# 第二章　文獻探討

## 第一節 直觀的意義

### 一、直觀的多樣性和複雜性

直觀一詞出現在許多不同的領域，例如，哲學、數學和科學、宗教、道德和美學、教育學。Fischbein(1987)指出，迄今都沒有人嘗試將散佈在這些研究文獻上的發現做有系統的整理。通常這些相關研究並未清楚地說明直觀的意義，當使用到直觀這個名詞時，也大多將之視為不驗自明，普通的常識罷了。例如，Piaget經常使用直觀和直觀的思考，卻很少嘗試直接描述直觀的一般結構。或許，這主要是受限於直觀的複雜性和多樣性。

直觀無論在科學或哲學上，曾引起高度之爭議。有人對其持肯定的看法，認為它是所有真實知識的基本來源。Descartes(1967)和Spinoza(1967)均認為，在一個容易讓人迷失且難以解釋清楚的世界裡，直觀是真理最後可靠的源頭(引自Fischbein,1999a)。Bergson(1954)認為，直觀不只是一種方法，而且是一種能到達現象本質的心靈策略，經由一種能產生共鳴的直觀辨認，使我們能夠抓住生命的本質和改變現象(引自Fischbein, 1987)。他認為智能(Intelligence)與直觀不同，前者乃為了解物質世界現象的方法，後者則為直取心靈生活的本質。例如，Zeno悖論就不能靠智能了解動作的連續，Zeno以為動作、時間能被分解成智能所能運作的靜態片段，但是，實質上動作和時間是連續的(引自Fischbein, 1999a)。依照Poincar’e 的觀點，如果沒有直觀，在科學和數學上就沒有真正具有創造力的活動(Fischbein，1987)；數學直觀是對於抽象數學的一種非同尋常的洞察力(鄭毓信，1996)。有人對直觀持否定的看法，認為它會誤導真理的探索，因為，我們無法對直觀提供一個清楚和完整的證明。

因此，直觀被視為是整體的猜測(Global Guess)，它代表一個基礎的(Elementary)、常識的(Common Sense)、通俗大眾化的(Popular)和原生形式的(Primitive Form)知識，它和科學的概念、詮釋是對立的。例如，Hahn(1956)和Bung(1962)都曾批評直觀，認為它是迷思概念的主要來源，因此，在科學論證中應該盡量避免使用它(引自Fischbein,1999a)。

有許多相近的名詞也常被用來說明直觀，而使得它的意義變得更為複雜。Fischbein(1987)指出，洞察(Insight)是指一個突然的、整體的在認知領域的資料重整，使得能在已知條件上，允許一個新的觀點、一個新的詮釋或解答。它經常被視為直觀的同義詞。其他如靈感(Inspiration)、常識(Common Sense)及天真的推理(Naive Reasoning)，也常被視為等同於直觀。

直觀一詞在特別的領域中也有特別的內涵。例如，Wild(1938)提出「道德的直觀(Moral Intuition)」，認為它代表「對」與「錯」的一種先天知識(A Priori Knowledge)，依此種說法，直觀可以大約等同於感知(Perceptual)的知識(引自Fischbein, 1987)。哲學家Benedetto Croce 認為，直觀在美感上扮演著非常重要的角色，它是審美感受和藝術創造的核心。他主張，人類的知識有直觀和概念兩種形式，兩者是二度關係，直觀是基礎，概念是上層架構，對直觀的抽象思考可以成為概念。概念知識需要直觀為基礎，直觀卻不需要依靠概念，是各自獨立的上下層關係，而非主從關係。審美是一種直觀，直觀不依靠概念，不由概念而來，它是心靈的主動活動，是一種形式把握和形式創造(引自王高田，2004)。Clark(1986)認為直觀與創造力有關，是指非來自意識、理性精神狀態，可能源自潛意識，由於成長和啟發而提升(引自任東屏, 2004)。在教育文獻中，直觀通常是知覺的知識(Sensorial Knowledge)，是形成智能知識(Intellectual Knowledge )的基礎。依據這種看法，直觀知識也或多或少等

同於感知的知識(Perceptual Knowledge)，例如具體物件、圖、表。某些教育研究者倡導使用大量的直觀(具體的、形象化的、操控的)手法，特別是在像數學這樣抽象的領域中(Fischbein, 1987)。

直觀存在於許多不同的領域中，又具有如此多不同甚至相矛盾、衝突的屬性，因此，我們必須先對直觀的意義與特性有所了解，以作為進一步探索直觀教學的理論基礎。

## 二、直觀的意義

Bruner(1977)引用韋伯的解釋“直觀就是直接的瞭解或認知”，直接與中介(Mediate)是相對的，中介是指依靠分析與證明的方法而理解與認知；而直觀是指一種不依靠分析技巧而能理解問題與情境的意義、重要性與結構的行為，他稱這種有別於分析性思考的直觀思考方式，為一種直觀的跳躍。Bruner(1960)以做數學題目的思考過程為例，說明直觀有兩種意義：其一是，當某人花了許多時間思考一個問題之後，突然間獲得解答，我們說這是一種直觀的思考，但是，他仍然必須對此一答案提出形式的證明；其次是，當別人向他提出問題時，能夠迅速作出很好的猜測，判定某事物是不是這樣，或者說出在幾種解題方法中哪個是有效的，我們通常也稱這種人是具有良好直觀的數學家。Kant(1980)認為，直觀是一種對事務直接認知的機能，它不同於理解，可以導出不直接的概念與知識(引自Fischbein,1999a)。

Van Hiele(1986)認為直觀不單純只是「觀察(Observation)」，它是“以直接觀察為基礎所得的結論”；而且，以視覺結構為基礎的結論必是直觀思考的一部分；直觀不是無意識的，在視覺結構中的見解是充滿意識的；而無推理性思考介入的結構延伸(The Continuation of a Structure)便是直

觀的基礎。他認為，視覺結構的決定和推論思維一樣可靠。如果視覺的結構不夠強(Strong)，可加入推理性思考來加強視覺結構。"基於視覺思考的行動"對思考的發展是不可或缺的，假如將結論的分析限制在推理性思考，一個好的思維性觀點是不會發生的。所有理性的知識開始於直觀知識，當參與者嘗試將這些直觀知識發展成語言符號，相關的理性知識就會出現。

Torff 和 Sternberg(2001)界定的直觀概念是指：個人獲得和大量使用知識或知識結構，但是，沒有透過意識反省或明確外顯的教學。直觀思考可以快速產生假設，產生嘗試性的知識組織(Tentative Ordering)，同時，可能會使我們覺得這樣的組織是不證自明的。但是，直觀思考的結果是正確或者是錯誤仍須靠分析方法來驗證(Torff & Sternberg, 2001)。

Fischbein(1987)指出，直觀一般被認為等同於直觀的知識，換句話說，它不是一個來源，不是一個方法，而是一種認知形式(A Type of Cognition)，源自於個人、經驗的一種直接的瞭解或認知；它不同於分析性思考，具有整體性，是一種整體的跳躍性認知。在intuitions, some basic, common sense, insight, inspiration, naive reasoning這麼多不同的詞中，有一共同的概念結構ー立即性(Immediacy)。因此，他認為，直觀知識是立即的知識(Immediate Knowledge)。直觀在各種領域中，可能是宗教上的神示(Religious Revelations)、美學上的靈感和科學上的啟發泉源，但是，在這些例子中，處理的也是立即型態的認知。除了立即性，直觀知識是不驗自明(Self-evident)的，例如，二點間最短的距離是直線，每一個數都有一後繼元素(Successor)，和整體大於部份。以上的這些陳述都是立即被接受，且不驗自明的，亦即，不需要一個形式或經驗的證明。相反的，「三角形的內角和等於二個直角的和」這句陳述就不是不驗自明的，是不被直觀地接受的。

Fischbein(1987)強調，區別感知(Perception)和直觀是很重要的。感知也是立即的知識，「我感知到在我眼前有一張桌子」， 對於桌子的存在我沒有任何懷疑，我不需要去證明它，但是，這並非直觀的知識。直觀總是超過已知的事實，它像是一個理論，隱含了在我們直接可觸及資訊以外的一種外推(Extrapolation)。如果一個人想像二條交叉的直線，他看到了(感知到)有兩對對頂角是相等的，這不是一個理論，它不需要任何的直觀；但是，對於「二相交直線決定兩對相等的對頂角」這個陳述，表達的是一個直觀的推論，它是被直觀接受的共通特性，是在直接可觸及資訊以外的一種外推。因此，我們可以確認，直觀知識可被視為是一種不驗自明的陳述，且超出了我們所觀察的事實之外。

另外，Fischbein(1987)認為，直觀的認知是很頑固(Perseverance)的，一旦建立以後就很難改變它。由於直觀認知的不驗自明、自我肯定，使直觀具有強制性，會排斥不合於直觀的其它想法。不驗自明也意味著整體性(Globality)，一個被視為不驗自明的陳述，同樣的也被整體的視為一個結構化的、有意義的、單一結構的表徵。例如，考慮下面的問題：2公升的果汁要250 元，4公升的果汁要多少錢？直觀的正確答案是500元，這是基於整體性的直觀。現在再考慮下面的問題：2公升的果汁要250元，0.75公升要多少錢？在這個例子中，0.75就不是直觀的(直接的、整體的)解答。

Chiu(1996)和Resnick(1999)也皆與Fischbein有相同的看法，認為直觀是不驗自明的認知。Resnick(1999)認為直觀是不驗自明的和顯然的不需要用先備知識來證明，它就如同認知源頭，不需再做進一步分析。Chiu(1996)認為，直觀認知是強韌的(Robust)、一體的(Holistic)和概念的(Conceptual)，這點與Fischbein所提出的直觀特性是相同的。

Hersh(1998)在晤談許多學者之後，試著將學者們提出的觀點與自己的研究整合。結果顯示，有許多學者認為，直觀與觀察力是數學科學中最為核心的部份，並表達出以下的六種看法：

1. 直觀並非是嚴謹的，而且恰恰相反。
2. 直觀就是眼見為憑。
3. 直觀缺少嚴格的證明，但仍具有合理性與說服力。
4. 直觀本身並不完美。
5. 直觀是建立在實物模型或特例的基礎上，與啟發式的教育是有異曲同工之妙。
6. 直觀具有整體性與整合性，而不是詳細性、分析性的看法。

