

梁淑坤（2020）。

數學是人文活動的結果：分享數學遊戲案例的故事。

臺灣數學教師，41（1），40-52

doi: 10.6610/TJMT.202004_41(1).0003

數學是人文活動的結果：分享數學遊戲案例的故事

梁淑坤

國立中山大學教育研究所

108 綱要總綱重視跨領域以及人文關懷，本文就筆者的一次教師研習課程（數學遊戲教材教法），分析上課時教學行動的資料，包括：照片、學習單、札記及學員日記，呈現出一些人文活動結果及比較不同參與者的異同（梁淑坤，2008，2015 2019），其中有七巧板、統計圖表、公平的交易（單位的換算）和四面八方。另外，筆者也分析學員自編活動案例，於上課後口頭報告再以文字紀錄改編的 4 個數學遊戲設計。以上的隨堂活動事例及課後分析，呈現出數學是人文活動的教師專業發展案例，供師培及在職進修國小數學課程設計的參考（Math as human activity；見 Freudenthal, 1973）。

關鍵詞：人文活動、師資專業發展、數學遊戲

壹、前言

本文是一個數學教學案例分享，筆者乃師資培育者，常為中小學教師研習擔任講師，包括共同備課、教學演示及共同議課。無論是任教大學的師資生、在職教師、家長或是中小學生等，其教學策略加入個人特別研擬的隨堂活動，均以分組進行，使組員互動，完成任務後向同儕報告結果，整合所有結果與全班分享，形成後一起學習成長的共識域（consensus domain）。本文是其中一個案例，參與者是在職小學教師，學員來自不同地區，共完成 12 節數學遊戲教材教法的課程。由於資料宏大，本文僅供針對部分資料分析及報告。感謝教師們上課熱烈討論及認真付出，筆者留下文字記錄，與沒有參加這一次課程的教師分享結果。

貳、緣起

荷蘭學者弗賴登塔爾（Freudenthal, 1973）說過，數學是人文活動（Math as a human activity）。筆者在任何一個教學歷程，力圖加入「數學人文活動」的精神，令數學學習成為一個動人的活動過程，如同鋼琴的鍵盤，要動手動腦去玩（play），學習數學倘若只接受結果而不理會過程，就會使數學的學習失去意義。

筆者採數學是人文活動取向，是參考荷蘭數學家及數學教育家 Hans Freudenthal 對課程討論的主張，載於 Gravemeijer & Ternel（2000）文章中。荷蘭馳名的 RME（Realistic Math Education）對傳統教數學方法起了很大的改革方向，過去在教數學時，一般教師均有操作性目標、固定的評量手法甚至標準的測驗。可是，到現今世代的數學教育取向，Freudenthal 的 RME 想法已被普遍的採納。RME 重視真實（想象）性的數學教育，Freudenthal 同時受到歐洲當時的”Didaktik”及”Bildung”主張，認為教育的理想，就是人格的形式（personality formation）而不是單純的傳授知識（transmission of knowledge）。

對 Freudenthal 而言，課程理論不是固定、預先指定的目的及手法、教材和教法，而是和過程相關的（related to process）且可允許改變及發展的東西。

舉例來說，教師研習的課程是「數學遊戲的教材及教法」，除了連結課程標準解讀，更有教學內容分析與編擬遊戲技巧、遊戲執行的要領、撰寫想法以及教學生如何去學習等等。身為教師，如何想像學生能否透過「玩」去學習？

對數學是人文活動而言，教數學是要教學生做數學（Mathematizing）。Freudenthal 認為數學起始是一個活動，一個人文活動，而做數學（doing math）的過程比數學現成品（ready-made product）來得重要。Polya（1945）也提到做數學的重要性（Math in the making）。因此，Freudenthal 認為先教結果後教活動就是顛倒了教學（Gravemeijer & Terwel 2000, p.780）。若是採用數學是人文活動主張的話，應該展示的是教學者和學習者共同解題，一起發現問題並能把數學知識組織起來的教學過程。

為了讓學員理解其中的道理，筆者會刻意安排時間帶領遊戲的實作，筆者認為加入課程的實作（配合學習單、操作材料），可以整體呈現課的重點，包括課程地圖、遊戲編擬、執行要領、場地佈置、教具的選取及製作、活動的編寫原則、學習單的設計以及難易度的調整。筆者引導教師是用推介的數學方式帶領教師，不只是心動，而是要行動。

