學習者能從不同的表徵去理解變數	1. 將文字敘述轉換成代數式
(二)能知道空格可以代表不同的數值或變數	1. 以數對的方式，填寫二元一次方程式的解 2. 能將二元一次方程式的解寫成一個算式
(三)能以新的未知數代換已有的未知數	1. 多項式中代入一個式子求新的多項式 2. 二元一次方程式中以一個文字符號代換其中一個未知數，求出代表另一個未知數的式子 3. 二元一次方程式中以一個多項式代換其中一個未知數，求出代表另一個未知數的式子
(四)能求出改變量的值	1. 自變數的量增加時，求出應變數增加的量 2. 自變數的量增加時，求出應變數減少的量 3. 自變數的量增加時，求出代表應變數改變量

	的變數
(五) 能用文字符號代替一 序列的數字	1. 求比例式的比值
(六) 能寫出二元一次關係 式的參數式	1. 求比例式的比值 2. 二元一次方程式 (填充題題型) 3. 二元一次方程式 (選擇題題型)
(七) 能找出一元、二元一 次關係式的解	1. 二元一次方程式

三、學生對「空格」的看法

在本研究當中提供給學生填寫答案的地方都叫做「空格」，其中的變數概念測驗試題中，曾經出現在「空格」中的答案內容有：「數」、「文字符號」、「運算符號」、「文字(名義或類別變數)」、「一系列的算式或一段文字說明」。答案內容除了受到题目的語意限制，也受到「空格」的外型影響，本研究的變數概念測驗試題中出現的「空格」型式分為五類，現分別說明如下。

(一)

空格型式	答案內容
空白處	數、文字符號、運算符號、文字(類別變數)、一系列的算式 或一段文字說明

說明：空白處是一種沒有外型空格，學生作答時不會受到空格外型的限制。

(二)

空格型式	答案內容
橫線	數、文字符號、運算符號、文字(類別變數)、一系列的算式 或一段文字說明

說明：空格以橫線出現時，學生作答時會受到橫線長短的影響。

1. 橫線長度容納不下答案時，學生的作答便會受到干擾（請參閱 p84）。
2. 橫線長度很長，學生作答時受到外型的限制就會變小，如第二大題第 4³ 題。

(三)

空格型式	答案內容
	數、文字符號、運算符號

- 說明：1. 的範圍很小，能夠容納的內容不多，所以學生在 的內容便多以簡單扼要的形態出現，如果根據題意的要求必須填寫較多的內容時，學生會將答案寫在試卷的空白處。
2. 如果題意的要求不明確或是學生對題意的解讀錯誤，學生會以經驗填寫答案，如第二大題第 4² 題，學生在空格內填寫運算符號。

(四)

空格型式	答案內容
表格	數、文字符號

- 說明：1. 表格可分成數對和表列兩種，這兩種型態的出現，通常都與兩個變數的對應關係有關。
2. 表格的外型限制與 相似，但是功能不完全相同，表格通常是某個程序階段的總結， 的位置較不受限制，因此在 型態的空格中所發現的答案「運算符號」，未在表格型態的空格中出現。

(五)

空格型式	答案內容
文字符號 (x、y 等等)	數、文字符號

- 說明：文字符號受到外型的限制最大，文字符號代表的意義，沒有脫離數或量的範疇，文字符號並沒有像 一樣的代表運算符號，在國中階段的學生如

此，教師和教科書（國立編譯館，民 87a、民 87b、民 87c、民 87d、民 88a、民 88b、民 88c、民 88d、民 88e、民 88f、民 88g、民 88h、民 89a、民 89b、民 89c、民 89d、民 89e、民 89f）也如此。

本研究調查的結果發現，空格的外型限制條件越少，學生呈現答案的型態越多元。

我們更進一步地從其中兩種型式來比較，以「表格」和「橫線」的呈現方式為例，經由「空白率」、「答對率」、「看法符合率」的分析，更可看出空格的外型對學生的影響。

此處對「看法符合」的界定，並非以答案是否正確所決定的，而是以答案的型式是否合乎題目的要求，例如，學生作答時在兩個空格處分別填寫不同的答案即符合該題的答案是「不同」的要求。而符合題目的要求的人數與測驗人數的比值即為「看法符合率」。