Hersh(1998)進一步指出，如果將日常生活和數學相結合，那麼直觀將無所不在。

綜合以上的分析，Kant、Bruner和Van Hiele談到直觀時，皆強調「直接」的觀察、認知。個人覺得Kant和Bruner所談的直觀與Hersh以上所整理的第3和第6點較接近，直觀不是經由分析、證明所獲得的認知；而Van Hiele的觀點較接近Hersh所談的第5點，他認為，所有理性的知識開始於直觀知識，若能呈現對直觀的洞察，有助於學生的學習。Fischbein的直觀特性，由於其不證自明、自我肯定，而使直觀具有合理性與說服力(第3點)；由於其強制性和頑固性，而使直觀可能發生錯誤而不完美(第4點)；它也具有整體性(第6點)。Hersh的看法幾乎涵蓋各家的觀點，但是，似乎過於籠統，而且，個人認為直觀並不完全只是眼見為憑(第2點)。雖然，視覺化很容易引發直觀，視覺化的觀察是直觀的基礎，但是，Van Hiele認為，直觀不單純只是觀察，而Fischbein也認為，直觀總超出了我們所觀察的事實之外，直觀具有外推性。而個人在教學中也發現，即使學生觀察同一件事物，每一個人所看到的部分也可能是不相同的。例如，我

曾讓學生看圖2-1，有些學生認為圖中是一位年輕的小姐，有些學生認為是一位老婦人，只有部分的學生在不經指點看出這幅圖具有兩種不同的意象。還有在上一章所提到的酪梨題，兩位學生也是因為看到問題的不同部份而引發不同的直觀。

圖2-1 老人與小姐

綜合以上所述，個人覺得Fischbein對於直觀這個構念的描述最具體、完備，因此，本研究所談論之直觀以Fischbein的看法為主，其他各家看法為輔。下節將詳細討論直觀的特性。

## 第二節　直觀的特徵

Fischbein(1987)指出，經驗在直觀形成中扮演相當重要的角色，它會在穩定、自我一致預期的基礎之下，組織成為信念，並且，在特殊經驗情境下有其自主權，它會影響個體的判斷。他認為直觀具不驗自明、理所當然、頑固性、強制性、理論型態、外延性、整體性、和隱含性八個特徵，逐一說明如下。

### 一、不驗自明(Self-evidence)

這是直觀認知的基本特徵。直觀的認知是自我一致的，能自我解釋

的，自我可驗證的；直觀知識有如認知的源頭(Primitive)，是不需要進一步的分析，也不需要任何其他事實來做證明。例如，我們確信整體大於部分，二點決定一直線，這些陳述都是真實的不需要任何進一步的證明。

**二、理所當然(Intrinsic Certainty)**

Fischbein(1987)指出，直觀認知的第二個重要的基本特徵是“直觀被視為理所當然”。不驗自明和理所當然是高度相關的，理所當然是內在對某個數學敘述的自我肯定，但是，內在肯定不代表著不驗自明。例如，畢氏定理，學生內在肯定這個定理，但是，此定理並非是不驗自明的，它仍然需要邏輯的證明。同樣的不驗自明也不會代表著內在肯定。例如，在「考慮一線段 AB，在上面任取一點 C，然後將線段 AB 折半切割，且在一次將這二部分各自折半切割，將此過程重複連續這樣一直切，問學生是否有可能切到 C 點？」這個問題中(以下簡稱線段折半題)，Fischbein 的研究發現，7%的學生正確的回答：視情況而定。學生認為，這是高度的明顯，但是，卻是不肯定的。換句話說，學生感覺到他們的答案似乎是不驗自明的，但是，因為問題的複雜性，他們不敢確信他們的答案是正確的。所以，我們不能將不驗自明等同於理所當然。

Fischbein, Tirosh, 和 Melamed(1981)利用公式 $I=\sqrt{C\times O}$ （$I$ 表示直觀度(Intuitiveness), $C$ 表示信心(Confidence), $O$ 表示不驗自明的程度(Obviousness))來測量數學命題的直觀度(Degree of Intuitiveness)。信心和不驗自明的程度由特別設計的問卷來判定。研究發現：在許多例子中，研究對象在錯誤的答案上比正確的答案表現出較高度的自信心。高度的不驗自明和高度的信心(理所當然)產生高度的直觀感，也決定了個別直觀的強韌度(Robustness)。如果直觀是不正確的，很難消除它們，這強韌的知識顯示了特別教育處理的需要。經驗顯示，強韌的直觀，不管他們是

正確或錯誤，即使直觀與系統化的形式教學產生衝突，它們仍然存在。

內在的自我肯定不代表著客觀知識的判斷標準，但是，內在肯定是直觀知識判別的標準。若個人忽略了自己知識可能有些缺陷時，當他接觸某個尚未驗證的數學敘述時，卻已經有高度肯定感，這將會產生高度的自信。若是正確直觀的肯定是無妨，若是錯誤直觀的肯定，即可能造成很難去除的直觀迷思。

### 三、頑固(Perseverance)

直觀一旦建立，就很難改變。形式的教學提供學生概念性的知識，但是，卻對學生的原始直觀影響有限，而且，經常是直觀與正確的概念在生活中並存。例如有研究指出(Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979)，許多高年級學生在無限概念方面直觀迷思比例不但沒有比低年級的學生少，反而有穩定或增高的趨勢。這個例子說明，教學能提供學生概念性的知識，但是，在直觀教學上的影響可能不大。最重要的是，老師要對直觀有所了解，才能採取相關的的行動來幫助學生克服直觀迷思，並能運用正確的直觀於課堂教學之中。

### 四、強制性(Coerciveness)

直觀不但不容易被改變，更進而影響到我們的數學學習。直觀會對個人的論證和學習方向施加一種強制力，直觀的強制本質若造成錯誤的內在表徵，個體會不情願地接受已被證明的正確表徵。Fischbein(1987)曾舉例說明，在科學史上這種直觀的強迫性經常導致一種錯誤的詮釋，即使這些錯誤經過邏輯的證實，人們仍然不能接受正確的詮釋。例如，以地球作為宇宙中心的直觀想法，阻礙了哥白尼的太陽中心說的發展，

即使後來證明地球不是宇宙中心，我們仍然認為太陽是從東方升起西方落下，直觀的強制性可見一斑。

再看前面 Fischbein 研究中的線段折半題，發現超過 77%的學生回答是肯定的(錯誤答案)。如果這個點是無理數，則沒有一個連續細分的點會碰到它，但是，直觀上學生會覺得，經過無限連續細分的操作應該會碰到任何一個點。Fischbein 指出，儘管這些學生已學習過無理數，但是，答案還是錯的。由於「無限」的原始直觀的強制性，阻礙了學生接受「有許多點是無法分割到」的事實。

**五、理論型態(Theory Status)**

直觀不只是一個技巧或已知事實的知覺，它是一種理論型態。直觀不只是限制在陳述一個性質的普遍性或是事實的感知，我們經常透過特定的實體抓住一個原則、關係、或普遍性的法則而產生直觀。例如，接受歐幾里德的平行公設，並不表示我們能實際的畫出平行的線段，而是意味著，我們能直觀的抓住這個公設的原則，感覺上我們絕對相信兩條線是可以無限延伸的，它們應該不會相交。

**六、外延性(Extrapolativeness)**

有時個體會藉由不明顯的資訊外推而得到結論，這就可以說產生了直觀。一個直觀總是超出手中所能用的資訊，然而一個外推的猜測不一定是直觀，一個理所當然的感覺是直觀的必要特性，否則祇是一個猜測而已。直觀的最佳詮釋應是，資訊的不完整性和理所當然感覺的特別組合。例如平行線的公設，這個敘述直觀上是相當明顯的，它似乎不需要額外的資訊，也不需要邏輯的證明。事實上，個體已經不自覺地將這個

敘述外延到無限延伸的概念，個體將所見到線段平行外推到可以無限延伸，而直觀獲得明顯。但是，若個體依據不完全正確的資訊和內在的確定，而將某個數學性質外延到其他的性質，這將會產生過度的一般化，而過度的一般化經常會造成數學學習上的困擾。

### 七、整體性(Globality)

直觀是一種直接、快速、整體性、綜合性的觀點，沒有初步分析。直觀的整體性是指，個體會忽略某些元素或只依賴一些能夠快速產生的明顯元素而得出結論。個體容易只處理一部份的資訊，卻忽略了其他的部分。直觀思考與分析思考最主要的區別就在於，直觀思考的整體性。

### 八、隱含性(Implicitness)

有時人們會潛藏地使用相關的資訊，而產生直觀認知。在某些情境下，個體會隱含且不自覺地使用錯誤的直觀，例如投擲一枚硬幣連續出現許多次反面時，個體會不自覺的認為，下一次得到正面的機率會大於反面，而沒有察覺隱含在他預測機率背後的直觀迷思。因此，個體的直觀認知，會受到隱含的因素影響，不自覺地只注意到資訊的某個部分，而做出直觀的反應，導致錯誤的推理。

## 第三節　直觀的分類

Bahm(1960)提到直觀有三種型態：客觀的直觀(Objective Intuition)，是對外在世界的立即性理解；主觀的直觀(Subjective Intuition)，是個人自身的立即性理解；組織的直觀(Organic Intuition)，是客觀和主觀的直觀一起立即出現的理解(引自 Fischbein,1987)。

Poincar′e (1920)認為，直觀可分成有關感覺和想像的直觀，經驗歸納上的直觀,和純粹數的直觀(the Intuition of pure number)(引自 Fischbein, 1987)。他認為，純粹數的直觀是數學推導的泉源，是數學直觀最純粹的形式，與感覺和想像的直觀不同；他認為，數學直觀不必建立在感覺明白之上，感覺不久就會變得無能為力。例如，我們無法想像千邊形，但是，我們可以透過直觀思考多邊形，而千邊形只是多邊形中的一個特例(引自鄭毓信，1996)。依 Poincar′e 的觀點，數學歸納法正是這種純粹數直觀的典範，“因為，它只是證實了心靈的威力，我們的心靈知道，它本身能夠想像的出，只要某種行為一次是可能的，同樣的行為就可以重複無窮次。我們的心靈對這種威力有一種直接的直觀”。但是，Poincar′e 並不認為直觀是完全可靠的，他認為“直觀是不難發現的，但是，它不能給我們嚴格性，甚至不能給我們可靠性”。邏輯與直觀各有其必要的作用，兩者缺一不可，因為，邏輯能提供可靠性，它是證明的工具；而直觀則是發明的工具(引自鄭毓信，1996)。

