

第二章 文獻探討

研究者根據研究目的，首先整理關於學生幾何思考發展之相關文獻，之後再針對有關圖形的文獻加以探討，從中得到學生對於幾何圖形瞭解之相關資訊，以瞭解其對幾何論證學習可能發生之影響。此外亦須蒐集學生幾何證明觀點及幾何證明課程與學習之相關研究成果及文獻，以作為學生進行合作學習之探究活動之活動設計依據。

本章據此分為五節：(一)幾何思維的發展、(二)圖形的概念定義與概念心像、(三)圖形的瞭解、(四)幾何證明之本質與層次(五)合作學習等，分別進行統整與探討。

第一節 幾何思維的發展

1. 幾何學發展過程

幾何學源自於古埃及和巴比倫的直觀幾何，一直到了古希臘時代(約西元前 600 至 300 年)，泰利斯(Thales) 試圖將幾何結果排成邏輯鏈條 (logical chain)；排在前面的可以推導出排在後面的，因此有了幾何證明的開端；到了西元前 300 年，歐幾里得(Euclid)編纂出幾何原本，由少數幾條公理 (axioms) 出發，推導出所有的幾何定理，而形成了較嚴謹的邏輯演繹系統結構，其次為十七世紀的射影幾何，以新的幾何觀點將古老的定理重證，最後才發展出十九世紀的拓樸學(蔡聰明，民 84)。

2. Piaget 的幾何思維層次

雖然幾何學的發展如上所述，但 Piaget 和 Inhelder(1956, 引自 Dickson, Brown & Gibson,1984)對於兒童空間概念發展的理論中，卻認為兒童的空間概念是相反地由拓樸空間概念開始。而 Piaget 所謂的拓樸空間則是將幾何特性區分出一個漸進式的差異，是一個全觀的特質，和大小及形狀無關，分為以下五個性質：(1)接近(nearness)(2)分離(separation)(3)次序(order)(4)包含(enclosure)(5)連續性(continuity)，然後經過一段時期才逐漸發展出射影幾何和歐氏幾何概念。(引自林碧珍，民 82)，Piaget 認為兒童在大約 3-4 歲時會開始發展出拓樸空間的概念，而到了 4-6 歲則是一個過渡的時期，一直要到約 6-8 歲才能發展出歐氏幾何的概念，因此 Piaget 認為兒童空間概念發展是和年齡的增長有關。

Piaget 認為這些拓樸的性質與射影幾何、歐氏幾何的差異在於其強調的是一個特定圖形的內在本質，而射影幾何則是牽涉到不同的圖形和物體之間的相互關係、歐氏幾何則是圖形和圖形之間的關係。另外 Piaget 和 Inhelder 也不認為人類有與生俱來的能力可以組織二度或三度空間的相關架構，甚至認為這個架構本身其實是歐幾里得空間發展的終點 (Clemnets, D.H. & Battista, M. T,1992)。

另外，從認知上來看，Piaget 的兒童空間概念主要是由「知覺」(perception)轉換成「表徵」(representation)，所謂知覺就是在接觸空間形體之中，直接獲得的知識，例如由碰觸長方形和梯體的紙板來分別它們；而所謂表徵則是指當形體不在時，心智中所喚起的意象，也可稱為心像(mental imagery)。而表徵空間的建構則是以知覺的基模為基礎，這個發展也和年齡有關。Piaget 認為 10-12 歲的兒童，由於已達到某個成熟度，不管其智力為何，都具有在心理操作圖形形狀的能

力。

3.對於 Piaget 理論的批判

Dickson(1984)等人提出雖然 Piaget 在空間思維的發展的研究上有著卓越的貢獻，不但提供了許多經過精心設計的活動，更提出了許多有趣的假設，但 Piaget 在這個領域的理論卻可能是較受人所批評的。Darke(1982)就提出，Piaget 和 Inhelder 根據其所謂幾何的拓樸性質以及其相關應用所設計的研究，其實在數學上並不精準。他認為 Piaget 僅將圖形分為拓樸圖形和歐幾里得圖形二個類型，其實是不完備的，因為任何圖形都同時具有兩個類型的對等性質，這樣一分为二的方式，會使得我們無法瞭解學生的選擇是否真的如 Piaget 所說是根據其拓樸性質來決定的。

另外，Piaget 僅將空間發展分為「察覺」和「表徵」二個層次，並認為這個發展與年齡及心智成熟度有關，但 Lesh 和 Mierkiewicz (1978, 引自 Dickson 等人,1984)則提出，「察覺」在目前已被視為個一複雜的組織過程，而不僅僅只是表徵以外的單一能力。例如，兩歲的兒童即可學習正確的命名正方形和三角形，而為了要達到這個目標，他則必須先具有這些圖形的心理表徵，以符合對它的命名，這些工作似乎是 Piaget 兩大空間概念的中間能力，且發展的順序也絕非單向由察覺進展至表徵，兩者之間應存在一個互動的關係。

4.van Hiele 的幾何思考層次理論

在國內外的許多有關幾何思維發展以及幾何教育的研究中，都以 van Hiele 的幾何思考層次理論為基礎，來探討學生的幾何思維發展，也有許多書籍及研究報告詳細描述了其理論(Clements, 1999; Fuys,