「看法符合率」的增減，是否有顯著的改變，採用麥內瑪考驗（林清山，民 81）來檢驗，虛無假設 $H_0: P_{12}=P_{21}$ ，其中 P_{12} 代表前測看法符合且後測不符合的人數、 P_{21} 代表前測看法不符合且後測符合的人數。「空白率」的資料則是擷取表 4-16 的部份內容。第二大題第 3 題和第五大題第 1 題有關「答對率」的資料則請分別參考表 4-10 和表 4-6 及其說明。

【表 4-17 變數概念測驗前、後測試題空白率一覽表（2）】

題號	空白率			答對率			看法符合率		
第二大題第 3 題	22.51	13.92	23.148	51.773	66.667	49.390	75.61	80.93	29.660
第五大題第 1 題	16.84	10.65	15.429	75.887	76.064	0.225	82.65	88.14	16.450

在表 4-17 中兩個题目的「看法符合率」， χ^2 的值大於查表的 $\chi^2_{.95(1)}=3.841$ ，

拒絕 $H_0: P_{12}=P_{21}$ ，也就是說經過線型函數的學習之後，內容是求二元一次方程式的題目，看法符合率的增加都達到統計上 $\alpha=.05$ 的顯著水準。

第二大題第 3 題和第五大題第 1 題的內容同樣是求二元一次方程式的解，但如要了解學生對「空格」的看法，除了從空格的外型比較，也可以從兩題在表 4-17 的空白率、答對率、看法符合率來比較。第五大題第 1 題顯然都優於第二大題第 3 題，依常理第五大題第 1 題需要求出三個以上的正確值才算是「對的」，第二大題第 3 題只需求出二個正確值是「對的」的情況下，難度應該是第五大題第 1 題較高才對，可是測驗結果恰巧相反，歸因於學生在解「二元一次方程式」時，「表格」的呈現方式較「橫線」的呈現方式容易被學生接受。

第三節 學生線型函數概念層次的改變

利用自行設計的「線型函數概念測驗」在線型函數單元學習前和學習後，分別進行前測與後測，以探討學生線型函數概念層次改變的情形。

一、「線型函數概念測驗」前、後測施測通過個別層次分析

此處所謂個別層次的通過是指，對於內化、壓縮、物化三個層次，個別依照 CSMS 的分析方法（郭汾派等，民 78），如果答對某一層次內問題的三分之二以上，則為通過此一層次。本研究的設定則為答對率必須達 70 % 以上才算通過該層次。因各層次題數的不同，答對率的設定也跟著不同，線型函數概念測驗內化層次有 10 題而 $10 \text{ 題} \times 70 \% = 7 \text{ 題}$ ，因此以題數而言，本研究設定答對 7 題以上方為通過內化層次，換算成百分比則為 70 % 以上；壓縮層次有 8 題而 $8 \text{ 題} \times 70 \% = 5.6 \text{ 題}$ ，因此以題數而言，本研究設定答對 6 題以上方為通過壓縮層次，換算成百分比則為 75 % 以上；物化層次有 12 題而 $12 \text{ 題} \times 70 \% = 8.4 \text{ 題}$ ，因此以題數而言，本

研究設定答對 9 題以上方為通過物化層次，換算成百分比則為 75 %。表 4-18 為依此標準所評量學生通過「線型函數概念測驗」各個層次的人數及百分比。

【表 4-18 線型函數概念測驗前、後測通過各個層次，調整前人數統計表】

	線型函數概念測驗前測			線型函數概念測驗後測		
	內化	壓縮	物化	內化	壓縮	物化
受測人數	594	594	594	607	607	607
通過人數	492	306	92	529	416	267
通過百分率	82.8 %	51.5 %	15.5 %	87.1 %	68.5 %	44.0 %

線型函數概念測驗前測有 82.8 % 的學生達到內化的層次，到了後測有 87.1 % 的學生達到內化的層次。前測有 51.5 % 的學生達到壓縮的層次，到了後測有 68.5 % 的學生達到壓縮的層次。前測有 15.5 % 的學生達到物化的層次，到了後測有 44.0 % 的學生達到物化的層次。

因為前、後測的施測人數不一，無法了解施測結果增減的確實原因，為了控制變因及了解前測、後測學生通過各個層次學生個人的改變情形，只將四次測驗都沒有缺考的學生資料納入比較。表 4-19 為依此標準所評量學生通過「線型函數概念測驗」各個層次的人數及百分比。