Fischbein(1987)更仔細地將直觀認知分成兩大類,第一大類是根據直觀所扮演角色來做分類，第二大類則是根據直觀的起源來做分類。後者包括兩種類型的直觀：原始(Primary)直觀和二階(Secondary) 直觀；前者包括四種類型的直觀：肯定的(Affirmatory)直觀，猜測的(Conjectural)直觀，預期的(Anticipatory)直觀，和結論的(Conclusive)直觀。肯定的直觀可再細分成語意的(Semantic)、關係的(Relational)、推論的(Inferential)直觀、共同的(Ground, Common, Basic)和個別的(Individual)直觀。猜測的直觀可再細分成專家(Expert)的和生手(Lay)的直觀。其中，預期的直觀和結論的直觀組合而成問題解決的直觀。請參見 Fischbein 的直觀分類關係圖 2-2。以下詳述這兩類直觀。

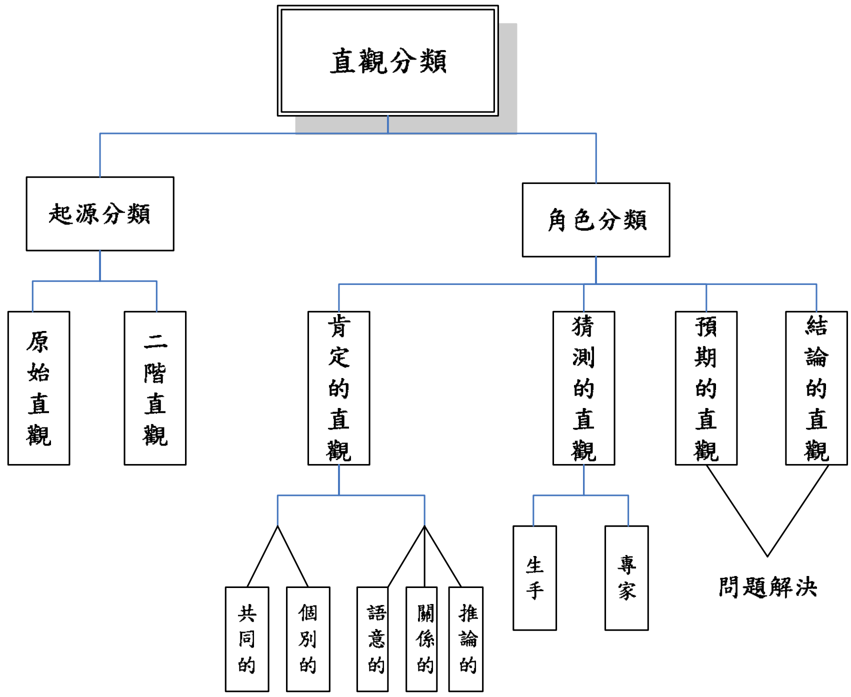



圖 2-2　直觀分類關係圖

## 一、依直觀所扮演的角色(Role)分類

### (一) 肯定的直觀

肯定的直觀是各種被視為理所當然、不驗自明的表徵和詮釋。例如，二點決定一直線或整體大於部分。肯定的直觀可做細分語意的、關係的、推論的、共同的、和個別的直觀。

### 1. 語意的直觀

語意的直觀和概念的意義有關，例如，關於直線的概念，在幾何學上依照已知的公理系統，直線有一非直觀的公理上(Axiomatic)的意義。但是，直線也有一些相關的直觀的意義，例如，行為上的(Behavioral)意義為二點間最短的距離，物理上的意義為一個光束，功能上-材料上的意義為一條具有良好延伸性的細繩。力的概念在公理上的意義是，由質量和加速度的關係來決定(即 F＝ma)，但是，它也有各種直觀的詮釋，例

如，基本行為上的意義為一種努力的感覺或者用力搬東西。

**2. 關係的直觀**

關係的直觀，它表現在明顯的不驗自明的陳述上。例如，線外一點僅有一線與該線平行，整體大於部分，為了維持物體的運動，必須施加一定的力，以及較重的物體比較輕的物體掉落的速度快。以上陳述有些是正確的，有些則是錯誤的，但是，我們會很自然地傾向於接受它們且視為不驗自明、理所當然。

**3. 推論的直觀**

推論的直觀，它有一種歸納或演繹的結構。某人在發覺某些元素(Elements)有某種共同的特性以後，傾向於直觀地去推論和確認整類的元素都具有此特性。這不僅是邏輯的操作，這種推論或多或少有一種自信的感覺，這是科學上基本假設的來源。Poincar′e(1920；引自 Fischbein, 1987)指出，經由歸納、複製而做推論，可以說是實驗科學的程序。推論的直觀也被描述成具有演繹的形式，例如，從 A＝B 且 B＝C，我們演繹出一個不驗自明的結論 A＝C。在一直線上，如果點 C 介於點 A 和點 B 之間，而點 D 介於點 A 和點 C 之間，則點 D 介於點 A 和點 B 之間。此結論是直觀地被接受，這例子不僅是概念的或陳述的，而且也是邏輯的推論，前提和結論之間的關係是被視為不驗自明、理所當然的。

**4. 共同的直觀**

我們稱所有在個體身上自然發展（一般是在孩童時期，且為某種文化下所共有）的這些基本表徵和詮釋為共同的直觀。例如，空間和時間的表徵、關於因果的直觀、關於基本的物理特性的直觀，均屬於這一類。

### 5. 個別的直觀

個別的直觀是個人所獲得的直觀，這與日常生活和活動有關。例如，我不相信約翰的承諾，我的直觀告訴我他是一個騙子；美國人是天真的民族；以及我不是職業的心理學家，但是，我直觀地認為，I.Q.測驗經常是誤導的工具。這些都是個人在日常生活或活動中所發展出來的直觀，這是個別的，個人所特別擁有，別人所沒有的直觀。

## (二) 猜測的直觀

在肯定的直觀中，個體會肯定某些事情；而猜測的直觀表達的是，關於未來事件的假設，關於某種現象的假設。如此的猜測要成為直觀，伴隨的必定是一種自信的感覺。猜測的直觀可分為專家的和生手的直觀。

生手的直觀，並非基於專業的知識，而只是基於每日生活經驗。例如，這個小孩子將成為一個偉大的數學家；傍晚的天空泛著不尋常鮮紅色的彩霞，我相信最近將會有暴風雨。某些領域的專業人員(Professionals)具有豐富的經驗，從他們專長領域的活動中，會發展出特別的專家的直觀。例如醫生、老師、工程師等等，能經常的在他們的專業領域中，僅僅基於一明顯的少量的資訊和敏銳的觀察力而做決定。專家能夠選擇所獲得的資訊，並從中去抓取最大相關的觀點，以決定資訊所代表的意義，在已知的環境下，去衡量各種可能詮釋發生的機率，和去組織所有的資訊，使之成為有意義、高可行性的結論。最重要的是，專家有能力將模糊、不明顯的資訊，轉換成相關的訊息。這些都將在任何系統化、完整的分析之前，被自動地完成。這樣的結果顯示出，一種直觀的、整體性的評估。所以，猜測的直觀在每一個職業活動中扮演了重要的角色。

## (三) 預期的直觀

預期的直觀代表初步的、整體性的觀點，藉以進行分析、完整發展一個問題的解答（Solution）。此類型的直觀經常在解題（Problem Solving）的研究領域裡被提到。Fischbein(1987)認為，猜測(Conjectures)有兩種型態。一種是在確定的情況中，考慮各種變數間的可能關係，是慎重的、形式的產生猜測，這種型態的猜測與 Piaget 在形式運思期所描述的一般性質相似，也就是說，青少年能夠根據列出的系統性假設，辨認和建立可以影響確定現象的假想因素。這種型態的猜測不是直觀的表徵，整個過程是謹慎、明確、可完全掌控的情況。第二種猜測之初可能出現不確定的情形，但是，之後可能會產生客觀的分析。經由解題的過程，它們可能主觀地出現，如啟發的片刻(as moments of illumination)，確定、明白、整體地抓住事實，這就是預期的直觀。

Tall(引自 Fischbein, 1987)認為解題中的猜測情況是，研究者從不覺得他在猜測，甚至後來證明這猜測是錯的，但是，當時他卻感到非常的確定，覺得那就是事實(Truth)。他們是強烈的直觀肯定，但是，出現想法的那一刻，通常是薄弱而不能持久的(tenuous and transient)，必須在它們如鬼魅般消失在夜晚之前，立刻將它寫下來，即使它們是不完備的。Fischbein 認為，Tall 的說法適切地描述了直觀性質的基礎矛盾，亦即，新的概念出現時是強烈的直觀確信，同時也是薄弱不能持久的。如此矛盾的情況是不可能出現在一分析的、概念的層次。因為，在概念的層次上，不完美的東西是不能如事實般地被接受；然而在直觀的階段，這種情況常會發生。從分析的觀點來看，這是一奇怪的情況，正是直觀的角色給與不完備的解答，卻呈現出完美和確信的本質。

肯定的直觀和預期的直觀的區別在於，個別認知行為角色的不同。經由一個肯定的直觀，某人接受的是一個不驗自明、確定的觀點，一個確定的陳述，例如，線外一點僅有一線與該線平行；而預期的直觀並非簡單的建立一個明顯的事實，它似乎是一個發現，是問題的一個解答，

而且是解題前一種突然的結果。另一方面，猜測的直觀和預期的直觀的區別在於，預期的直觀代表解題過程的一個階段（接下來分析的處理是必須的），而猜測的直觀，或多或少，是一種評估和預測，一般並不包括在一個系統的解題活動中。

事實上，明顯的區分是不可能的。我們應該要考慮的是：如何從肯定的 (Affirmatory)經過猜測的(Conjectural)到預期的(Anticipatory)直觀？而所有類別的直觀皆包含，肯定的態度和預測的元素(the affirmatory attitude and the element of conjecture)兩種成分。這是由情境脈絡所決定，當然，也有本質上的不同。解的態度(the solution attitude)在肯定直觀中是相對緘默(relatively tacit)，而在猜測和預測的直觀中是明確的。肯定的直觀是對於一般的普通情境，呈現一個穩定的認知態度；預期的直觀是初步解決一特別問題的方法。而且，或可認為預期的直觀可能被現有的肯定直觀鼓舞、指導、刺激或阻礙。

Bruner(1965，引自 Fischbein, 1999a)認為，應該經由課堂活動鼓勵學生表達預期的直觀，而且，應該訓練學生如何評估一個問題解的策略。假如，學生沒有機會和他的同儕共同面對自己的預期直觀，可能就無法培養此種能力。

**(四) 結論的直觀**

預期的直觀和結論的直觀組合而成問題解決的直觀。結論的直觀是，將一個問題解答的基本理念綜合為一個整體的、結構化的觀點。正如同 Hadamard(1949，引自 Fischbein, 1987)所說，“任何的數學論證，不管多麼複雜，對我來說，都是單一的事情，只要不能成功的抓取它成為一整體的理念，我不認為我已懂得它”。