Geddes, & Tischler, 1988 ; Battista, 1994 ; 吳德邦, 民 84 ; 葛曉冬, 民 89), 此理論由荷蘭教育家 Dina van Hiele-Geldof 和 Pierre M.van Hiele 夫婦在 1957 共同提出, 並於 1959 年發表, van Hiele 認為幾何思考有五個層次, 這五個層次的發展是漸進式的, 不能跳躍。和 Piaget 理論最大的不同點在於 van Hiele 認為由較低階的層次發展到高階的層次和年齡及心智成熟度較沒有直接的相關, 而是和教師的教學法和課程設計較為相關, 但仍須視學生的發展能力而定, 因此可視為 Piaget 理論的特殊化, 以下就簡述 van Hiele 幾何思考的五個層次:

層次 0: 辨識(recognition); 學生能根據圖形的整體外貌來辨識圖形, 並且可以比較、操作、並對這些圖形命名 (例如可以辨認三角形、四邊形、平行線)。

層次 1: 分析(analysis); 學生可以分析圖形的構成元素以及元素及元素間的關係, 且能發現圖形的性質 (例如可以發現三角形有三個邊, 四邊形有四個角)。

層次 2: 非形式演繹(informal deduction); 可以藉由非形式的邏輯推論建立之前所發現之性質的內在關係(如平行四邊形對角相等), 且能根據圖形性質形成定義, 並瞭解圖形的包含關係, 因此能作非正式的辨證, 還不能作有系統的證明。

層次 3: 演繹(deduction); 學生可以在一個公設系統中建立定理, 能辨認無定義名詞、基本定義及假設的必要性, 可以邏輯地解釋一個幾何敘述並能自行寫出一個符合邏輯的演繹證明。

層次 4: 嚴密(rigor): 學生瞭解公設化系統的意義, 能根據不同的公設系統作推論並建立定理, 但如歐氏幾何與非歐幾何。

5. van Hiele 幾何思考層次的特性

除了上述的五個學習過程的思考層次外，van Hiele 還提出了這個思考層次的主要特性，以下根據 Clements(1992)及譚寧君(民 82)的文獻分別簡述如下：

1. 次序性(Sequential)

學生的層次發展是循序漸進的，必須先具有較低層次的概念，才能發展較高層次的概念。

2. 進展性(Advancement)

層次的進階是經由於教導或有效的學習經驗，而非因為其年齡增長而發展，但也沒有任何一種教學法可以讓學生跳過任何一個層次，另外也有一些情況會阻礙各層次間的轉換，當討論主題已經降到較低層次而仍不能理解時(如討論正方形和長方形的包含關係時)，學習將無法發生，亦不宜強行灌輸。

3. 內在與外在(Intrinsic and Extrinsic)

在前一個層次是外在的物件，在下一層次則會成為內在的物件，例如在層次 0 時，圖形的外貌被接受，但其圖形的構成要素，則要到下一層次才會被分析，而這時圖形的外貌則會變成一個內在的理解。

4. 語言性(Linguistics)

在每一層次所使用的符號語言及以及這些符號的關聯系統都不盡相同，在某個層次被視為正確的符號語言在下一層次則可能是錯的，因此每發展到新的層次即必須作修正。

5. 不配合性(Mismatch)

學生所屬的層次和教師教學設計的層次若不同，則所期望的學習歷程或教學效果就不會發生，例如教學過程中語彙的使用，若屬較高的一個層次，則將導致學生完全無法理解且無法思考，亦無法達到學

習目標。

綜合以上所述，van Hiele 認為思考層次的突破主要與合適的教學設計相關，而國三學生在這個階段，若期望突其破圖形的侷限進而作有效的幾何論證，則至少必須達到思考層次 2，若更進一步要求推論過程的嚴謹，則必須達到層次 3，因此本研究的探究活動設計以及使用語彙也將符合這兩個層次的思考能力，以達成預期之學習效果。

6. 其他幾何發展層次

Clements 和 Battista(1992; Clements,2000)則提出在 van Hiele 的思考層次之前還有一個層次稱為前辨識層次(prerecognition)，在這個層次中學生可以感覺圖形形狀，並能處理圖形的部份視覺特徵，但還不能辨識圖形或對圖形進行分類，也不能順利的複製圖形，可能會畫出不規則線條的圓形、矩形等，這個層次大約是 3-6 歲的兒童。

第二節 圖形的概念定義及概念心像

1. 概念定義及概念心像的互動模式

在數學中，除了最原始的的概念之外，所有的數學概念都有一個形式且嚴密的定義，稱為概念定義(concept definition)，這些定義會在學校的課程中被介紹。但是另一方面，當學生在決定一個數學物件是否為某個概念的例子時，並不一定以形式上的定義來決定，而是以一個心中對該概念存在的影像來決定，稱為概念心像 (concept image)(Vinner & Dreyfus, 1989 ; Tall & Vinner, 1981)。

由於幾何思考的發展及學習，都是先由具體的形體，如生活中的

實物及相關的教具開始接觸，因此幾何圖形的概念心像比其他的數學概念更容易形成，Fischbein(1987)將概念心像的形成歸因於直觀，他認為物體雖有其原始的抽象概念，但以此概念所呈現出的某些具體表徵，對學生在認知上的決定具有重大的影響。因此即使當定義已經另外被明確的提出，但由於其抽象的性質，大部份的物件仍不能被接受，學生通常會要求給例子，藉著這個典範(paradigm)，概念才能完全得到。