【表 4-19 線型函數概念測驗前、後測通過各個層次，調整後人數統計表】

	線型函數概念測驗前測			線型函數概念測驗後測		
	內化	壓縮	物化	內化	壓縮	物化
統計人數	564	564	564	564	564	564
通過人數	476	298	87	498	400	259
通過百分率	84.4 %	52.8 %	15.4 %	88.3 %	70.9 %	45.9 %

調整後前測有 84.4 % 的學生達到內化的層次，到了後測有 88.3 % 的學生達到內化的層次。前測有 52.8 % 的學生達到壓縮的層次，到了後測有 70.9 % 的學生達

到壓縮的層次。前測有 15.4 % 的學生達到物化的層次，到了後測有 45.9 % 的學生達到物化的層次。施測的結果有些許的不同。表 4-19 即為人數調整後學生通過「線型函數概念測驗」各個層次的人數及百分比。

二、「線型函數概念測驗」施測結果的層次安置分析

依 CSMS 層次的診斷方法（郭汾派等，民 78）是以學生的最高層次表現，且必須通過之前的低層次才算達到該層次，否則為錯誤樣本，但錯誤樣本不能超過 7 %。本節的層次安置即是依 CSMS 的辦法處理，錯誤樣本前測共有 7 人，後測共有 15 人，因此本測驗前測的錯誤樣本比例為 1.2 %，後測的錯誤樣本比例為 2.6 %，皆未超過 7 % 符合 CSMS 的標準。表 4-20 為依此標準將學生的概念層次安置於「線型函數概念測驗」各個層次的人數及百分比。

【表 4-20 線型函數概念測驗前、後測層次安置人數統計表】

	線型函數概念測驗前測				線型函數概念測驗後測			
	內化前	內化	壓縮	物化	內化前	內化	壓縮	物化
受測人數	594	594	594	594	607	607	607	607
統計人數	564	564	564	564	564	564	564	564
該層次人數	85	177	212	83	57	100	140	252
該層次百分	15.1 %	31.4 %	37.6 %	14.7 %	10.1 %	17.7 %	24.8 %	44.7 %
錯誤樣本數	7				15			

三、線型函數概念層次的改變情形

表 4-21 是根據表 4-20，剔除缺考人數及錯誤樣本之後所得到的，前、後測通過各個層次改變人數對照表：

【表 4-21 線型函數概念測驗前、後測層次改變人數對照表】

線型函數概念測驗前測 概念層次人數(人)		內化前	內化	壓縮	物化	總計
線型函數 概念測驗 後測概念 層次人數 (人)	內化前	46	7	3	0	56
	內化	22	60	16	0	98
	壓縮	10	55	64	10	139
	物化	1	49	126	73	249
	總計	79	171	209	83	542
層次降低人數		0	7	19	10	36
層次一致人數		46	60	64	73	243
層次提升人數		33	104	126	0	263