## 二、依直觀的起源(Origin)分類

### (一) 原始直觀

原始直觀是，根據個人的生活經驗發展而來，與認知和信仰有關。而認知與信仰是個人獨立發展而來，不受任何系統教育的影響。原始直觀包含前面所提到的共同的和個別的直觀。所有前面提到關於共同的直觀的例子，通常都是原始直觀。另外，小孩會依照他們生活和活動的方式，發展出特殊的直觀（個別的直觀），例如，區辨顏色的直觀、評估距離或重量的直觀、和空間定位的直觀。即使在進入學校接受形式教育以後，原始直觀仍有可能發生。學童在學習乘、除法的運算時，由於他們的經驗僅限於正整數的運算，經由這種有限經驗的外推，學生可能會產生一種直觀，認為：乘法運算的結果會變大、除法運算的結果會變小。此種直觀，是由學生自己的認知系統外推的結果，這就是一種原始的直觀。

### (二) 二階直觀

二階直觀隱含了一種假設，如此的直觀並非由個人自然、獨立的經驗所產生。也就是說，新的直觀雖然沒有自然的根源，也可以被發展出來。對於同一個問題，二階直觀經常與原始直觀相矛盾，例如，依照我們的原始直觀，我們傾向於認為，為了要保持一個移動的物體等速，施予外力是必須的。依照此表徵，當一物體被推動以後，它需要一個外力使它保持運動，直到外力消失為止。相反的，根據牛頓運動定律，一物體如果沒有外力的介入，它將保持靜止或等速直線運動，這即是慣性原理。但是，直觀上很難接受這種詮釋，如果，此種詮釋能從一個學習過的概念轉換成一種信仰，則此信仰就是二階直觀。很明顯的，如此的信仰絕非在日常生活條件下所能獲得的。例如，三角形的內角和是 180 度，

這不是不驗自明的，人們需經由證明才能接受它。如果經由某種方法，我們變得能夠直接去看這個總和是一個常數，知道無論什麼形狀的三角形，它們的內角總和均維持不變，那麼，我們已經獲得一個新的直觀理解，亦即，一個二階的直觀。

原始直觀是依據普通的日常生活經驗發展而來，是在教育介入之前，我們已具有的理念和信念。對於個人的理解而言，原始直觀不是充作一種動力，就是形成一種阻礙。而二階直觀並非經由自然的經驗所獲得，而是經由教育（學校教育、社會教育）的介入，學習而來，是被重新構造的認知和信念，常是源自於某一概念領域的理論，是一種科學性的概念。通常，對於相同的概念來說，原始直觀和二階直觀是不一致的。

在以上這些直觀的分類中，Fischbein 特別討論了推論(Inferential)直觀的重要性。Fischbein 認為，推論的直觀是伴隨著邏輯運算，但是會感覺很明白，它們本質上和論證有關，且可能是原始直觀或二階直觀。推論直觀是科學和數學思考的基石。藉由直觀我們接受歸納推論的普遍性，任何邏輯的推論，不是純粹的認知結構，它總是表現出超過基礎邏輯的態度，這是推論有效性的信念。

Fischbein 認為，數學教育不應滿足於訓練盲目自動的數學形式規則和邏輯思考的技巧。這種形式的訓練，在實際解題的過程中是沒有多大用處的，或許只適用於盲目訓練取向的作業有效。就像，我們可以教學生邏輯運算的真值表(the truth table of implication)，但是，假如伴隨的直觀沒有被發展，學生就不能在思考過程中自然地使用真值表。例如，告訴學生一敘述「假如 A 是正方形，則其兩對角線長相等」後，再反問學生「若 A 不為正方形」，則學生自然地傾向認為「A 的兩對角線長不相等」；另一方面，若問學生「若 A 的兩對角線長相等」，則學生自然地傾向認為「A 為一正方形」。由這些情況可知，學生無法自然地判斷否

定命題及逆命題的正確性。而在 Kuhn 的研究(引自 Fischbein, 1987)中，曾對一些受試者提出，「所有住在 Tundor 的人，皆有金色頭髮。Dave 有金色的頭髮，他是否住在 Tundor？」學生的第一個反應是「Yes」，但是，有些人就立刻自我修正說「不，我有金色頭髮，但是，我不住在 Tundor」。Kuhn 認為，這些命題的意義在日常生活中是非常清楚的，在這種情況下，使學生能辨認「~p 與 q」間之關係。Fischbein 認為，事實上在這個例子中，孩童最後得到正確的結論，不是因為他知道真值表，他的真實泉源似乎是在邏輯之外。Bereiter(1979,引自 Fischbein, 1987)也強調，當推估一孩童推理表現的能力時，必須區分是嚴密的邏輯推理，或是使用非邏輯資料所得的推理。

由以上直觀分類的討論中，可看出直觀包含著許多意涵，有著極端的兩面，它可能是解決問題的靈感(預期的直觀)，也可能是錯誤的源頭(原始的直觀)。Fischbein 認為，預期的直觀可能受肯定的直觀鼓舞、指導、刺激或阻礙。個人認為，正確的肯定直觀應有助於產生正確的預期直觀，而預期直觀經邏輯推理的驗證之後，可能轉化為肯定的直觀(二階直觀)。所以，要將學生原始直觀修正為正確的二階直觀，必須厚植學生的推論直觀、肯定直觀的能力，利用課堂活動引導發展學生預期直觀的能力，往 Poincar′e 所謂存粹數的直觀方向努力。個人覺得，其實 Poincar′e 存粹數的直觀就是一種二階直觀，屬於數學家的二階直觀，或許這種直觀比一般人二階直觀的層次更高，但是，這也說明了直觀的能力是可學習的。

## 第四節 直觀的學習

### 一、直觀與學習的關係

由前面的討論可知，直觀不僅會產生穩定的反應方式，同時，也會

組織自主的信念系統，進而影響學生的判斷和學習。Fischbein, Deri, Nello, 和 Marino(1985)的研究顯示，每一個算術的基本運算，通常會與一個隱含的、非知覺的、最初的直觀模式保持聯繫，此直觀模式會限制了數學運算的過程，即使學習者在接受了固定的、正式的算術訓練以後，此模式仍會默默的影響運算的選擇。他們更進一步指出，此直觀模式似乎會無知覺地產生作用，而且不為解題者所控制。Tirosh 和 Stavy(1999)研究數學和科學概念的學習，發現學生在某些類別問題上的直觀反應模式相當類似。許多學生在解決不同內容、不同概念或不同推理的問題上，尤其是，當問題之間有部分的相似特性時，常常使用類似的方法與認知，這些認知有時是正確的，對於學習有很大的幫助，而有些是不正確的，則對於學習是一大阻力。於是，他們提出了一個可以解釋和預測學生回答的「直觀法則理論(The Theory of the Intuitive Rules）」。這些可引出學生相同答案類型問題的共通之處，不在其科學或數學的內容，而在其問題的外在特徵。似乎某種問題的外在特徵活化了某一相關的、特定的直觀法則，進而決定了學生的答案。以下詳細說明More A-More B和SameA-Same B這兩個與數學學習相關的主要直觀法則。

**(一) More A-More B**

在被比較的兩個物體(或系統)的某一個量 A 有很明顯不同($A_1 > A_2$)的條件下，當被要求去比較兩個物體(或系統)另一量 B 的大小時，許多學生會根據非充分的 A 比較多，就認為 B 就會比較多，而回答 $B_1 > B_2$。例如，在「新設立的公司想要成功，必須在 6 個分別獨立的過程都成功，而每個過程成功的機率皆為 0.8。試比較公司成功的機率與失敗的機率何者較大？」的問題中，學生會因每個過程成功的機率較大(More A )，而認為最後公司成功的機率較大 (More B )，產生錯誤的直觀反應。

### (二) SameA-SameB

被比較的兩個物體(或系統)的某一個量A相等時(A1＝A2) ，當被要求去比較兩個物體(或系統)另一量B的大小時，很多學生常會認為：因為A1=A2 ，所以B1=B2 ，而做出不適當的反應。例如，比較投擲公正硬幣三次獲得二次正面的機率和投擲硬幣三百次獲得二百次正面的機率時，學生會因有<u>相同的比例</u>(Same A ， $\frac{2}{3}=\frac{200}{300}$)，而認為有<u>相同的機率</u>(Same B )，產生錯誤的直觀反應。

Stavy 和 Tirosh(2000)認為，這些直觀法則具有直觀的特性；基於此法則的陳述容易讓學生覺得，是不需要做任何證明，它是不驗自明的；它被使用時充滿自信，且很頑固，即使有教育的介入，它們仍然存在；此法則有整體性的屬性，學生傾向於將它應用於所有問題，不管是數學或科學問題；它還具有強制性，學生的反應似乎是絕對、單一的，其它的選擇將被排除在外，不被接受。直觀法則具有預期的特徵，它可以預測學生在某些類型問題上的回答方式(模式)，因此，透過對於直觀法則的了解，對於教學與學習都將有很大的助益。

但是，也有些學者(例如，Van Dooren, De Bock, Weyers, & Verschaffel, 2004)認為，直觀法則並沒有那麼強大的預測力，學生雖然選擇與直觀法則一致的答案，但是，他們的理由並非總是因直觀法則而生，可能來自其他的迷思概念。根據個人的教學經驗，也曾經發現學生並非在所有More A-More B 和 SameA-SameB 的數學問題上，都會受題目外在特徵的影響而出現直觀法則，有一部分可能是，因為不清楚某些科學性的概念所引起的迷思。例如，在「甲袋中有 6 個紅色、2 個黑色的彈珠；乙袋中有 3 個紅色、1 個黑色的彈珠，分別從二袋中各取出 2 個彈珠，則從哪個袋子中取到 1 紅 1 黑彈珠的機率較大？」這個問題中，並非只是因

兩袋中紅、黑色的球數比例相等，學生就會認為二者機率相等；很可能學生忽略了從袋中取出一球後，兩個顏色球數的比例就已改變，因而產生錯誤。但是，有些時候，學生的確會受直觀法則的影響，而做出錯誤的判斷，例如「$a>b$ 則 $a^2>b^2$」，這常常是因為學生未多加思索而做出的直觀反應。