Vinner(1991)將概念定義和概念心像看成兩個空格(cell)，當某個概念名詞還未被賦予任何意義時，一開始概念心像的格子是空無一物的，直到學生看到一些不同的圖像表徵之後，概念心像即開始形成。而原本概念定義的格子可能經過老師對定義的介紹而被填滿，但可能在很短的時間就被遺忘，當學生再度被要求重述該定義時，通常會以概念心像來呈現。然而這不表示在課堂中就無須介紹形式的定義，Vinner認為若是概念定義並不複雜，甚至可讓學生自行建構出，而教學中也可適時造成定義和心像之間的認知衝突，以達到兩者之間的協調。

除了提到概念形成的過程之外，Vinner 還提出當學生在一個認知工作下(cognitive work)，概念定義和概念心像的互動應該是活化的，理想中的互動狀態可能會有如下圖的三個種類：

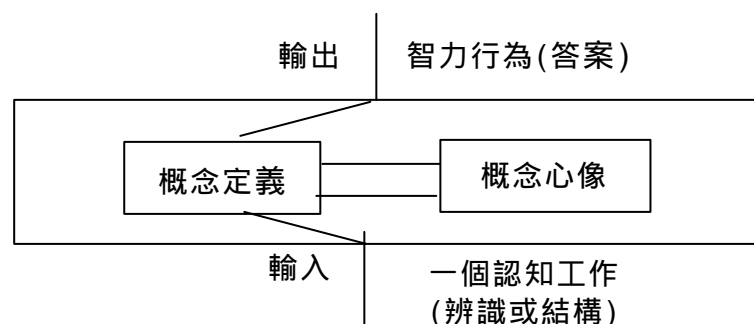


圖 2-2-1：概念定義和概念心像的相互作用(Vinner, 1991)

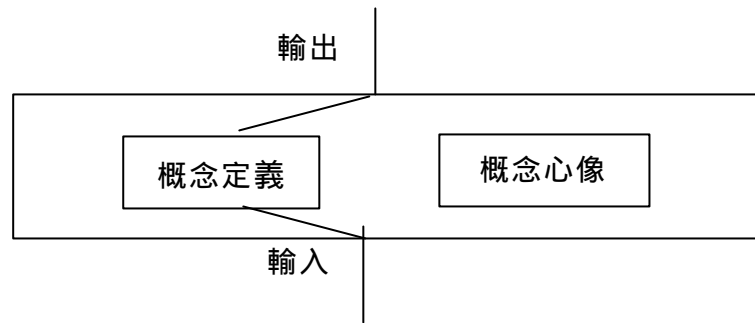


圖 2-2-2：純粹的形式演繹(Vinner, 1991)

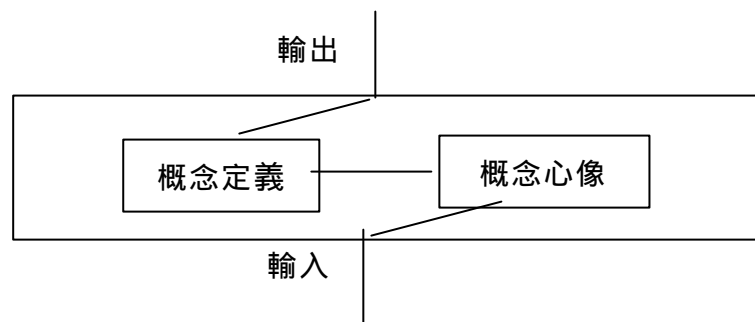


圖 2-2-3：直觀思考下的演繹(Vinner, 1991)

但 Vinner 認為，在現實的情境中，學生通常無法憶取概念定義來形成答案，而不論在形成心像的過程中，或是在一個認知的工作下，教師也很難違反這個自然的現實來強迫學生憶取概念定義，因此在現實狀況下，學生概念定義及概念心像的互動模式應該如下圖。

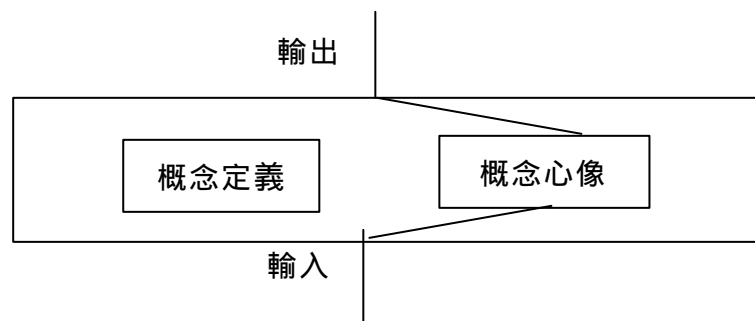


圖 2-2-4：直觀的回應(Vinner, 1991)

也就是說，即使概念定義的格子中並不是空白的，但在解題的過程中並沒有被憶取。然而，依據國三幾何課程的教學目標(國立編譯館，民 89)，如「知道並能證明：與線段兩端點等距離的點，在它的垂直平分線上」，學生必須知道垂直平分線的定義，及其形式上的表示方式才能作出完整的演繹證明，因此概念定義和概念心像的互動模式則必須至少為圖 2-3 直觀思考下的演繹，但學生的概念心像是否可能有誤，或是概念心像只有某些典型的類型，進而影響原本已不堅定的概念定義，造成無法有效的進行幾何推論，也將在本研究中進行調查。