至於前測各層次的學生，到了後測時如何改變，從表 4-21 可以看出：

(一) 前測在「層次內化前」

共有 79 人，到了後測時：

層次提升的人數有 33 人，佔前測層次內化前人數的 41.77 %。

提升到內化層次的人數比例，佔前測層次內化前人數的 27.85 %。

提升到壓縮層次的人數比例，佔前測層次內化前人數的 12.66 %。

提升到物化層次的人數比例，佔前測層次內化前人數的 1.27 %。

因為內化前已經是最低層次所以無人層次降低。

(二) 前測在「內化層次」

共有 171 人，到了後測時：

層次提升的人數有 104 人，佔前測內化層次人數的 60.82 %。

提升到壓縮層次的人數，佔前測內化層次人數的 32.16 %。

提升到物化層次的人數，佔前測內化層次人數的 28.65 %。

層次降低的人數有 7 人，佔前測內化層次人數的 4.09 %。

(三) 前測在「壓縮層次」

共有 209 人，到了後測時：

層次提升到物化層次的人數有 126 人，佔前測壓縮層次人數的 60.29 %。

層次降低的人數有 19 人，佔前測壓縮層次人數的 9.09 %。

降低到層次內化前的人數，佔前測壓縮層次人數的 1.44 %。

降低到內化層次的人數，佔前測壓縮層次人數的 7.65 %。

(四) 前測在「物化層次」

共有 83 人，到了後測時：

因為已經是最高層次，所以無人層次提升。

層次降低的人數有 10 人，佔前測物化層次人數的 12.05 %。

層次降低的部分集中在壓縮層次，沒有人降到內化前和內化層次。

(五) 層次提升的人數比率在層次內化前、內化、壓縮都有顯著的增加，層次降低在層次內化、壓縮、物化也都有發生。那麼到底學生在線型函數概念的前、後測之間，發展層次是否有顯著的改變，利用包卡爾對稱性考驗，來檢驗虛無假設 $H_0: P_{ij}=P_{ji} (i < j)$ ，其中 P_{ij} 的 i 、 j 分別代表變數概念測驗前、後測之層次的行數及列數，得 $\chi^2=181.8916$ ， $df=6$ ，大於查表的 $\chi_{.99(6)}^2=16.812$ ，所以我們拒絕 $H_0: P_{ij}=P_{ji}$ 。換句話說，線型函數單元學習前和學習後，學生線型函數概念層次的改變達到統計上 $\alpha=.01$ 的顯著水準。以總數而言層次提升的總人數有 263 人，層次降低的總人數有 36 人，因此可以說明在線型函數單元的教學期間，由表 4-21 中呈現的數據，比較之下學生線型函數概念的成長有較正面的影響。

第四節 線形函數概念測驗結果分析與討論

本節主要探討學生線型函數概念的錯誤類型。以下的分析是根據題目的概念層次，說明各層次（Sfard，1991）的錯誤類型。另一方面根據題目的內容，分別探討答對率在前、後測之間的改變情形，及其代表的意義。

一、內化層次

內化層次對應的線型函數內容為：

當給定一變數的值時，學習者有能力根據某個關係式找到另一個變數的值。

對應的題號分別是：1、2、3、4、5、6、7、8、9、11 共有 10 題。

【表 4-22 線型函數概念內化層次各題答對率一覽表】

題號		1	2	3	4	5	6	7	8	9	11
前測	答對人數 (人)	530	511	501	510	447	316	424	413	504	516
	答對率 (%)	93.97	90.6	88.83	90.43	79.26	56.03	75.18	73.23	89.36	91.49
後測	答對人數 (人)	537	513	507	521	441	418	474	472	526	524
	答對率 (%)	95.21	90.96	89.89	92.38	78.19	74.11	84.04	83.69	93.26	92.91

本層次各題的答對率都在七成以上，其中有五題更高達九成以上，顯示多數的學生可以處理代入求值的相關問題。另一方面，從表 4-22 中的數據可知，答對率低於九成的也有五題，從學生選擇的答案選項可以歸納幾項錯誤類型。

(一) 自變數與應變數之間因果關係的混淆

(1) 將 y 的值當成 x 的值：本層次的題目中只有第 5 題的答對率，後測比前測

低，應該是與強調「對於任意給定的一個 x 值，都恰有一個 y 值與它對應」有關，也就是先給的都是自變數 x 的值，然後去求 y 值，因此在後測第 5 題題目是「設 $y=f(x)=-3x-2$ ，則當 $y=4$ 時， $x=?$ 」時，將 $y=4$ 當成自變數 x 的值為 4，代入方程式中，得出 -14 的值，而選 A -14 的答案。