玩，要玩出數學的魔力！

玩，要玩出數學的學習力！

參、師生共學形成人文活動故事四則

在某一次工作坊，筆者準備了學習單以及操作材料，這些材料是「低結構」的，能夠供老師們做各種操作，從而吸納老師們創新的想法。靜態的物料配合生動的遊戲設計，企圖引領工作坊老師多姿多彩的創意，演繹出一個個學習故事。

好的教育，一定會有學習故事發生，因為教育是人與人之間的交往，數學教學，也可以是「人文活動」。

一、百變七巧板（圖形）-（梁淑坤，2008，頁 139）

遊戲玩法：每一位組員先各自用正方形紙折出七巧板（見附錄），剪下（亦可變換顏色），再各自拼出圖案，最後組員合力，根據組員拼出的圖案編寫故事並上臺發表。這個遊戲，把數學和編故事（語文、作文）結合在一起。而數學老師們，也都是「戲精」呢！下面三則成果，是到研習會場才相遇被別人分組的教師們「玩」出的故事：新小貓釣魚、貓咪與風箏和百變哪吒。

（一）新小貓釣魚



圖 1 教師用七巧板拚搭的衣服、小貓、帆船、魚和螃蟹

一隻穿著黃色衣服的小貓咪，肚子餓啦。它想找點食物吃，遠遠望去前面有一條河。咦！在河邊上停了一條小帆船。它開心極了，一下子跳到了小帆船上，划到了河中間。可是他想呀！「咦……我怎麼釣到魚呢？」於是，它把尾巴放到了水裡，想用尾巴釣上一條魚，可是魚沒上鉤，卻被螃蟹給夾住了尾巴！

(二) 貓咪與風箏

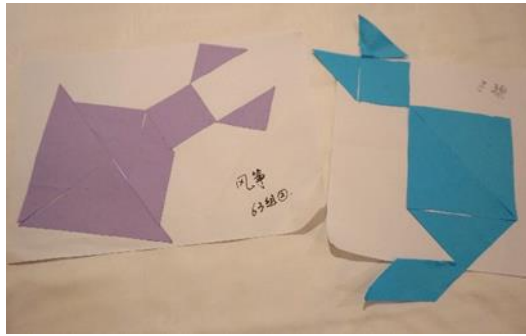


圖 2 故事由兩位老師創作，二人上台時以對話的方式講述。

貓咪：秋高氣爽的天氣，貓小飛在路上走著，他的心情太低落了，他覺得生活很無聊！走呀走呀走呀，突然，看到天空飄來了一個影子。哇！是漂亮的風箏！他在想：風箏，你在天上的生活應該特別美好吧！（突然把麥克風交給另一位老師）。

風箏：（愣住）對呀！——怎麼突然輪到我說話（看來兩人有即興發揮，大家大笑）但是，我看你在地上跑著，可以跟很多朋友說話、聊天，然後做遊戲，我覺得你的生活也很美好。

貓咪：那麼，我們就來換換角色？

風箏：好呀！我們換一下角色吧！（兩位老師交換自己的作品表示角色交換）

貓咪：我就變成了一隻風箏，在天上游呀游，飄呀飄！忽然，烏雲來了，天空開始下雨了，還伴隨著雷電交加。哎呀！媽呀！我就被擊中了！哎呀呀！旁邊的小鳥，還來啄我！原來，天上的生活並不是那麼好玩的！唉！原來風箏的生活也沒有麼好玩呀！

旁白（扮演風箏的老師）：風箏在地上，也失去了他的色彩，所以他們最後還是決定換回他們的身分，因為屬於自己的生活才是最美好的（大家都鼓掌）。也祝福我們所有的夥伴們：「做最好的自己就是最好的。」

(三) 真身之「百變哪吒」



圖 3 續寫了哪吒故事，學員拼出哪吒、樹、蛇、貓、飛魚。

大家都知道剛上映的電影中，哪吒最後失去了他的肉身，只剩下了靈魂。這個時候，太乙真人找了他的祖師爺救了哪吒。之後，哪吒有一次喝醉了酒，被壞

人設計陷害變成了一棵樹，不能動彈！這個時候，太乙真人拋出了三個妖孽（拼成蛇、貓、飛魚的老師招手示意，大家哄堂大笑），指揮哪吒去降服。因為哪吒已經失去真身，所以還沒能力再變成人形，所以降伏這三個妖孽就暫時獲得靈魂的寄存處，獲得了三個新的真身。最後，哪吒成為一個百變哪吒。