2. 典型心像(prototype image)的形成

Fichbein(1996)提出典型模型(paradigmatic model)就是為描述一個概念時所使用的範例或是範例的子集。就幾何來說，這個模型即為代表此幾何概念的具體圖形，通常是在視覺上最能表現出此幾何概念相關性質的圖形，因此在傳統幾何教室中，教師常因教學上的方便，使用這類的典範例(paradigmatic example)來進行教學，即使典範例在表達概念時有其代表性及便利性，但卻也侷限了抽象化及一般化的概念發展，學生可能就依少數幾個典範例所表現出的視覺特性來建構概念心像，而使得心像只具有某些特定種類，形成典型心像(prototype image)，但典範例只是該概念或該概念子集的一個特殊例子，雖可將抽象之概念定義具體表現出來，但卻不是此概念定義的唯一情形。Presmeg(1997)認為這種單一情形的具體表徵是視覺者障礙的來源，典型心像的形成也可能阻撓學生重新操作那些不符合典型心像的圖形。

而在與證明有關的範疇中，Clements 等人(1992)也提到學生要成功的完成一個證明，則必須將證明本身和證明的附圖作一個語義上的

連結，否則可能會依照視覺的圖像來得到答案，因此當一個題目附上圖形時，學生必須將焦點放在圖形中哪些是本質上的要點，哪些不是。也就是說，在平面幾何中，學生可能會依照典型心像來作出典型的判斷(Hershkowitz,1989)，而所謂典型的判斷則包括了(1)視覺(Visual)(2)自我屬性歸因(Self-attribute)兩種情形。所謂視覺的判斷就是典型圖的形狀被當作一個判斷答案的準則，這樣的判斷常會導致錯誤的結論，而自我屬性歸因則是指將典型圖形的屬性過度一般化到其他的圖形，例如不認為一個傾斜的正三角形是正三角形，因為正三角形必須有一邊是水平的。Hershkowitz(1989)認為這種典型判斷的情形則會隨著年齡的增長而減少。

除了平面幾何圖形之外，其他數學領域也可能形成典型心像，在Schwarz和Hershkowitz(1999)的研究中也提到了有關學生對於函數的概念心像，通常是在坐標平面上的函數圖形，而對於函數概念的典型心像則是一次的線性圖形或是二次的拋物線圖形，因此Schwarz和Hershkowitz則根據學生函數的概念心像表現，將概念心像的特徵分為：

- (1) 典型性(Prototypicality)：學生通常以憶取的典型心像來解決問題，例如以線性函數的圖形來解決非線性的問題。
- (2) 部份 - 全體推理(Part-Whole Reasoning)：函數圖形如拋物線，實際上應該是無限延伸的，但通常畫出的圖形只為部份的圖形，因此部份 - 全體的推理能力用於決定不同的子圖形是否為同一函數的圖形。
- (3) 屬性瞭解(Attribute Understanding)：概念心像可用於瞭解函數的某些屬性，例如瞭解函數 $(x-1)(x-3)$ 的對稱軸為 $x=2$ 。

因此，對於學生的解題及思考過程，尤其是在 van Hiele 幾何思考層次尚未完全達到層次 3 的國三學生來說，概念心像比概念定義扮演了更重要的角色，因此典型心像的具體表徵可能即代表了該幾何概念。教師如何避免在教學過程中僅使用單一或少數的典範例來介紹某個概念，以避免學生在概念形成的過程中產生特定典型心像而造成迷思概念，則成為一個重要的課題。

第三節 圖形的瞭解

Eliot(1987)提出有一些研究者認為空間視覺化能力的決定因子在於對圖形的操弄所帶來的刺激，而一部份的研究者則認為在一些空間測驗中有較好瞭解的學生，並不是藉由圖形，而是經由推理和解題的過程中達到瞭解，然而，在後續的許多研究中，我們發現發展較好的空間能力在於能夠以不同的角度想像空間中的物體的排列以及能夠操作視覺圖像(Clements,1979)。

1. Duval 圖形的瞭解

事實上，任何幾何概念其實都只是一個抽象的概念，並不存在於物理世界，即使兩個具體表徵一樣的實物或圖形，嚴格說起來也不能表示代表相同的幾何概念，只能說抽象的概念藉由實體讓我們容易想像。而一個具體的幾何圖形也必定能幫助我們瞭解幾何概念的內在本質，也有助於我們解題及找到幾何證明的關鍵想法。Duval (1995)認為某些圖形是具啟發性的(heruistic)，經由圖形的操弄及維度的轉變，可以幫助我們解決原來並不容易解決的幾何問題。因此在他的研究中，提出了四個對於圖形的瞭解，用以說明圖形如何表現出啟發性，分別說明如下：

(1) 知覺性瞭解(perceptual apprehension)

只要一個圖形被提出，必定喚起知覺性的瞭解及至少一個其他的瞭解，一個可被察覺的圖形和僅是呈現在視網膜上的圖形最大的差異在於圖形組織的原則，以及圖像所帶給視覺者的暗示，另外我們也可區分和辨識出圖形中的子圖形(例如長方形被對角線分割出的兩個直角三角形)，但這些子圖形未必完全建立在原圖形的結構上。