根據研究顯示，直觀雖然常會與正確的數學或科學概念相違背，但是，因為它具有整體思考的特性，通常在解題的最初階段扮演了重要的角色，因此，正確的直觀很可能就是後來順利解題的關鍵。Fischbein(1987)指出，預期的直觀屬於問題解決的直觀，它並非簡單的建立在一個明顯的事實之上，它似乎是一個發現，是問題的一個解答且明顯的是解題前一種突然的結果。另外，有許多重大的發現都是源自於直觀，例如歐幾里得依據幾何學的五大公設，從而建立起歐氏幾何學，哈密頓在散步的路上，觸發了構造四元素的火花，阿基米德在浴室裡，找到了辨別王冠真假的方法。這些都是直觀思維的成功典範(陶可，2004)。直觀也可以幫助數學抽象概念之學習，Van Hiele(1986)就認為，所有理性的知識(Rational Knowledge)開始於直觀知識(Intuitive Knowledge)；若能夠嘗試將這些直觀知識發展成語言符號，相關的理性知識就會出現。

個人在教學中也有相似的體會，例如，在檢討 91 年學測的考題：

> 某甲自89年7月起，每月1日均存入銀行1000 元，言明以月利率0.5%按月複利計息，到90年7月1日提出。某乙則於89 年7 月起，每單月(一月、三月、五月…)1 日均存入銀行2000 元，亦以月利率0.5%按月複利計息，到90 年7 月1 日提出。一整年中，兩人都存入本金12000 元。提出時，甲得本利和A 元，乙得本利和B 元，比較A、B之大小。

即體驗到，由抽象的數學式$A=1000[\sum_{k=1}^{12}(1.005)^k]$，$B=2000[\sum_{k=1}^{6}(1.005)^{2k}]$，似

乎比較難看出A、B之大小關係，於是先簡化上述問題，由直觀的觀點引導學生重新看待這個問題：甲前兩個月所存的2000元，只有第一個月存的1000元會生兩個月的利息，而乙前兩個月所存的2000元，兩個1000元都會生兩個月的利息，因此，很容易看出B>A。再將此直觀轉化成數學式，如下：

$$A=1000[\sum_{k=1}^{12}(1.005)^{k}]$$
$$=1000[1.005+(1.005)^{2}+(1.005)^{3}+(1.005)^{4}+\ldots.+(1.005)^{11}+(1.005)^{12}]$$
$$B=2000[\sum_{k=1}^{6}(1.005)^{2k}]=1000[\sum_{k=1}^{6}(1.005)^{2k}]+1000[\sum_{k=1}^{6}(1.005)^{2k}]$$
$$=1000[(1.005)^{2}+(1.005)^{2}+(1.005)^{4}+(1.005)^{4}+\ldots.+(1.005)^{12}+(1.005)^{12}]$$

學生即可很容易確認這直觀想法是正確的。由以上的討論可看出，正確的直觀在學生的學習上扮演了相當重要的角色。個人認為，對於直觀，學生應該抱持著適度的相信直觀的態度，但是，必須是正確的直觀。這就有賴於學生不斷的擴充學習領域，發展強化自己的原始直觀。

數學概念影響直觀的表現，正確的數學概念引發正確的直觀，若是不正確的數學概念，常會引發直觀迷思。而在學習數學概念時，若是學生先出現直觀的迷思，對於學習必定是一種阻礙，因此，幫助學生克服自己的直觀迷思，建立正確直觀，同時重新建構正確的概念，都是相當重要的。根據個人的教學經驗，發現不求甚解，如 Skemp 所謂慣性學習的學生，較容易受直觀迷思的影響。因此，接著討論 Skemp 的概念學習理論。

## 二、Skemp 的智性學習

Skemp(1987)認為，學習分為智性學習(Intelligent Learning)和慣性學習(Habit Learning)。慣性學習是心理學行為學派研究的對象，透過刺激

與反應的密切聯結，形成習慣，學習是發生在動作之後，學到的就是一些動作，認知的成分很少。例如，當我們背誦一個電話號碼時，反覆、機械的口部動作，就是一個口頭的慣性學習。智性學習是目標導向的，利用可變的行動計畫，隨新的外在情境來修正，學習是發生在動作之前，動作不只為達成目標，也可以用來測試假設。例如，背單字時可靠發音來幫助智慧學習。習慣是很頑固，適應性很低，而智性學習卻具有高度的適應性。

學習模式中的目標導向過程，Skemp稱之為指導系統(Director System)。在智性學習模式中，不僅行為是目標導向，學習也是目標導向，它相當於建構並測試一套累積的知識結構，因此，我們的學習需要兩套指導系統。第一指導系統(Delta1)接收現在情境的各種資訊，與某一目標情境比較，利用既存的各種基模(Schema)制定一套行動計畫，促使我們在物質環境中達成目標。第二指導系統(Delta2)的作用對象是Delta1，它能使Delta1發揮最大且完美的功能，也就是增加我們的能力去做我們想做的。更仔細地說，Delta2為Delta1建立大量的基模，使之能執行許多不同的工作；Delta2再由這些大量的基模中，選取特定的計畫，將現在情境轉到目標情境中。這就是Delta2的目標，前者是學習的目標，後者是計畫的目標。

Skemp(1987)將基模譬喻成認知地圖(Cognitive Map)，基模是個人知識的認知結構(Cognitive Structure)，形成相連概念的網路，較接近的連結可活化、加速反映、提高在其他概念的察覺。但是，若現狀與目標狀態離得太遠，無法察覺到連結的路徑(無法聯繫現存的基模，即遇到一些不能理解的觀念、事物、或經驗的心理狀態)，這代表心智迷路了。此時，Delta2無法制定任何新的計畫，此時需靠重新獲得理解，以聯繫一個現存的基模，藉由反思的過程，在目標的領域中察覺、選擇一個可到目標的

路徑。就像使用地圖時，如果地圖上的資料不足，則可藉由回憶附近的街道而找到目標的方向，使情境再度進入指導系統的範疇中，並加以處理。這種心智狀態的改變增添我們本來不具有的能力，理解(Understanding)使情緒由不安轉為自信，並帶來愉悅。

相對於慣性學習和智性學習，Skemp(1987)認為，理解可分為機械式理解(Instrumental Understanding)和關聯式理解(Relational Understanding)。前者是，能夠將硬背的公式應用於特定的問題，但是，卻不知其背後的原因和原理。在這種情況，學生只是操作一些數學符號，只要透過Delta1接收、反應就完成學習了，這種學習方式所建立的基模是短期的，其實，這是一種畸形的基模━公式、秘笈。這種基模幾乎沒有適應力，碰到新的問題就沒輒了。後者是，要建立整體的概念結構，並通曉其中相互關連。新的概念透過學習同化到適當的基模，使概念結構成長，整個概念結構在學習後有一番重組、凝聚、增長、強化，於再次面對特定問題時，可以推論出適當的解決方法。在這種情況下，學生必須處理新的概念，所以，Delta2就變得非常活躍。關聯式理解的目標是長效的，建立新概念或許不如背公式來的快，但會記得久，即使不慎忘了，只要稍加反思就可再次獲得。關聯式理解就像擁有一張地圖，它可以幫助你連結現狀與目標狀態，無論地圖是否包含整個城市或是問題領域的認知基模，它可以幫助我們找到連結的路徑。藉由心智地圖，個體可以在腦海中連結起點與終點，而且能夠修正方向，不會迷路。

Skemp認為，人類的心智活動分為直覺智慧(Intuitive Intelligent)和反思智慧(Reflective Intelligent)。當外界資訊剛剛輸入Delta1的瞬間，若立即同化到適當的基模中，就是直覺式的心智活動，此時，個體的自覺性只停留在Delta1。反思智慧是個體內省自己的概念結構、透析自己的心理程序，描述給別人聽，並會主動地修正。反思式的心智活動，會將個體

的自覺集中在Delta2，並會知覺到Delta1的存在、運作、了解背後的原因。Skemp引用Bruner(1960)的觀點，認為直觀是不自覺地使用個體分析儀而能快速地抓住一個問題的意思、要點、結構，這就是他所謂的直覺智慧。他認為，直覺的靈感常常是嚴格推廣的先驅，沒有靈感我們常常找不到探索的方向，但是，直覺不保證會產生正確的理解。外界資訊可能觸動不適當的基模，經反思之後才察覺錯誤，這就是為什麼直覺一定要回歸到理性論證的原因。

依Skemp的理論，Delta 1著重在物質的察覺，是直觀的過程，Delta 2著重在心智的察覺，是反思的過程；而慣性學習者通常是機械式理解，學習通常只靠Delta 1，即使想用反思式的心智活動，也可能找不到適當的基模。個人猜想，這就是為什麼慣性學習者容易受直觀迷思的影響。智性學習中，學生的認知地圖引領其進入探索區域，那裏的事物和既知區域的觀念有點像又不全像，學生利用推廣能力去理解新事物，也較有能力驗證直觀的想法是否正確。慣性學習中，沒有什麼探索區域，任何沒背或不符合舊規則的新問題只能等待老師的援手，或只憑直覺去解決，缺乏反思的能力。因此，個人認為，數學教師應該幫助學生驅向智性學習，讓學生發展關聯式的理解，活躍他們的Delta 2，如此才能使學生較不受直觀迷思的影響。

## 第五節 直觀的教學

Resnick(1999)的研究指出，雖然直觀知識具有不驗自明、理所當然、頑固、強制性等特徵，但這並不意味著直觀不能被學習。他認為，直觀是可以從原始的直觀經由形式的教育而進化到二階的直觀，因此，直觀是可以學習的。若想在數學教學的活動中，納入直觀，我們可以從教學情境中的直觀與邏輯知識(Logical Knowledge)、克服直觀法則的教學、直

觀與抽象邏輯思維的培養、和機率與直觀教學等四方面來討論。

## 一、教學情境中的直觀與邏輯知識

若想了解決學生在學習數學上的困難，老師必須先瞭解直觀與邏輯知識間的關係，並具備以下四種教學認知(Fischbein, 1999a)。

### (一) 直觀和數學邏輯分析相符合的情境

這似乎是老師最喜歡的教學過程，但是，實際的教學是不同的。例如，「$\Delta$ABC 中，若 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 則 $\angle B=\angle C$」如此直觀明顯的敘述，對學生而言，證明是多餘的，可是，若只讓學生直觀的接受某個性質，容易讓他們忽略了這個性質在數學上的重要意義。為何要強調直觀明顯的敘述呢？Fischbein（1999a）指出有兩個原因：

(1)數學是演繹的、形式的、嚴謹的系統。每一個性質、每個可接受的敘述或概念，都應該被公設、定理、定義，法則所驗證。直觀的表徵不能視為可接受的論證，因為，直觀可能會產生誤導。

(2)直觀明顯的性質常常無法自動地推廣到任意的數學系統中。學生容易將學到的性質自動地推廣到其他的數學情境中。例如，在解一元一次方程式的時候， $-2x=4$，下一步是 $x=\frac{4}{-2}$；而學生會將這樣子的性質推廣到解不等式方程式， $-2x>4$，下一步 $x>\frac{4}{-2}$。學生會直觀認為，解方程等式的性質可以自動推廣到解不等式，而發生錯誤。