(2) 以 x 的值當作常數函數的函數值。

例如：後測第 6 題的題目是「設 $y=f(x)=1$ ，則當 $x=4.8$ 時， $y=?$ 」，

學生選「4.8」。

(二) 等量公理的錯誤使用

(1) 等量公理的使用順序錯誤。

例如：前測的第 3 題，錯誤發生在步驟二。

步驟一：將 $y=9$ 代入，得到「 $9=2x+3$ 」

步驟二：將 x 的係數和等號左邊的常數除 2，得到「 $9\div 2=x+3$ 」

步驟三：將常數項移到等號的同一邊，得到「 $4.5-3=x$ 」

步驟四：得「 $x=1.5$ 」，答案因此選擇選目 A

(2) 移項時未變號。

例如：後測第 5 題，錯誤發生在步驟二。

步驟一：將 $y=4$ 代入，得到「 $4=-3x-2$ 」

步驟二：將常數項移到等號的同一邊，得到「 $4-2=-3x$ 」

步驟三：等號兩邊同除 -3，得到「 $-\frac{2}{3}=x$ 」，答案因此選擇選目 C

(三) 分配律的錯誤使用

(1) 展開時的錯誤：

a. 忽視文字符號

例如：後測第 7 題，題目的代數式是「 $k(x)=3(x+1)-5$ 」，學生先將括號展開，

忽視等號右邊的文字符號，得到「 $k(x)=3\times 1-5$ 」，再將 $x=-1$ 代入得到
 「 $k(-1)=3-5=-2$ 」

b. 忽視性質符號

例如：前測第 7 題，在計算「 $3(-1+1)-2$ 」時，常常有學生把括號內的負號
 忽視了，寫成「 $3\times 2-2$ 」。答案因此選擇選目 D

(2) 提出負號時的錯誤：

例如：前測第 4 題，提出負號時，後項的負號未提出，得到「 $-5\times 2-3=-(10-3)$
 $=-7$ 」，答案因此選擇選目 B

二、壓縮層次

壓縮層次對應的線型函數內容為：

學習者能將「線型函數」兩變數間的對應或變化過程濃縮成一個整體。

又可分成兩個部分討論：

1. 能利用文字符號列出兩個變數間的關係式

對應的題號分別是 10、12、13、14、30：共有 5 題。

【表 4-23 線型函數概念壓縮層次各題答對率一覽表 (1)】

題號		10	12	13	14	30
前測	答對人數(人)	447	509	513	449	220
	答對率(%)	79.26	90.25	90.96	79.61	39.01
後測	答對人數(人)	482	476	451	463	294
	答對率(%)	85.46	84.4	79.96	82.09	52.13

在列關係式的時候，以「函數機器的表徵轉換到代數式的表徵」，「文字敘述
 的表徵轉換到代數式的表徵」時的答對率較高，都有七成以上的答對率；「圖形

的表徵轉換到代數式的表徵」時的答對率較低，前測時不到四成，後測時也只有五成多的答對率。顯示在表徵的轉換時，學生在「圖形表徵」與「代數式表徵」之間的轉換並非容易的，說明如下：

(1) 文字敘述的表徵轉換到代數式的表徵發生錯誤：

a. 對公式的陌生。

例如：速度的公式寫成「距離乘時間等於速度」。

b. 自變數與應變數之間的因果關係混淆。

例如：不選正確的「 $y=15-x$ 」，選擇「 $y=x-15$ 」。

(2) 圖形的表徵轉換到代數式的表徵發生錯誤，學生還沒有能力將所給的過程視為整體，而不考慮其間的細節。

例如：a. 以 x 坐標和 y 坐標的比值當作自變數係數。

b. 以 x 坐標當作自變數係數。

c. 以 y 坐標當作自變數係數。

2. 能在坐標平面上畫出線型函數的圖形

對應的題號分別是 15、16、17：共有 3 題。

【表 4-24 線型函數概念壓縮層次各題答對率一覽表 (2)】

題號		15	16	17
前測	答對人數 (人)	250	315	372
	答對率 (%)	44.33	55.85	65.96
後測	答對人數 (人)	443	385	460
	答對率 (%)	78.55	68.26	81.56

本類型的四個題目，後測時，學生的答對率分布在六成至八成之間，顯示這類型的題目，是屬於中難度的試題。壓縮和物化層次的學生在此看待圖形，多能以代數式的某個特徵對應圖形的特徵，直接判斷正確的圖形 (例如：缺常數項的