(2) 序列性瞭解(Sequential apprehension)

當我們在構圖的過程、或是描述該圖形的結構時必須對圖形作序列性的瞭解，所謂序列性瞭解，即是在構圖的過程中，圖形的不同單位元件則會依序的浮現。而序列性的瞭解主要和繪圖工具(如尺、圓規)的限制有關，若是因為繪圖工具的侷限而無法表達出圖形性質間的關係，圖形則無法被瞭解。

(3) 起論性瞭解(Discursive apprehension)

幾何概念必須起源於對圖形的命名和一些假設，單由知覺性的瞭解，並不能使所有人對圖形的幾何性質達到共同的理解。在所有的幾何表徵中，對於其幾何性質的辨認仍然必須建立在敘述上，然後經過一個演繹的過程來決定這個圖形表現了什麼，起論性瞭解可以在知覺性瞭解不變的情況下而改變。

(4) 操作性瞭解(Operative apprehension)

當我們觀察一個圖形時，我們可以透過操作圖形來得到解題的靈感，而在以不同的方式更改圖形之後，得到操作性的瞭解，而變更圖形的方式則大致分為下列幾種(i)分解組合圖形(The mereologic way)(2)放大縮小圖形(The optic way)(3)平移旋轉圖形(The place way)等，這三種方式可在心靈中操作，也可實際地去變動它，這些操作可使圖形具有啟發性的功能，故可以在操作的過程中，突顯出圖形的變化而得到某個證明步驟或解題的靈感。

因此，一個圖形的呈現，除了帶給視覺者具體的表徵之外，更重要的是圖形所蘊涵的內在性質，而 Duval 則是強調可以透過自行構圖和操作圖形的過程，得到對圖形及其性質較整體的瞭解，並從中獲得解題的靈感。Okazaki 和 Iwasaki(2000)也提到學生能夠成功作幾何推論的主要因子包括了(1)所憶取之幾何圖像的外在表現(2)將結構圖形的步驟作為決定圖形的條件(3)推理須建立在可操作的圖形基模。

2.幾何技能(Skills in Geometry)

Hoffer(1981)提到在進行幾何證明之前，有五個有關於幾何的技能是必須在課堂上先學習的，包括了(1)視覺技能：提供學生更多探索圖片和操作物件的機會，從中發現圖形之間的關係。(2)語言技能：學習以數學語言給出精準的定義，並能將所瞭解的幾何公理和性質表達出來。(3)繪圖技能：學習繪圖的方式可讓學生作為學習幾何性質前的一個預先的準備。(4)邏輯技能：學習形式論證前，先讓學生以非形式或口語、繪圖的方式提出想法，並加以組織。(5)應用技能：將所學的幾何知識應用於現實世界。

但在目前國內的教學現況中，雖然課程的改革，使得學生較以往多了操弄圖形的機會，但仍稍嫌不足，而自行構圖的課程和討論更是欠缺，學生長期接受課堂中教師提供的圖形及題目的附圖，且通常是典範且單一的附圖，也是造成幾何思考不完備且無法一般化及抽象化的原因。Dreyfus(1991)認為雖然同一個概念必須有許多不同的表徵，才能進行抽象化及一般化，而在這個抽象化的過程中，必須將所有的表徵正確且堅定地相連結，才能成功的解題，過程中當另一個表徵對解題較有效時，必須能適當地轉換表徵。

第四節 幾何證明

1. 數學證明觀

證明在不同的社群中有不同的定義，如同 Tall(1989)所描述的，在生活中，證明是一些證據，對於陪審團來說，證明是「超越合理的懷疑」，對統計學家來說，證明是統計數字的結果，而對科學家來說，證明可能是實驗的結果；但在數學社群中，有關證明的主題通常是受爭議的，數學中的形式演繹推論和從生活經驗之中歸納或非形式的辨論是完全不同的(Healy & Holyes, 2000)。另外有另一個觀點認為數學上的證明亦必須考慮到社會化的過程而不僅是形式化的證明(Hanna,1991)，其中 Lakatos(1976)認為，雖然數學不是一個經驗科學，但他認為數學是擬經驗科學(quasi-empirical science)，他認為數學是經由持續不斷的推測、批判而得出的猜測，以及邏輯的講明和反駁而來的，所以證明是永遠沒有結束的，必須經由社會化過程去協商出他的意義，而不只是形式的法則而已(Davis, 1986)。

林福來等人(民 84)將數學哲學觀分為五類來探討對應數學證明觀：(1)形式主義的觀點視數學為公理化系統的研究。(2)直觀主義的數學證明是直觀推理的。(3)準經驗主義的數學證明觀。(4)邏輯主義的數學證明觀。(5)證明的社會學觀。因此證明觀在不同的社群及哲學觀之下則會有不同的界定和觀感，故學校課程中如何界定何謂證明，什麼樣的證明形式在數學課堂中可被接受，也將影響學生的證明觀。