所以，要使學生有能力區別直觀的信念(Intuitive Beliefs)與形式上的取信(Formal Convictions)是數學教育的一重要工作。在數學上，一定要用到形式證明，以增加概念的正確性，假如形式的觀點被忽略，那麼，學生將傾向於完全依賴直觀的論述，這就不像是數學了。

### (二) 直觀明顯和形式數學產生矛盾的情境

在這種情況下，老師必須確認學生的直觀傾向和嘗試解釋它們的來源，以便幫助學生克服學習的困難，讓學生了解矛盾。但是，只是讓學生知道潛在的衝突是不夠的，他們必須明白數學定義的陳述，分析明確的性質，了解最後的決定者是形式的數學。例如，要學生說出“平行四邊形”的定義，並分辨哪些圖形是平行四邊形。有些學生不認為矩形與菱形是平行四邊形，是因為，根據圖形的視覺結構對形狀的直觀解釋與其形式上的定義發生衝突(矩形與斜的平行四邊形視覺結構是不同的)。只有當學生在數學上有足夠的訓練，他才能夠不依賴形狀而能靠形式的定義去分辨。又例如，所有自然數的集合$\{1,2,3,4,5,6,...\}$與偶數的集合$\{2,4,6,8,10,12,....\}$哪一個集合的元素較多？學生的第一個直觀反應是：這兩個集合的個數不可能相等。但是，若考慮其另一種表徵方式，即利用集合元素一一對應的關係，這二個集合的個數在直觀上又是相等的。問題的不同表徵會決定學生的回答，而學生不易察覺到這樣的衝突。若是忽略了這些衝突，忽略了學生錯誤的直觀反應，這個衝突會一直存在，最後，學生會忘記形式的數學。因此，幫助學生了解衝突是有助於學習的，教學的時候可以將學生的錯誤或迷思提出討論，以消除學生的直觀迷思。

### (三) 形式、數學的敘述和直觀表徵無任何關聯的情境

學生終究必須依賴數學的形式，他們必須適應數學是抽象的、形式的、演繹的系統化知識。直觀模式通常很有用，但是，不是永遠有用，最終，數學仍需建立在演繹邏輯的基礎上。例如，$a^{\frac{1}{2}}$的意義很難用直觀的方式解釋，這需要藉由邏輯演繹的方式解釋。嘗試創造一個概念或製作人造的直觀模式，對學生學習數學可能是沒有幫助的。

### (四) 直觀與形式數學都難以處理的數學概念或運算

這種情境是相當複雜的，例如，教學生減法時，$\begin{array}{r} 1702 \\ -\ 1368 \\ \hline \end{array}$ 一開始，學生遇到第一位數不能相減，直觀上難以從 2 減去 8(所以，有些學生會用 8-2)，因此，又必須考量借位的問題，而下一位又是 0，又必須向 7 借位，學生會因此迷失了自己的方向。這說明了減法對學生而言，是相當困難的。此時教師應讓學生理解，每一數字所在位置所代表的意義。

由以上討論可知，直觀和形式數學的情境是息息相關的。在教學上，老師要瞭解在理解或問題解決的過程中，學生的直觀和數學形式、程序方面的交互作用，並且，適時幫助學生克服可能的障礙。

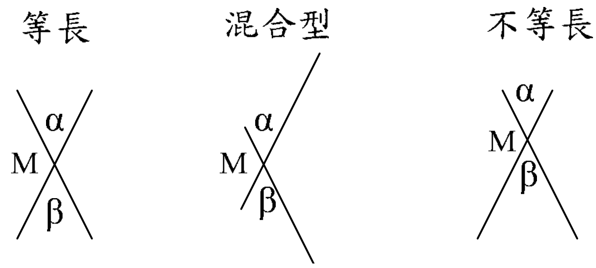
## 二、克服直觀法則的教學

Tirosh 和 Stavy（1999）指出，直觀法則理論的預期力量，可以用來幫助學生克服直觀法則的副作用。要達成此目標，類比的教學和衝突介入的教學是比較有效的。

### (一) 類比教學

在類比的教學中，將一系列的數學問題重組，而始於一個**定錨**(Anchoring)問題，經過一個**搭橋**(Bridging)問題，最後再到**標的**(Target)問題。首先呈現的定錨問題，沒有令學生一看到就會想用直觀法則的特徵，通常會引出正確答案。接著，呈現搭橋問題，此時，不相干的特徵會引出直觀法則，而且會逐漸明顯。最後，標的問題即強烈地暗示直觀法則。例如，在 Tsamir(1997，引自 Stavy & Tirosh，2000)的研究中，如果兩個對頂角夾角的邊等長，學生就會視為角相等；但是，若有一個角夾角的邊較長，他們就會解釋為“β的角比較大，因為它的邊比較長。”

這樣的解釋符合了直觀法則 Same A-Same B。




在這個類比教學的案例中，夾對頂角的兩邊等長的例子被用來作為定錨問題，而混合的表徵被用來作為搭橋問題，先呈現在學生面前，再旋轉 90°，得到了一個對頂角的不同表徵(即標的問題)。

## (二) 衝突教學

衝突教學則是，先呈現一個問題來引出學生的錯誤答案，接著，呈現一個和學生錯誤答案衝突的情境。這樣可能會引起學生察覺到，他們最初的答案是不適當的。而創造矛盾的方式有，呈現給學生矛盾的具體證據，或呈現給學生與原先問題在本質上相似的問題，但是，要能夠引出正確答案，或是呈現給學生正式且相關的知識。例如，Dembo, Sigler, 和 Levin (1997，引自 Stavy & Tirosh，2000)的研究，先呈現給學生一個幾何圖形，然後，在學生面前變換成另一個圖形，形狀改變但是周長不變。要求學生去比較這兩個圖形的面積大小。結果，學生的回答是“周長相同則面積相同”。這個答案很明顯是符合 Same A-Same B 的直觀法則。接下來，他們以正方形和圓為例，要求學生去想像把正方形變換成菱形，把圓變換成橢圓，可能發生什麼事？把它想像到最極端的情形，使面積變成 0，將會引出面積會隨著變換而減少的想法。而這個結論將和變換後面積保持不變的想法相衝突。他們發現面對此衝突情境的學生，會再次出現 Same A-Same B 迷思的頻率較低。

## 三、直觀與抽象邏輯思維的培養

直觀或許有助於學生的數學理解與解題能力，但是，不正確的直觀卻會擾亂學生數學思考的過程，因此，教師必須幫助學生克服直觀的迷思。Fischbein(1987)認為，教師在介紹一個新的數學或科學概念時，通常會使用直觀的模式，這有助於概念的獲得。然而，有些初始的直觀容易依附於某些概念，因此必須儘早為後續理解一般形式抽象的意義和定義作準備，讓學童瞭解所教的概念形式上的意義及內容，釐清不同概念及操作間的關係，進而建立共同基本結構，避免使直觀的解釋成為將來難以改變的迷思。例如，學生在開始學習乘法時，要避免使學生有"愈乘愈大"的迷思，必須使學生了解更多乘法結構的一般意義。學生必須學習去分析和形式化他的原始直觀，也就是，要學習如何從實物的練習和直觀的解釋中，抽象出形式數學的結構，並學習如何將它們描述清楚。例如，我們能夠直觀地辨認圓形、正方形、和三角形，但是，仍要試著精確完整地描述其共同、一般的特質，這樣的練習能夠訓練學生控制他的原始直觀，不被直觀誤導，也能保持直觀創造的貢獻。Van Hiele(1986)也認為，假如能呈現對直觀的洞察，應會有助於學習抽象數學概念。直觀始於一結構的呈現，因此，將結構訴諸於學生是必要的。所以，教學最好從例子開始，先討論例子中的現象，然後指出它的結構，再對這情況下最有效的定義。

Polya 認為，數學家的創造性工作成果是論證推理，即證明，但這個證明是通過合理猜想而發現的(李心煽，王日爽，和李志堯譯，1992)。例如，今天人們所知道的數的性質，幾乎都是由觀察所發現的，並且，早在用嚴格論證確認其真實性之前就被發現了。甚至到現在，還有許多關於數的性質是我們所熟悉而不能證明的，只有觀察才能使我們知道這些性質。個人認為，這樣的觀察發現，即是 Fischbein(1987)所謂的預期直觀。他認為，要發展直觀必須考慮預期的直觀，雖然，數學是一推導演

繹的知識系統，但是，在建構數學的過程中，類比和合理的猜想應是基礎。Poincar’e 和 Polya(引自 Fischbein，1987)也認為，新的、有益的想法常常是藉由不同數學元件的類比而產生。Fischbein 認為，直觀具有適應性，透過系統的教學能夠影響一個人的直觀能力。所以，教師應鼓勵學生做合理的猜測，並學習接受每個人都有可能猜錯的危險，在課堂中做有系統的討論，讓學生感受相似性，以培養確認同態(Isomorphism)和描述共同結構的能力。透過適當的訓練，可以發展並增加學生預期直觀和解題的能力；另一方面，也必須發展學生直觀且形式地分析與檢查他自己預期的解題能力。

個人認為，直觀的思維與抽象邏輯的思維是不可分離的，教學時應直觀與邏輯並重。在培養邏輯思維能力的同時，也應該注重觀察力、想像力、和直觀能力的培養。為了避免因過度強調形式邏輯的證明而使學生對他們的直觀感覺失去信心，也應發展學生“確信(Conviction)”的感覺(Fischbein, 1987)。讓學生知道，每個人也都具有正確、有用的直觀，可以藉由同化(Assimilating)適當的形式結構來控制自己的直觀。由以上的討論可知，數學直觀是可以透過訓練提升的，但是，必須以紮實的數學知識為基礎。教師應透過大量的例子以及類比，讓學生獲得足夠豐富的經驗，並鼓勵合理的猜想；同時，讓學生批判和檢驗自己的想法，幫助發展學生正確的直觀；以及，經由直觀思維抽象化到邏輯思考的訓練。

## 四、機率與直觀教學

我們對一件事情可能發生的機率，多少都有些自發性的想法，而且，機率概念中也包含著一些直觀反應。Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, 和 Reys(1981)在 NAEP(National Assessment of Educational Progress)的調查中指出，在一些非常基本的情形下，學生看起來似乎對機率有一些直觀認識，這些認識隨著學生的年齡而增長，但是，許多學生不知道如何