分析

同樣的活動，由不同的參與者嘗試，其結果會有所不同。首先，第一則「新小貓釣魚」故事和原來的不同，由於筆者令學員先拼圖，到組員拼完取名後，才知道要用所有組員拼的圖去創故事，因此，故事就安排魚就被螃蟹吃掉算了。第二則「貓咪和風箏」有說教的部份~「我們不必羨慕他人，要滿意自己的身份」。學員（教師身份）結論出「做最好的自己就是最好的」是非常有教育價值的故事。這與梁淑坤（2008，頁 148-149）的「自由的快樂」故事有同樣的效果，那一則故事，由小學高年級學生拼出魚、人、魚缸、家及橋，故事是說小孩抓魚返家養，看到魚不快樂就放回溪中給小魚自由，小魚才會快樂，這簡單的拼七巧板活動可以被變成寓言的編寫。最後一則是哪吒，七巧板可以與有名的神話結合。以上事例結合數學、美學、語文等多領域，非常配合 108 綱要的跨領域精神。

二、人體長條圖（統計）-（梁淑坤，2015，頁 55）

遊戲玩法：把一年 12 個月分成四季，春（1-3 月），夏（4-6 月），秋（7-9 月），冬（10-12 月）——這裡不求科學層面的準確，只是相對定義；各找一位在不同季節出生的老師作為每個季節的代表，大家根據自己生日的季節分別記住各自的代表是誰；從二樓會場下到一樓大廳，代表舉起「春夏秋冬」的牌子，所有老師根據自己的生日分別站在牌子後面，形成直直的隊伍；向二樓微笑、拍照，留下「人體長條圖」的照片，如圖 4。

這個遊戲安排在上半學習的最後，前面的內容比較燒腦，恰好可以提前結束，讓所有的老師都離開會場活動一下。這個遊戲也是在示範「遊戲場地佈置」中如何根據會場條件設計遊戲活動。長條圖（條形統計圖）不用紙筆去畫，用身體排出來這樣體驗一次，卻給老師們留下深刻的印象——研習老師們紛紛把照片發朋友圈。為了這個小活動，主辦方提前一晚製作標牌，筆者提前查看場地，計算人數安排間距，估算能否站下所有老師……。



圖 4 人體長條圖

分析

梁淑坤（2015，頁 55；2019，頁 47）以堆饅頭來做統計圖表，這次場地允許及研習教師合作，成功的用身體堆出長條圖。任課教師當天的應變臨時起意加此活動，令大家有難忘的人文活動，也很生活化，找出冬天這季節最多人生日。

三、公平的交易（量）-（梁淑坤，2015，頁 111）

遊戲玩法：玩牌時，抽出一張，正反面寫不同大小的單位，雙方要講出答案；若為相等，握手說：「公平的交易」；若不相等，則不握手，說：「我不跟你交易」；兩位玩家自己決定先後順序再抽牌玩。例如：牌正面是（ ）星期，背面是（ ）日，甲方先說「3 星期」，乙方再說「21 日」，則甲方則可喊「公平的交易」並和乙方握手。

這個遊戲可以用於各種量的互換上，還可以用在等值分數以及分數小數等的互換上。在現場，老師們針對量的連續換算，還發明了多人玩法，比如 600 秒換成 10 分鐘是一次公平交易，10 分鐘換成 $\frac{1}{6}$ 小時又是一次公平交易；還有老師也發明出逆向玩法，比如，小時換分鐘，再換秒；如此一來轉圈玩法也出現了，比如，4 個人圍成圈，大換小、小換大，最大的單位（天）和最小的單位（秒）是相鄰的兩個人，也要交易一次。