2. 幾何證明課程的影響

由於各國的幾何課程的內容和目標不盡相同，因此無法整體討論其內容的編排和影響，但整體來說，課程的安排如果只考慮認知和心

理層面的問題，而忽略了社會層面的問題，則是不足的。因此 Holyes(1997)有兩個方法可以解決這個困境：(1)在認知層面以外研究學生回應的模式，包含體會學生的感覺、教學、學校和家庭(2)確定課程中證明的目的為何。Holyes 則以英國的國家數學課程(The National Curriculum in Mathematics)為例，來說明課程影響學生證明信念的情況，英國國家課程將數學課程分為四個成就目標(Attainment Target，以下稱簡稱 AT)，包括(1)AT1 使用和應用數學(2) AT2 數和代數(3)AT3 形體、空間和測量(4) AT4 資料處理，而課程及教材也根據這四個成就目標分別地來設計。其中有關於證明的課程則是在 AT1 使用和應用數學這個單元中，因此在這樣的安排之下，證明課程傾向於一個研究、調查的課程，而非形式上的演繹證明，學生則被要求在由資料中找樣式(Pattern)，再經由討論來確認結果。而由於學校課程中缺少定義的介紹，所以學生無法辨別前提是什麼，然後經由推論到結論，因此大部份的學生很少機會來評鑑邏輯論證，及接觸到形式的課程，而認為數學證明只是有關於測量、估計、從一些情形中歸納的課程，由此可知，課程的設計和目標會對學生的證明觀和證明方式產生影響。

而其他大部份的證明課程安排都是將證明建立在定義上，以一個抽象的方式呈現，且缺少直觀的實例，導致學生無法形成概念心像，思考的時候亦不具概念實體(concept entity)，因此概念的形成也就不完整，而無法完整的作出證明。另外，有時候概念心像已形成，但卻無法用數學的語言寫成形式定義，也是造成無法作證明的一個原因；這樣的現象不僅出現在初學幾何論證的中學生之中，Moore(1994)的研究中也發現大學主修數學和數學教育的學生在學習形式化的數學證明時也有類似的認知困難。

日本的中學證明課程編排和我國類似，也是和幾何課程結合，學生由小學開始學習具體的幾何圖形，直到中學一年級開始學習作圖，這段期間學生對於圖形相關的課程表達了濃厚的興趣，一直到中學三年級幾何課程開始與證明課程結合，學生不但表達了對於證明的排斥，也開始討厭學習有關圖形的課程。西塔伸二(1990)表示，排斥證明的學生中，大部份都是直觀地由圖形中找性質，而沒有根據已知的定義定理來進行推論，若圖形錯誤，則無法找到性質，因此導致錯誤而排斥學習，故他認為必須在證明的教學中，讓學生自行構圖，學生才能真正瞭解題意和確定基本條件，完成正確的證明。

3.幾何證明的內涵分析

幾何證明的認知過程

Duval(1998)提到由幾何活動的認知層面來看，幾何牽涉到三個不同的認知過程(1)視覺(visualization)：是和空間表徵有關的過程；用來闡明一個敘述、或者啟發性地探索一個複雜情形、或是作概要的說明、主觀的確認等。(2)構圖(construction)：藉由工具進行的過程。在描述和探索一個數學物件的結果時，圖形的外觀和結構可以像一個模型般地被運作。(3)推理(reasoning)：一個用以擴展知識，且用以證明、解釋的序列性過程。他認為這三個過程是可以被獨立的運作的，因此視覺不一定要依靠構圖：可以直接看圖形，而不管它的結構方式。而即使構圖也與視覺相關，但是構圖過程只和數學性質及工具的限制有關；另外，即使視覺在發現證明時提供了一個直觀的幫助，但是推論僅和已知性質的主體有關，而且有時視覺還會造成誤導，導致錯誤的推論。

然而，雖然這三者可以獨立運作，但卻又緊密結合，且他們的協同運作是精通幾何時認知上的必要條件，三者的關係如下：

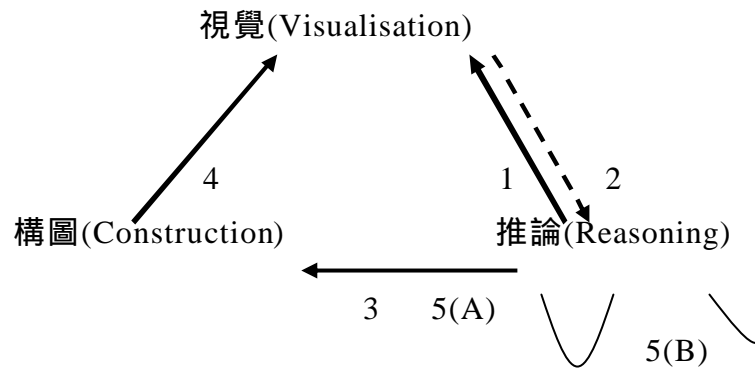


圖 2-4-1:幾何活動下的認知互動(Duval, 1998)

在這個認知互動模式下，Duval 又進一步討論了幾何中的推論為何，他認為「推理(Reasoning)」這個字的意義非常廣泛，任何的進展、過程和錯誤、或是解決困難的過程都是一種推理的形式，更明確地說，從一個已知的資訊到新資訊的過程就是推理，如歸納、推斷等。因此他將與解題和證明有關的認知過程區分如下(1)單純的圖形過程：用操作性瞭解來描述圖形(2)自然的推論過程：自然地用敘述、解釋、論辦等一般語言來表現。(3)理論的推論過程：以演繹來進行，可以單純的用符號表徵，也可以用語言來表達。