代數式，對應直線的圖形會通過原點。缺一次項的代數式，對應直線的圖形會平行 x 軸)，並不需要實際將線型函數的圖形畫出來。

而部分學生無法將代數式表徵轉換成圖形表徵，發生錯誤的原因要從解題步驟探討。一般在內化層次的學生的解題步驟如下：

步驟一：檢視線型函數的代數表徵 $f(x)=mx+k$

步驟二：任取兩個 x 值 a 、 b

步驟三：計算函數值 $f(a)$ 、 $f(b)$

步驟四：寫出有序數對 $(a,f(a))$ 、 $(b,f(b))$

步驟五：在直角坐標平面標出代表 $(a,f(a))$ 、 $(b,f(b))$

步驟六：將直角坐標平面上代表 $(a,f(a))$ 、 $(b,f(b))$ 的點連成一直線

平時在學校觀察，有些學生在步驟二時，會列表如右。

採用這種策略的學生通常會在題目是常數函數（如前測

x	0	
y		0

第 17 題)，或圖形通過原點時（如前測第 15 題）產生困擾。

步驟七：最後將所畫出的圖形與選目作比較，然後選出答案。

根據以上的解題步驟，學生產生的錯誤類型有三種：

- (1) 在步驟三發生計算錯誤。
- (2) 在步驟四將代表坐標的數對中，將自變數和應變數的順序寫反了。
- (3) 在步驟五將坐標點的位置標示錯誤。

三、物化層次

物化層次對應的線型函數內容為：

學習者能夠研究線型函數的一般性質、與其表徵之間的各種不同關係；並且能夠處理其相關問題。

又可分成三個部分討論：

1. 能了解 $y=f(x)=ax+b$ 中的係數 a 、 b 的性質與函數圖形特徵的關聯性

對應的題號分別是 21、22、24、29：共有 4 題。

【表 4-25 線型函數概念物化層次各題答對率一覽表 (1)】

題號		21	22	24	29
前測	答對人數 (人)	199	304	289	252
	答對率 (%)	35.28	53.9	51.24	44.68
後測	答對人數 (人)	279	295	349	340
	答對率 (%)	49.47	52.3	61.88	60.28

本類型的四個題目，學生的答對率分布在四成至六成之間，顯示這類型的題目，是屬於中難度的試題。大致說來學生的錯誤類型與解題策略有下列幾種：

(1) 認為文字符號是未知數，所以無法判斷其正負。

例如：前、後測的第 21 題，題目中的線型函數是 $f(x)=ax+b$ ，學生無法從圖形的方向和位置，判斷 a 、 b 所代表的意義（ a 的正負與直線圖形的方向有關， b 的正負與直線圖形和 y 軸相交處的位置有關）。

(2) 未能分辨變數與常數：

不知道圖形平行 x 軸所代表的代數意義（自變數為變數，應變數為常數）。學生以為線形函數的圖形平行 x 軸的代數式 $f(x)=k$ ， k 的值就是 x 坐標的值。以變數概念物化的特徵「能從不同的表徵去理解變數」來看，發生此類錯誤的學生，以為「常數」代表不變的數，以至於將「常數」和「變數」當作兩個相對的物件，無法將「常數」視為變數。

例如：後測的第 22 題，學生以為圖形平行 x 軸，且經過(3, 2)時 x 坐標的值是變動的， y 坐標的值是不變的。函數又有變數的關係存在，因此以 x 坐標的 3 為函數值，最後選擇 $f(x)=3$ 為其答案。

(3) 無法體會 $y=ax$ 中， a 的大小與直線斜率的關係。

例如：後測的第 29 題，由於題幹的圖形上並未給予任何的數字或坐標，約有四成的學生並不能從圖形直接判斷，係數大小與直線的斜率有關。

(4) 無法將代數式表徵轉換成圖形表徵。

例如：後測的第 24 題，約有四成的學生並不能從代數式中係數的正負情形，直接判斷圖形的斜率、圖形的位置。

2. 能知道線型函數的非例

對應的題號分別是 18、19、20：共有 3 題。

【表 4-26 線型函數概念物化層次各題答對率一覽表 (2)】

題號		18	19	20
前測	答對人數 (人)	145	176	169
	答對率 (%)	25.71	31.21	29.96
後測	答對人數 (人)	174	355	399
	答對率 (%)	30.85	62.94	70.74

學生對於判斷線型函數的非例有困難，前測時對於關係式的圖形是否為直線，都只有三成左右的答對率。經過線型函數的學習之後，第 18 題的答對率仍在三成左右。

主要的原因是，學生認為 $y=f(x)=x^2$ 是線型函數，理由是「因為代入一個 x 值，可以得到一個 y 值」(但這個理由只能檢驗是否為函數，不足以檢驗是否為線型函數)。第 18 題選擇 B 的學生，絕大部分在第 19 題是選擇 C，當中的原因應該是跟課本所舉的例子有關，課本雖然是將「 $y=f(x)=x^2$ 」當作是線型函數的非例，但是學生還是認為函數就是線型函數，而以函數的定義檢驗，沒有考慮到圖形的特徵。同樣的檢驗方式在第 19 題是適用的，因此第 19 題的答對率較高。

後測時，第 20 題的答對率達到七成，顯示經過線型函數的學習之後，學生

判斷常數函數是否為線型函數的答對率增加了。主要的錯誤類型是，常數函數中等號的右邊沒有 x ，認為等號的右邊沒有 x 的式子就不是線型函數，因此學生選擇了選目 B。

3. 能將 $y=f(x)=ax+b$ 當作物件來操作

對應的題號分別是 23、25、26、27、28：共有 5 題。

【表 4-27 線型函數概念物化層次各題答對率一覽表 (3)】

題號		23	25	26	27	28
前測	答對人數 (人)	267	319	407	264	424
	答對率 (%)	47.34	56.56	72.16	46.81	75.18
後測	答對人數 (人)	398	375	468	443	344
	答對率 (%)	70.57	66.49	82.98	78.55	60.99