老師們還自己製造新牌，如下圖 5。

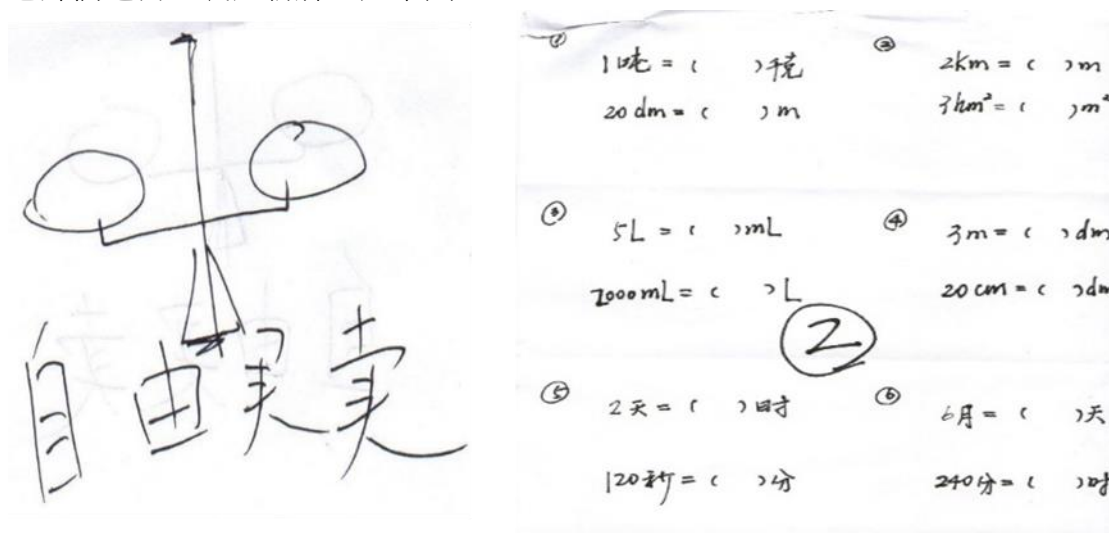


圖 5 公平的交易

分析

筆者前一項帶領活動是親子為參與者，這一次是教師為學員，於是加入發明新的交易卡及製作紙牌，大家除了玩指定的牌，也玩新發明新的換算單位的牌，筆者馬上檢查學員的創新效果。

四、四面八方（配對）

遊戲玩法：遊戲用的道具就是兒時的「東南西北」，用正方形紙折好（補充折法）；提前寫好不同的素材；利用手指指定變多下的操作得到不同的配對結果；根據配對結果進行進一步的遊戲。

筆者提供了 6 種配對情況（可說明），現場請學員發明新玩法，以下分享兩個結果。

（一）玩算數字（兩位數的加減）

玩法：每次選一個黑色數字和紅色數字（如下圖 6）；可以做一種運算計算（加/減/乘/除法）。例如： $18 + 7 = 25$ 、 $18 - 7 = 11$ 、 $18 \times 7 = 126$ 、 $18 \div 7 = 2\ldots 4$ 。