而在自然的推論過程中，又可區分出兩個組織層次(i)整體的層次：以圖形或一般語言，表達出具邏輯性且有次序性的三個敘述(ii)局部的層次：每個敘述可用非形式語言，如「和(and)」、或圖示表達出關係。而在理論的推過程中，更細分了三個層次(i)整體的層次：根據結論將每個步驟連結(ii)局部的層次：根據之前的結論、定義或定理等性質，將至少三個性質組織起來(iii)微觀的層次：必須能從被當成規則來用的性質中，分辨出被用來證明的部份和結論的部份。

幾何證明的層次

Healy 和 Hoyles(2000)將學生認為證明的目的分為(1) 提出事實 (2)解釋 (3)發現定理或想法，其中以認為證明就是提出事實的學生為最多，因此大部份的學生認為證明的目的在解釋和提出證據，因此在以演繹證明為主的中學課程中，學生較偏愛、且認為自己能力所及的論證方式常是舉例、歸納的方式，和教師所要求的形式化證明則產生了衝突。

Healy 和 Hoyles 的調查中，還將學生的在代數上的證明形式大致上分成四個層次：(1)舉例說明(empirical)(2)圖示的方式(visual)(3)口語的形式說明(narrative)(4)形式證明(algebraic) 等四個層次，並針對同一個證明題要求學生根據這四個層次選擇自己偏好的論證方式，以及會被教師接受而得高分的論證方式，其中形式證明的層次中包括了正確的形式證明及錯誤的形式證明，研究結果發現大部份的學生選擇了舉例或以口語的形式說明作為自己偏好的論證方法，但卻不認為此方式會得到高分，反而認為以形式的方式較能被教師接受。其中有趣的是由於錯誤的形式證明中包含了大量且複雜的文字符號運算，因此即使它是錯誤的，大部份的學生仍選擇其作為較能得高分的證明方式，Coe 和 Ruthven(1994)也發現若證明內容是資料導向的，學生也偏向用實例來說明而不是演繹證明，而 Finlow-Bates, Lerman 和 Morgan (1993)也提到即使大一學生在連續的推論上有也具有相同的困難，偏向於用實例而非邏輯原理來判斷數學論點。

由此可知，學生和教師之間的證明觀是有差距的，而這個差距有多大？學生要以何種方式表現才能被教師接受為一個「證明」？教師又要以何種標準來包容學生各種論證方式？Dreyfus(1999)認為這些問題並沒有一個一般性的回答，但卻是數學教育中的一個重要議題。

Miyazaki(2000)認為應該由內容、證明的表徵和學生的思維三個維度來建立學生的證明層次，若由內容的維度來看，可分為(1)歸納的推理(2)演繹的推理兩個層次，而由證明的表現方式這個維度來看的話，則分為(1)具論證功能的語言(2)其他方式(如繪圖、可操作的物件)，若將這兩個維度合併，則成為四個層次如下：

表 2-4-1：證明的層次(證明內容及表現方式為維度)(Miyazaki,2000)

證明內容 表現方式	歸納的推理	演繹的推理
具論證功能的語言	<i>Proof D</i>	<i>Proof A</i>
其他方式	<i>Proof C</i>	<i>Proof B</i>

其中 *Proof A* 的層次是最高階的層次，需要較多的抽象思考能力和數學語言的表達能力，而 *Proof C* 則是最低階的層次，*Proof B* 和 *Proof D* 則是介於其中的層次；另外若再進一步考慮學生的思考層次維度，Miyazaki 則是根據 Piaget 的認知發展層次將其分為具體運思期 (concrete operations) 以及形式運思期 (formal operations)，因此若再加上學生的思維層次，則證明的層次原為圖 2-4-2(a)，但由於表 2-4-1 中 *Proof A* 的層次必須用到演繹的思維以及形式化的語言，因此學生的思維必須發展到形式運思期，而 *Proof C* 使用歸納的方式且非形式的語言，因此只能歸於具體運思期，因此依據證明內容、證明的表徵方式以及學生的思維層次三維度分別區分層次，再合併起來，Miyazaki 則將學生證明的層次調整如圖 2-4-2(b)

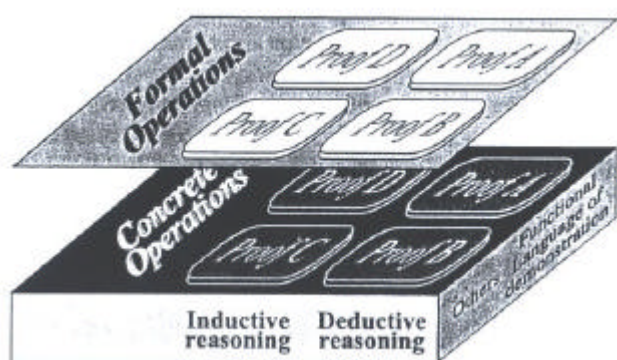


圖 2-4-2(a)：證明的層次
(Miyazaki, 2000)