數學化地表述自己的直觀感覺。就像十八世紀著名的數學家棣美弗(Abraham De Moivre)曾指出：與機率有關的問題，一般看起來都很簡單，而且運用直觀的判斷力便能解決，但是，要加以證明，就完全是另一回事了 (王業鈞譯，2001)。在機率問題中，由於缺乏具體的運算，直觀的角色比在其他部分的數學學習更重要，然而，機率的直觀思維卻又經常與我們生活經驗中的直觀期望不相符。Borovcnik 和 Bentz(1991)認為，機率的直觀常常與數學的運算相違背，就像在數學上，算出要贏得樂透的機率是那麼的小，但是，在現實生活中，卻每個星期都有人中樂透。Fischbein(1999b)也強調機率思考中直觀的角色，他認為，學生的困難及迷思概念，不只是邏輯的不足，常常是直觀的傾向、直觀的解釋、和模式，與學校給學生的形式知識衝突，這些也是造成機率概念學習困難的原因。因此，Schrag(1983, 引自 Shaughnessy, 1992)建議，在機率統計課中要包括針對現實生活中隨機錯誤的內容，讓學生看到在推理和社會生活中的錯誤，才能幫助他們注意到，在隨機問題中規範思考的重要。

Borovcnik 和 Peard(1996)也認為，機率有直觀思維的方式，但是，其中充滿了迷思概念，所以，直觀思考需要再結構，需藉由數學的洞察使其敏銳。透過機率公理化的結構並不是唯一的教學方式，不同的觀點的理論具有不同的直觀思考，不能完全涵蓋其他的觀點。歷史上許多有名的難題及悖論，就是藉由混合不同觀點理論(古典機率與 Bayesian 的主觀機率)中不同的直觀表徵來呈現的。Barnett(1973)曾試著調和這不同的機率觀點，藉由這兩種機率的數學理論，重新陳述並給予相同的結構，結果機率的數學邏輯結構跟隨著相同的關係，但是，概念的意義仍然是不同的。Shaughnessy(1992)強調機率教學的重點是，將一些觀點模式化，在不同情形下所應用的機率模型，應該由學生要解決的任務與該任務的類型而確定。某些實驗可能以均勻機率空間(古典機率)加以模式化，而某些可能用經驗機率的觀點較佳，在某些問題上經驗機率(Experimental Probability)和古典機率理論有相當圓滿的一致性(例如投骰子) 。有些時

候，經驗機率亦能解決主觀機率和古典機率的衝突。因此，學生在學習以上的多種模式機率時，必須考慮學習時機的適切性。

Shaughnessy(1992)由一些研究發現，當要求人們去估計事物的可能性、預測結果、或在不確定條件下做判斷時，會產生不同的反應。而由學生顯現出不同類型的推理表現，可推測其為不同層次的概念理解，有的對隨機事件缺乏理解；有的能接受隨機事件的各種數學表述，並能夠做比較和對照。人們的隨機概念一部分是憑他們自己的經驗(原始直觀)產生，同時也受到教學(二階直觀)的影響，這是隨機概念發展的一個重要特徵，抓住這個特徵或能有助於規劃教學活動。他更進一步將機率概念分為四種形式：

1.非統計的(Non- statistical)：這個階段學生的機率概念特徵是，根據信念、確定的模型、因果關係或單一結果作回答，不注意也不知道隨機事件和機會。

2.天真統計的(Naive-statistical)：這個階段學生的機率概念特徵是，運用捷思判斷，如典型性和可利用性。大部分是利用基本經驗和非正規的反應回答，以及能開始了解某些隨機事件和機會。

3.自然統計的( Emergent-statistical)：這個階段學生的機率概念特徵是，能用正規模式回答簡單的問題，能分辨直觀信念和和數學化模式的不同，經過某些機率統計的訓練，開始理解多種機率的數學表徵，如古典機率和頻率機率。

4.實用統計的(Pragmatic-statistical)：這個階段學生的機率概念特徵是，能對不同的機率模型作對照和比較。在需要時，有選擇和應用某個機率模型的能力；注重機率概念中的各種訓練，能認知各種不同機率模型的假設和限制。

這些概念類型之間不一定是線性的，也不是互不相容的。一個人可

能在不同的情境下，有不同類型的隨機概念表現。Shaughnessy(1992)認為，機率統計的初始課程是從非統計或天真統計開始的，教學的核心發生在實用統計範圍，因此，我們要面對學生頑固的確定論的思考方法，又要面對他們已有的天真統計直覺。我們要尋求機會，讓學生覺得他們已有的概念存在著某種不協調，以便創造機會用數學模型去取代原有的概念，在這方面教師應扮演更積極的角色。

Fischbein 等人(1971, 1984, 1985, 1991, 1997)寫了大量關於兒童機率直觀和組合概念的報告，以及在機率直觀的情況下對教學的影響。他們的研究顯示，在機率課程的作用下，學生的機率直觀和機率概念均有顯著的變化，甚至是學齡前的兒童在接受 Piaget 的機率比率教學時，也提高了預測結果的能力，但是，這結果與 Piaget 的階段理論是矛盾的(Shaughnessy，1992)。Fischbein 認為，教學能促進機率思考的發展，而直觀、邏輯思考、教學的交互作用是機率思考發展的中心，從他的研究和分析中，可得到一些有關設計有效機率教學應注意的事項(Greer, 2001)：

1.在原始直觀的基礎上建立二階直觀，具有機率現象的活動經驗是必須的，學生需要延長活動並對其反思。這說明了學生需要大量證實動態隨機現象的具體經驗，和提供一種使孩子熟悉科學基本概念的理想模式，例如，預測、實驗和證實(Fischbein, 1971)。

**2.**結構預示(Prefiguration of Structures)的必要，利用一些表徵當媒介，來獲得抽象的結構。特別是“生成模式(Generative model)”的概念，它能代表整個有關的情境，並且有助於適應新的情境，其中，最精華的例子是樹狀圖，它能加速學生認識組合的概念和運算，此模型是轉換抽象關係到直觀的表徵(Fischbein, 1975)。

3.注意決定論的思考(Deterministic of Thinking)、因果關係的解釋，造成學生機率思考的偏誤，這不利於操作基模的發展，若沒有適當的調整，

會影響其概念的同化(Fischbein, 1975)。

4.原始直觀不可能消失，即使經相當形式的教學後，它們已經被覆蓋，但是，它們仍會潛在地影響學生的判斷。學生必須學著與直觀的概念共存，學著分析和形式化自己的原始直觀(Fischbein, 1987)。

另外，發展"非直觀(Non-intuitive)"的直觀也很重要，這在機率統計中是特別重要的，因為，機率統計中的許多現象與我們的初始認知和信念相牴觸(Fischbein, 1987)。Borovcnik 和 Peard(1996)也認為，機率教學必須克服不適當的直觀概念，連結初階直觀與數學模式，不斷地修正直觀與數學間的交互作用，幫助學生了解抽象的數學理論。因為，機率問題必須用理論模型處理，若沒有介紹機率模型的理論概念，便無法得到一致的答案。而所有不同意見的觀點、詮釋都可能被認為一樣的好。由於，機率理論的句法，演繹出直觀意義的理解，所以，教學又必須建立成熟穩固的直觀洞察，不能只依賴數學的訓練。Greer (2001) 認為，經由機率結構來描述物理和社會現象，是一數學模型的好例子；而經由直觀應用來教數學，結果是對數學模型化的本質和過程有更多的關注，機率模型的介紹，對學習課程的增進是非常重要的。Shaughnessy(1992)認為，教師的任務是，使學生能在一種數學化的機率模型下工作，需要提出機率的另一些解釋，來代替學生已有的主觀解釋。他不相信，存在一種完全正確教隨機的方法等待我們去發現，如果，我們對機率統計採用多種模型教學，那麼古典的等機率、相對頻率、和相對比例的觀點之間的衝突，就不會成為教師和學生間的障礙，反而能讓教師和學生接受多種機率解釋，去研究 Stenbring(1991)的富有意義的情境。

由以上討論可知，機率的學習與直觀有密切的關係，機率的直觀思維需藉由數學的洞察使其更為敏銳，而機率理論的教學又不能只依賴數學訓練，必須建立直觀的洞察。因此，要如何為學生建立正確的機率直觀，修正她們的原始直觀成為二階直觀，是個人必須努力的方向。

## 第六節 試探性的研究架構：以機率概念的直觀教學為例

認知心理學家認為，學習者應扮演主動學習的角色，學習是本身既有的知識結構與生活經驗相互平衡的過程(Driver, 1989)。建構論的學習觀點傳承認知心理學家的想法，認為學生透過舊的經驗連結新的訊息，建構對自己有意義的概念(Garnett, Garnett, & Hackling, 1995)。知識不僅是由教師透過教學傳授給學生，學生更是主動的學習者，會依據自己的想法，透過經驗與周遭環境的交互作用，以建構本身對世界的認識及解釋。學生在學習前並非是空白的，而是充滿了許多的「先前知識(Prior knowledge)」或「自發性概念(Spontaneous Concepts, Vygotsky, 1934, 李維譯，2000)」，然而，礙於本身有限的經驗和局部的推論，經常與科學家們所認同的「科學性概念(Scientific Concepts, Vygotsky, 1934, 李維譯，2000)」有所出入，而且，很難藉由教學的過程加以改變，因此，往往造成學習上的困擾，阻礙學習的進行(Hashweh, 1986)。

在 Gilbert, Osborne, 和 Fensham(1982)的研究中發現，學生在教學之後，會有五種不同學習的效果：學生原有的想法不受教學影響，老師教授的知識與學生原有的想法相隔離，學生因學習而增強先前知識，學生所學與原先的想法混合而出現衝突，以及學生獲得科學性概念。由於，學生的先前知識往往會和教師教授的知識互動，因此，在教室中的實際教學，並不能完全如教師的預期的帶來學習成效。所以，大多數的傳統教學似乎都難以改變學生的既有概念；或是在改變的一段時間之後，學生又回復原有的想法。因此，如果要使學生獲得科學性概念，就必須先瞭解學生這些既有的想法或概念；否則，教學只能提供單純的知識，而學習只是灌輸知識的過程，而無法讓學生進行真正有意義的學習。所以，瞭解學生既有的知識與經驗，是數學教學過程中重要的先備條件。

Driver(1989)認為，過去的課程並未考慮學生的先前知識，因此無法

促進概念學習，所以，建議在課程規劃上不僅應考慮學科的架構，也應將學生的既有想法一併列入考量。他們建議教學應：提供學生思考與反思的機會；利用差異性事件(Discrepant Event)，使學生不滿意自己對現象的理解與解釋，進而改變其概念；運用蘇格拉底式的發問，協助學生發現自己思考上不一致之處；鼓勵學生進行有意義的建構，主動形成概念基模；以及提供適當的學習情境，讓學生了解知識的範疇與限制。Vosniadou(1994)也認為，教師的教學設計應考慮孩童先前的假設與信念，如此才能真正轉換其迷思概念而改變其既有的想法；教師應培養學生後設認知的察覺(Awareness)。