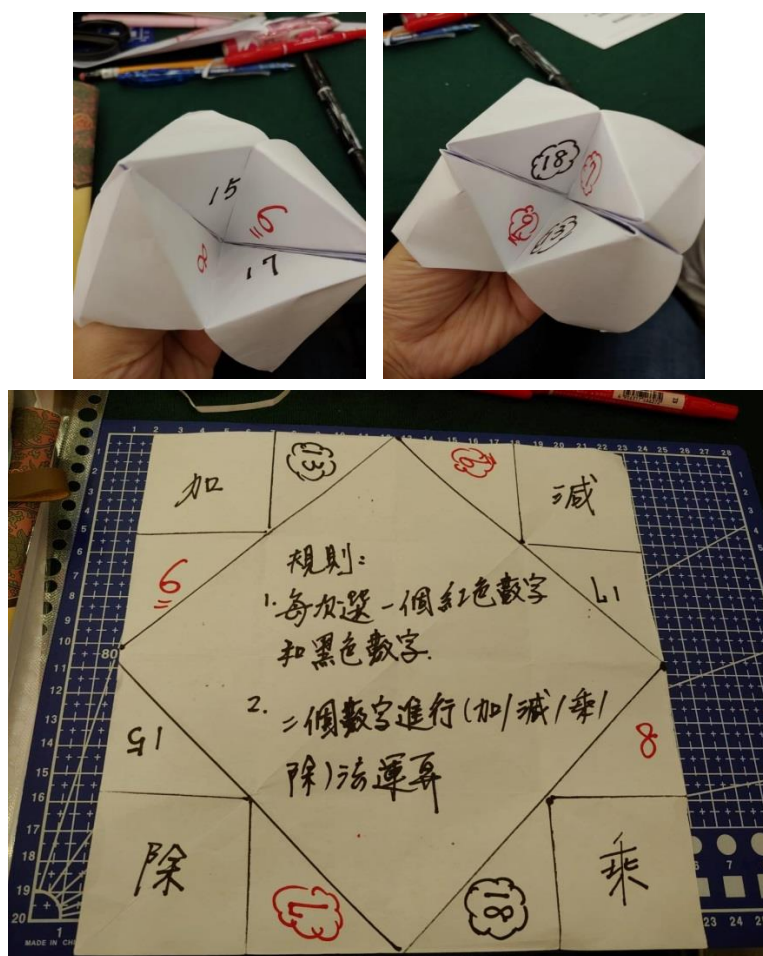


圖 6 玩算數字

（二）七夕配對（一一對應）

出自《孔雀東南飛》。

愛情故事總是和動物結合在一起，白蛇傳有白蛇、青蛇，牛郎織女有牛和喜鵲，梁山伯與祝英台有蝴蝶，想想第四個故事找什麼動物呢？咦！突然想到《孔雀東南飛》有個孔雀，特別巧！而且，前面三個結局是比較快樂的，哪怕是化蝶也很浪漫，最後一個故事卻世俗又悲慘。四個故事，配合摺紙，第一層設計是叫

做「我愛佳節」，第二層藏著的是「更愛佳人」（大家都鼓掌）——學員的設計很配合 8 月 7 日那一天（農曆七夕，中國情人節！）。沒想到，還有第三層呢！包藏在最裡面的是三個字：最愛你。真是太有創意了！



圖 7 七夕配對

分析

這活動在筆者個人網頁（<http://www2.nsysu.edu.tw/leung/home.html>）的親子成長班課程有介紹，由於參加者不是家長或學生而是教師，筆者延續此活動，請教師自創新的對應遊戲。

註：當天是農曆七夕，學員真有創意！

以上是筆者帶領的四個人文活動的真實故事。雖然筆者在別的研習也有帶領過以上的數學活動，活動內容一樣，但由不同學員完成，結果就會不同。而所謂「人文活動」，本就意味著老師把自己的感情、想法、趣味、創意融合進去！

數學～是人文活動，以上事例可以證明，不單只是學童，連教師也能玩出數學力！

下面是學員自編活動的案例，經筆者修改後呈現。

肆、學員自創遊戲四則

工作坊第三天，是學員自己編擬新的數學遊戲，限於篇幅，筆者只選 4 個分享於下。

一、步步為營（20 以內的加減）

兩位一年級小朋友在一端並列站好，老師站好在另一端（約 5-8 步），二人

看數學題一起，誰最先搶到正確答案就向前一步，誰最快走到老師的位置，則為贏家，將會得到小獎品。

“Are you ready? $5+12$ 、 $7+10$ 、 $19+1$ 、 $16+3$ 、 $8+9$ 、 $13+7$ 、 $7+6$ 、 $18-6$ ……”
老師示範遊戲的玩法。

第一輪加減法遊戲決出勝負之後，下面同學還想繼續參加的，就可以換下獲勝學生，獲勝學生可以做小老師出題，直到被新的獲勝者替代。

二、大比拼、快搶分（20 以內的加減）

（一）玩法 1：速算大比拼

一個同學拿著一疊卡片給另一個同學測試，卡片問題如下表 1 呈現。

表 1
速算大比拚

卡片 正面問題	(答案)	卡片 反面問題	(答案)
$3+17$	(20)	$20-17$	(3)
$7+8$	(15)	$15-8$	(7)
$7+7$	(14)	$14-7$	(7)
$9+8$	(17)	$17-8$	(9)
$15-6$	(9)	$9+6$	(15)

一年級的小朋友，怎麼能快速判斷計算結果是否正確呢？答案就在它的反面。例如，正面的問題為 $3+17$ ，背面就是 20，題目可以根據需要設計。所以兩個學員在玩的時候，同學 A 答出答案，同學 B 馬上就能判斷出他是否是正確的，如果 A 回答的正確，這張卡片就給 A。最後看看 A 能得多少張卡片。這個玩法可以測出孩子對 20 以內加減法的熟練度，玩的同時也可以評量。