本類型的五個題目，學生的答對率分布在六成至八成之間，顯示這類型的題目，是屬於中、低難度的試題。大致說來學生的錯誤類型與解題策略有下列幾種：

(1) 以為圖形與 x 軸的交點坐標，交點的 x 坐標就是 0。

例如：在前測第 23 題，求 $y=-2x+4$ 的圖形與 x 軸的交點時，學生以 $x=0$ 代入代數式中，得到「 $y=4$ 」，因此選擇選目 B (0, 4)，當作他的答案。

(2) 自變數與應變數之間的位置混淆。

例如：在後測第 26 題，在將 $(-1, 3)$ 代入函數 $f(x)=2x+k$ 時， -1 代到等號左邊， 3 代到等號右邊，得到「 $-1=2\times 3+k$ 」，最後得「 $k=7$ 」。

(3) 移項法則的錯誤使用。

例如：在後測第 26 題，在將 $(-1, 3)$ 代入函數 $f(x)=2x+k$ 後，得到「 $3=-2+k$ 」，之後將未知數移到等號左邊，常數項移到等號右邊，移項時包含未知數的項未變號，後得到「 $k=-2-3$ 」，最後答案選擇選目 B -5

(4) 以為 $ax+b$ 中的 a 就是自變數的值， b 就是應變數的值。

例如：後測的第 27 題，題目內容為「線型函數 $f(x)=ax+b$ 的圖形通過 $(0, -4)$

和 $(2, 0)$ 兩點，則 $(a, b)=?$ 」

學生以 $(2, 0)$ 的 x 坐標當作 a ，以 $(0, -4)$ 的 y 坐標當作 b ，最後答案

選擇選目 c $(2, -4)$

第五節 學生線型函數概念層次與變數概念層次的關係

為了瞭解學生線型函數概念層次與變數概念層次之間的關係的確實情形，因此對學生概念安置的層次進行分析，並且針對概念安置的層次在前、後測之間的變化作相關係數。希望分析的結果，可以回答本研究的研究問題「國二學生線型函數的學習對變數概念發展是否有關？」。

一、線型函數概念與變數概念之間的相關性

本節採用斯皮爾曼等級相關 (Spearman rank correlation) (林清山, 民 81)，來探討線型函數概念與變數概念之間的相關性。研究者保留四次測驗都沒有缺考的學生資料共 564 筆，將學生概念安置的層次分為內化前、內化、壓縮、物化等四個層次，分別以 0、1、2、3 等四個等級分數代替，代入積差相關的公式，得到表 4-28 的結果。

【表 4-28 線型函數概念與變數概念之間的等級相關係數】

		積差相關	df=562
變數前測	變數後測	0.758	t=27.519
變數前測	函數前測	0.616	t=18.543
變數前測	函數後測	0.672	t=21.538
變數後測	函數前測	0.624	t=18.925
變數後測	函數後測	0.666	t=21.186
函數前測	函數後測	0.636	t=19.553

虛無假設應是 $H_0: r=0$ ，代表兩次測驗成績零相關。將變數前、後測、線型函數前、後測等四次測驗，兩兩組合得到六種組合方式，以積差相關的統計方法計算，相關係數的 t 值全部大於查表的 $t_{.99(\infty)}=2.326$ ，所以我們拒絕 $H_0: r=0$ 。換

句話說，在表 4-28 中，將變數前、後測、線型函數前、後測等四次測驗，兩兩組合得到六種組合方式，進行相關係數的計算結果皆達到統計上 $\alpha=.01$ 的顯著水準，相信學生在變數概念的發展層次與線型函數概念的發展層次，兩者之間存在著正相關。

二、「線型函數」學習前，變數概念層次與線型函數概念層次的關係

在學習「一次函數及其圖形」之前實施線型函數概念測驗與變數概念測驗，本研究的四次測驗都沒有缺考的學生資料共 564 筆，剔除錯誤樣本人數剩餘 548 人，依蒐集所得的資料安置學生的線型函數概念層次與變數概念層次，各概念層次人數分布情形如表 4-29：