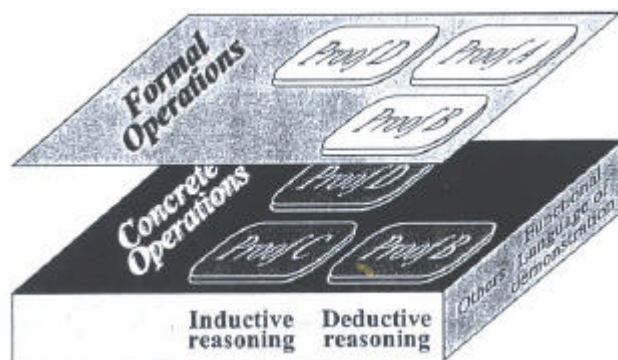


圖 2-4-2(b)：證明的層次(修正)
(Miyazaki, 2000)

第五節 合作學習

1. 何謂合作學習(cooperative learning)

合作學習可說是傳統學習活動的再設計，教學者鼓勵學生在小組內合作，結合了教室的學習活動及社會互動等認知與情意二層面的學習。合作小組的互動屬於「面對面促進互動」的學習方式，在互動過程中，小組成員必須向同儕提供解釋，也必須提出適當的問題發問，並提供時間讓同儕回答問題，學生可從互動中激起認知重組的反應，提升認知層次(桂慶中、施頂清，民 89)，這種合作式的學習，團體成員彼此分享學習經驗，傾聽別人的想法，共同分擔責任，合力完成目標，是一種正向的相依關係，對於幾何的學習有很大的助益(張景媛，民 84)。

Leikin 和 Zaslavsky(1999)則根據 Newman(1990)和 Sutton(1992)的文獻具體建議合作學習的進行方式，茲摘要如下：

1. 學生以 2-6 人為一小組進行學習。
2. 須在學生互動及互相依賴之下，將整個學習工作視為一個整體來進行。

3. 學習環境提供所有成員公平的機會並以不同方式來與他人交流。
4. 每一個成員都必須對團體的工作負起責任並提出貢獻。

藉由合作學習的方式來學習證明，可以促成學生作推論、辨證，並展現其論述及所發現之證據。而小組合作學習的成員可依學習的目標不同而選擇採同質性(homogeneous)或異質性 heterogenous)的組合，所謂同質性和異質性即是指是否控制參與學生的個別差異及客觀背景，如年齡、性別、學習成就及社會互動能力等，如何安排小組的組成成份以達到學習目標並沒有一個絕對的方式，但卻是合作學習的重要關鍵(Good, Mulryan & McCaslin, 1992)。

2.社會建構理論

合作學習的理論基礎出自於建構主義的學習觀與 Vygotsky 的學習社會化理論，近年來數學的發展中，社會層面的議題愈來愈受到重視，且帶給數學教學一些反思的空間。Yackel 和 Cobb(1996)認為數學的學習和教學必須是社會和文化的互動，而不單是知識的傳遞，社會中人群之間的互動歷程，包含了互相對談以及相互批判，在數學發展的基礎中扮演了極重要的角色(Lakatos, 1976 ; Ernest, 1991)。唯有在與他人互動的過程中，學習者才能對所經驗的事物賦予意義，也就是透過與他人的溝通與協商，對同一事物的意義達成共識。而在數學中，就是透過互相討論與批判，才能建構出數學性質，互相協商出某個數學概念的意義，並達成共識(Wheatley, 1992)。Yackel 和 Cobb 認為在數學建構的過程中，若以合作學習的方式來進行，學生必須依循傳統的社會規範(social norm)，更必須依照數學教室中的數學社會規範(sociomathematical norm)來進行討論，所謂社會規範是指學生可以接受在課堂中提出自己的想法及與他人討論，而數學社會規範則是指

所提出的想法中，學生能瞭解和接受哪一些說法算是一個數學上的解釋，因此在數學社會規範下，學生必須提供出與他人不同的想法，並思考自己的想法與他人的想法在數學上的差異為何。

林生傳(民 86)認為小組合作學習主要構成的因素包括了(1)任務結構(2)酬賞結構以及(3)權威結構。所謂任務結構，就是利用異質性的小組團體，採用不同方式的學習活動來進行學習，達到某一個目標；酬賞結構則是利用正面的增強來激發與維持整個學習活動，而權威結構則是在學生利用自發的動機以及同儕之間的激勵來控制自己的行為，並積極進行學習。

3.合作學習之相關研究成果

Weigel(1998)的研究中發現兒童可以利用合作學習發展出數數的能力，透過與同儕的合作，發現較好的數數策略且提昇數的認知發展。Wyndhamn 和 Saljo(1997)也發現學生獨自解決某些應用問題時會發生困難，若能以小組合作的方式進行，則有助於釐清題意。在其研究中亦發現，以合作學習為教學法之實驗組與傳統教授法為對照組之教學實驗，參與合作學習的學生有較高的學習成就。

國內亦有許多以合作學習為議題的研究，都有不錯的成效，如黃儒傑(民 88)的研究中發現，利用學習成就異質性的成員進行小組合作學習，可使學生在過程中因榮譽心而激起學習動機，有助於數學學習的瞭解，另外張景媛(民 84)也建議教師在進行幾何教學時，可採統整式合作學習方式，有助於生手釐清錯誤概念，並共同構想出解決問題的各種方法。且合作學習可搭配各種不同的教學方法，如批判思考、探究、問題解決、啟發式教學，為一種多元化的活動方式。