（二）玩法 2：搶分達人

可以設置裁判員，玩的兩人搶答卡片上的問題，回答得又快又對的人就把卡片拿走，最後看誰得的卡片較多。若想升級，可以將搶到的分數相加，分多的就贏。在剛才的搶牌遊戲中，遊戲者為小朋友的話，則可以同時搶；若是小朋友跟老師搶，或者是放學後小朋友回家跟家長練習這個遊戲的話，家長可以在想出答案後，以敲桌的形式，敲一次或者兩次讓孩子時間，然後讓孩子再來搶。

三、大富翁之小小投資家

我們這一組把原來用整數玩的大富翁，改成六年級學生玩的——應用百分數的大富翁。學生可以用計算器來算，保留兩位小數，具體如圖 8。

基本的設置有：起點本金 100 萬、銀行利息 5%、命運（漲停、跌停）、銀行投資 6%、凍結一次、炒股+50%、機會（縮水、增值）、投資成功+20%、投資虧損-10%、期貨交易+50%、基金交易-20%、炒股失利、黃金交易+20%、慈善贊助-20%。

(百分數的應用) (六年級-用計算機算)		姓名:		
投資虧損 -10%	期貨交易 +10%	命運 ?	基金交易 +20%	炒股失利 -60%
投資成功 +20%	金融有風險 投資須謹慎 機會:縮水 20%/增值 30% 命運:停/漲 20%/跌停 10%			黃金交易 +20%
機會 ?				機會 ?
炒股成功 +50%				慈善贊助 -20%
凍結 一次	融資銀行 利息 6%	命運 ?	工商銀行 利息 5%	起點 本金 100 萬

圖 8 百分數大富翁

四、左右握握手（100 以內的數）

方框裡面填 100 以內的數，圓圈裡面填加或減號，4 個人一組，可以不按順序填，你想填哪就填哪，要填上 100 以內的數：□填數字，○填「+」、「-」。

如果填的正確，小組就會一起喊一個口號：「左右握握手」。此遊戲可以擴展到分數、小數或者更大的數；圓圈裡面也不只局限於加法、減法，也可以填乘號或除號。然後有餘數的除法也可以，但是中間得寫一個除號。(如：□ ÷ □ = □……□)。

分析

第一個遊戲(步步為營)是從 1 年級 20 以內的加法教材設想，由於「+」、「-」和數字的計算很乾燥無趣，設計教師改為 2 人比賽往前走，好動的小孩，除了會算，也要協調手腳，一步一步往前走，直到目標，使無趣的數字計算變得好好玩。

第二個遊戲（大比拼、快搶分），目標教材為加減互逆，共 2 個玩法可以多加練習，複習加減互逆。

玩法 1 的卡片，提供兩位數的加減，正反面巧妙安排，使得正確與否可以由兩位玩家互相檢查，不必找老師。另外，玩法 2 是可以升級，孩子玩遊戲時連結到家長，將學習數學，從學校延伸到家中。

第三個遊戲（大富翁之小小投資家）是六年級百分比的運用，結合六年級孩子喜歡的大富翁遊戲規則，非常方便，教師不用再發明如何玩，直接用大富翁的規則即可。至於題材，運用可以「增加」、也可以「減少」的情境，以圖 8 為例，增加的有銀行的利息、期貨以及黃金的交易。減少的情境也有，包括有投資虧損、股票失利以及捐款做公益。

第四個遊戲（左右握握手）這遊戲 4 人玩之前先握手，引來不少溫馨，四人填寫數字在式子裡，不用理會順序，只要填寫後，令「=」，左邊和右邊相等即可。背後的理念是加強孩子們的默契，既要自己填也要觀察別人填什麼，才能完成一個「=」式。

上述的遊戲都不複雜，在讀者看來可能會覺得也不是那麼巧妙，但關鍵是，經過工作坊的學習，老師們在嘗試把內容遊戲化，嘗試著把遊戲方法、遊戲精神融入到教學中。最重要的是，由口頭報告形成文字介紹自創遊戲，這是學員日記中表示很喜歡的實作，可以練習文字表達，非常珍惜，更說「得意已忘言」（載於日記）。學員認為遊戲的精神與教學方法及未來自編活動，和工作坊介紹給大家的具體的遊戲均有長遠的價值和意義。教師們在學習單或日記寫出遊戲設計的理念。