【表 4-29 線型函數概念與變數概念前測之各層次對應人數一覽表】

		線型函數概念測驗前測				
		內化前	內化	壓縮	物化	總計
變數 概念 測驗 前測	內化前	58	21	6	0	85
	內化	22	65	33	0	120
	壓縮	5	77	130	42	254
	物化	0	10	40	39	89
	總計	85	173	209	81	548

從表 4-29 的數據我們可以從兩個方向（橫向及縱向）來探討，每個方向又可根據四個概念層次分別說明線型函數概念層次與變數概念層次之間的關係。

經過雙向的分析之後我們可以得到：

在學習「一次函數及其圖形」之前，變數概念在內化前、內化及壓縮的學生，線型函數概念層次有集中的現象。

（一）變數概念在內化前的學生，線型函數概念集中在內化前。

（二）變數概念在內化層次的學生，線型函數概念集中在內化層次。

- (三) 變數概念在壓縮層次的學生，線型函數概念集中在壓縮層次。
- (四) 變數概念層次在物化的學生，線型函數概念層次沒有集中的現象，大致平均分布在壓縮和物化兩層次。

另一方面，線型函數概念層次內化前和壓縮層次的學生，變數概念層次有集中的現象。

- (一) 線型函數概念層次在內化前的學生，變數概念層次集中在層次內化前
- (二) 線型函數概念在壓縮層次的學生，變數概念集中在壓縮層次。

線型函數概念內化和物化的學生，變數概念層次沒有集中的現象。

- (一) 線型函數概念在內化層次的學生，變數概念大多分布在內化、壓縮層次。
- (二) 線型函數概念在物化層次的學生，變數概念大致平均分布在壓縮和物化層次。

綜合上述各點，可以得到下面結論：

學習「一次函數及其圖形」之前，

1. 變數概念層次越高的學生其線型函數概念層次也越高，但是物化層次的學生例外。
2. (1) 線型函數概念層次在內化、壓縮、物化的學生其變數概念層次以在壓縮層次的最多。
(2) 線型函數概念層次在內化前的學生其變數概念層次以在內化前的最多。

三、「線型函數」學習後，線型函數概念層次與變數概念層次的關係

在學習「一次函數及其圖形」之後實施線型函數概念測驗與變數概念測驗，本研究的四次測驗都沒有缺考的學生資料共 564 筆，剔除錯誤樣本人數剩餘 547

人，依蒐集所得的資料安置學生的線型函數概念層次與變數概念層次，各概念層次人數分布情形如表 4-30：

【表 4-30 線型函數概念與變數概念後測之各層次對應人數一覽表】

		線型函數概念測驗後測				
		內化前	內化	壓縮	物化	總計
變數 概念 測驗 後測	內化前	47	29	6	0	82
	內化	7	39	30	15	91
	壓縮	2	28	89	131	250
	物化	1	3	15	105	124
	總計	57	99	140	251	547

從表 4-30 的數據我們可以從兩個方向（橫向及縱向）來探討，每個方向又可根據四個概念層次分別說明線型函數概念層次與變數概念層次之間的關係。

經過雙向的分析之後，我們可以得到初步的結論，在學習「一次函數及其圖形」之後，變數概念層次內化前和物化層次的學生，線型函數概念層次有集中的現象。

（一）變數概念層次內化前的學生，線型函數概念層次集中在層次內化前。

（二）變數概念物化層次的學生，線型函數概念層次集中在物化層次。

變數概念內化、壓縮層次的學生，線型函數概念層次沒有集中的現象。

（一）變數概念內化層次的學生，線型函數概念層次大多分布在內化、壓縮層次。

（二）變數概念在壓縮層次的學生，線型函數概念層次大多分布在壓縮、物化層次。

另一方面，線型函數概念層次內化前和壓縮層次的學生，變數概念層次有集

中的現象。

(一) 線型函數概念層次在內化前的學生，變數概念層次集中在層次內化前

(二) 線型函數概念在壓縮層次的學生，變數概念集中在壓縮層次。

線型函數概念內化和物化的學生，變數概念層次沒有集中的現象。

(一) 線型函數概念在內化層次的學生，變數概念大多分布在內化前、內化、壓縮層次。

(二) 線型函數概念在物化層次的學生，變數概念大多分布在壓縮和物化層次。

綜合上述各點，可以得到下面結論：

學習「一次函數及其圖形」之後

1. 變數概念層次越高的學生其線型函數概念層次也越高，但是壓縮層次的學生例外。
2. 線型函數概念層次越高的學生其變數概念層次也越高，但是物化層次的學生例外。