伍、人文活動的結後語

臺上臺下不分彼此，互助互愛，共同學習，共同創造，形成上述師生共學故事。紙短情長，筆者以這篇短文分享工作坊的成果與感受，期待教師們三天以來凝聚而產生的熱情，不因課程結束而曲終人散，而是能一直燃燒下去，並傳遞給孩子們。教師與孩子們牽手「玩」數學，玩出感情、玩出無限的數學力。

參考文獻

- Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, Springer Netherlands.
doi: 10.1007/978-94-010-2903-2
- Gravemeijer K., and Terwel J. (2000) Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory, *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777-796
- Polya, G. (1945). *How to solve it : a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

梁淑坤（2008）。**逃吧！數學瞌睡蟲**。臺灣：格子外面文化專業有限公司。

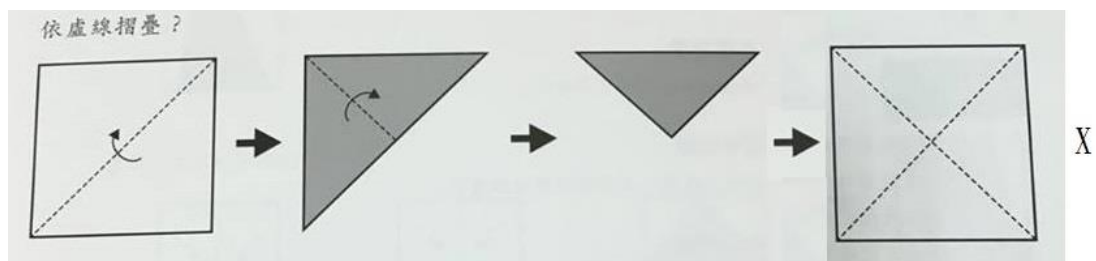
梁淑坤（2015）。**晚餐後，幸福的數學時光**。臺灣：格子外面文化專業有限公司。

梁淑坤（2019）。**嗨！我是好玩的數學遊戲**。中國：湖南科學技術出版社。【內容與梁淑坤（2015）相同，簡體字印刷】

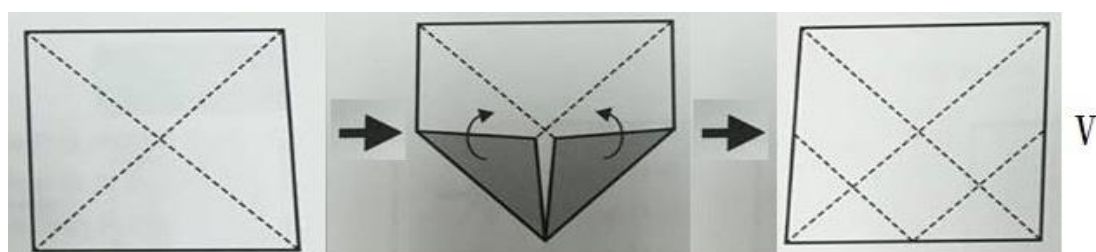
附錄 如何折出七巧板

折 $X \rightarrow V \rightarrow I$

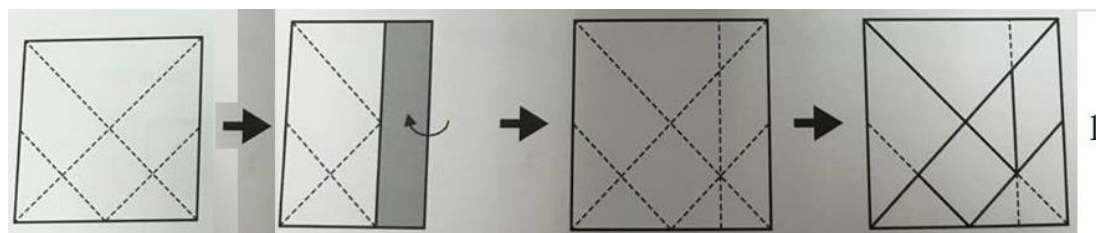
1. 先將色紙對折再對折---X



2. 再將右下角與左下角對準正方形中心---V



3. 將右邊直線往左最准中心折四分之一---I



4. 最後給予圖形編號 1~7