Flavell(1976)認為，後設認知是個人對自己的認知歷程、結果或任何有關事項的知識，而且是學習者對於本身認知歷程的主動監控(Active Monitoring)、結果的調整(Consequent Regulation)、以及各歷程的協調。A.L.Brown(1987)認為，後設認知是指，個人具有關於自己思考和學習活動的知識，並且知道如何去控制它，其包含著兩大要素，即「關於認知的知識 (Knowledge about Cognition)」和「認知的調節 (Self-regulation of Cognition)」。認知的知識是指，個體對本身認知歷程的知識，能察覺到自己的優缺點和學習情境的要求；認知的調整是指由用來調整和監督學習活動所組成的，包括計畫活動、學習中的監控活動，以及查核結果。這兩個部份是互為相關的，例如，對於認知的知識愈豐富的個體，愈有能力進行認知調整的工作；相對地，越懂得對認知歷程進行認知調整的個體，越能擴展其認知的知識。大部分研究學者所提的後設認知之內涵，均提及學習者對思考歷程的察覺、監控、評鑑(Evaluation)和調節(Regulation)這些歷程的能力(Wilson & Clarke, 2004)。後設認知使學習者瞭解本身的認知狀況，明瞭自己的能力與限制，進而知道如何運用策略來對認知歷程作自我調適。在從事認知活動時，即能隨時自我監控、自我評鑑、自我調整，以達成最有效的學習。因此，若缺少後設認知的察覺，孩童將無法有意識地察覺到他們的既有想法與信念是不合適的。所

以，數學教學的策略似應強調學生的先前知識與後設認知，在概念改變的教學過程中也應重視這些能力的培養。

想要透過教學減少直觀法則的作用，有兩種教學取向是有部分成效的，亦即，類比的教學和衝突介入的教學(Tirosh ＆ Stavy, 1999）。Fischbein 和 Grossman(1997)也認為，透過學生個人的猜測並造成與科學性概念間的衝突，可幫助學生克服直觀上的障礙。從概念改變的觀點來看，當學生遭遇到新的概念時，會對其原有概念發生影響，皮亞傑(1964，引自劉俊庚，2002)認為，當學生在基模修正的過程中，會發生同化(Assimilation)與調適(Accommodation)。同化是重新認知的過程(Recognition)，將新概念納入原有概念架構中；調適則是，重新建構原有的概念架構，即概念的改變。Roth(1991，引自邱美虹，2000)認為，學生必須明瞭他們個人的想法是不適當的(Inadequate)、是不完整的(Incomplete)、或不一致的(Inconsistent)，而科學性的解釋可作為一個更具說服力且更合理的取代物，那麼概念改變才有可能發生。許多概念改變的理論模式(例如，Posner, Strike, Hewson, 和 Gertzog(1982)的概念改變理論、Chi(1992)的本體論類別轉換、Vosniadou(1994)的認知架構理論和心智模式、Thagard(1992)的科學革命個案研究)有部分地方非常相似，它們都要求學生去瞭解他們原有概念的不合適，而要求學生能夠放棄已有的概念，接受新的概念(劉俊庚，2002)。因此，對於概念改變的教學，各方學者有不同的看法與作法，但是，基本上，都包含了三個階段，察覺階段、失衡(Disequilibrium)階段以及更新(Reformation)階段(魏金財，1992)。而被認為是比較有效教學策略包含了：類比(Analogy)(Clement,1993)、質問與討論(Questioning-discussion)、概念衝突(Van Driel, De Vos, Verloop, & Dekkers, 1998)和合作學習(Driver & Oldham, 1986)。

學生的概念迷思，對教師而言是一項診斷的工具，讓教師瞭解學生

心裡所想，進而對於教材的呈現及安排，做出最佳的修正；對學習者而言則是學習的重要資源，錯誤幫助他們去思考數學的來龍去脈，審視自己學習上的謬誤。有許多研究就是透過引起學生先前知識(或概念)，製造概念衝突的情境，讓學生知道自己的迷思概念，而真正瞭解迷思之所在，而非因為「老師說」，以達概念改變的目的。例如，預測— 觀察— 解釋(Prediction-Observation-Explanation, POE, White & Gunstone, 1992，引自邱美虹，2000)的活動，它要求受試者根據自己原有的科學知識對一科學現象進行預測，然後觀察實驗之進行，再對所觀察的實驗結果提出適當的解釋。這個活動主要是在，激發受試者面對個人既有的知識架構與科學活動的結果不一致時，能重新調適與組織，以形成新的知識體系達成概念改變的目的。

又如 A.Bell(1993)所提的診斷教學，也是先呈現涵蓋主要學習概念和概念迷思的問題，而這個問題要和學生以前的經驗相連結；再透過迷思問題和適當的策略，製造認知衝突的情境，使學生對原先的迷思想法產生懷疑；接著，經由深入的討論，澄清與解決問題，形成新的整合性知識。其他還有 Liem(1987)的差異性事件和 Chinn 和 Brewer (1993)的異例(Anomaly)方式，皆是先在引起學生的先前知識，再以衝突來改變其認知結構或心智模式(邱美虹，2000)。在使用這些策略時，教師必須對概念的本質以及學生教學前所持有的先前概念有所了解，才得據以設計適切的教學活動與內容，以促進有意義的學習。林福來(1991)曾提到，經歷認知衝突後的學習較有效且較為穩固。Hewson 和 Thorley(1989)的研究中，運用概念衝突於學生的概念改變，結果發現概念衝突的策略在改變學生既有概念上是相當有效的。然而，也有些研究者對此策略持比較保留的態度。舉例來說，Dreyfus, Jungwirth, 和 Eliovitch(1990)發現，成功改變的學生對於概念衝突是持正面的態度，而未能改變的學生則嘗試著去忽略或避免面對它。他們認為，有意義的衝突並不能保證可以建構教師所預想的概念。

由此可知，教師使用概念衝突的教學策略不一定能使學生產生概念的改變，因為，學生可能會用忽略來保有其原有的迷思概念。想使用衝突策略來引導學生的概念改變，應著重的是，讓學生自己去做更深層的反思，使他們產生後設認知的察覺，藉此，以既有的概念出發重新建構新的概念，如此，才有可能發生真正的概念改變。

類比教學是讓學生透過聯想，把抽象的、未知的事物(研究對象)對比具體的、熟悉的事物(類比對象)，依據兩個對象之間存在某種類似或相似的關係，從已知對象具有的某種性質，去推論未知對象應具有相應的性質(Gentner, 1983)。Duit (1991)認為類比是一種介於兩個領域間架構成份的關係，也可以視為是介於兩個領域間基本相似性比較的陳述，它在概念改變上是重要的軸心，因為，它可以同時再建構新、舊兩種資訊。人類具有一種特殊驚人的能力，就是可以藉由領悟一個比喻(Metaphors)、或是過去曾經解過的相似問題，來了解一個新的未知領域，如此的能力稱之為類比推理(Analogical Reasoning)能力(徐雍智、蔡今中、和陳明璋，2002)。類比是學習與發現中一種重要的過程，Duit(1991)指出，介於已知知識與欲獲得的知識間的相似性(或相關性)是非常重要的，類比的使用有助於分析新舊知識兩者的異同，歸納出新授內容的有關知識，幫助學習者架起新舊知識的橋樑，促進知識遷移。藉由真實世界相似的實例，可以幫助學生了解抽像的概念，具體化抽像的概念，因而是非常有用的教學工具。

Venville 和 Treagust(1997)在討論類比教學的優缺點時指出，類比教學能協助學生從連繫已有的知識層面來建構新的知識，能協助學生把抽象或不易看見的現象具體化，如果，教師所採用的比喻能對應學生的實際經驗，學生便可以產生一種自發性的學習興趣；但是，學生有可能會過度地將類比學習等同於科學性概念的學習。English 和 Halford(1995)也認為，具體的類比可能使學生過度簡單化抽象概念的意義，不合適或

不完整的對應也會使學生產生迷思概念。Sfard(2002)認為，好的比喻可以增加理解與記憶，可使我們在思考過程中有更多的幫助，勝過缺乏想像力的詳述；但是，學生會注意到他們感到新奇的部分，那可能不是本來要傳達的訊息，而是學生依他自己的意思解讀。所以，教師必須讓學生瞭解類比的侷限性，看到類比與現象或過程之間的關係，因此，教師需要使用更多的教學時間在解釋類比的意義與功能，否則，類比教學的成效會相當有限，甚至可能造成學生對概念產生不正確的想法或更多的學習困擾(邱美虹，2000)。Mason(1994)認為，沒有一個類比是完美的，它們在某些關鍵點是有缺陷的，在教學上需注意的是，類比的使用是個人性、建構性，而有效的設計需要注意其限制；對於知識的重新建構，有效的使用類比策略與學生的後設認知是息息相關的，老師應該鼓勵學生自我調整學習的過程。

Vygotsky(李維譯，2000)認為，高層次的心智功能起源於個體彼此之間或群體內的互動，藉著活力的社會互動使個人的心智逐漸內化。他提倡，如果有能力較高的同儕幫忙，可以啟發孩子學習的潛能，因為，同儕可能很成功的幫助一位困惑的同伴重述老師的解釋。而小組合作學習的同儕討論，便能夠提供學生知識的群體建構歷程，讓學生先前不明確的想法能夠更為明確，在與其他人討論的過程中，再次澄清自己的既有觀念，並且，它也提供學生反思與檢驗的機會。Posner et al.(1982)認為，同儕的互動在概念改變歷程中是有價值的，可以協助學習者經驗到不滿意自己既存的概念，以發展出具有相當說服力的新觀念，並且，看到在不同情境脈絡下新知識的適切性。雖然，小組討論的效益似乎是相當清楚的，然而 Hynd, McWhorter, Phares, 和 Suttles(1994)卻認為，當學生已有部分的迷思概念時，未必有如此大的效益，因為，迷思概念會使學生間的討論導致舊有概念的固化(Solidification)，或是學習到新的非科學概念。

由上述的文獻探討中可知，教師使用概念改變的相關教學策略並不必然能改變學生的概念，有時教學成效甚至相當有限(Berg & Brouwer, 1991)，而學生依然保有他們原先的既有概念。因此，許多研究者轉向培養學生後設認知的能力(例如 White & Gunston, 1989)，注重反思的察覺(例如 Driver, 1989)，培養學生批判性的思考。因此，老師應該鼓勵學生，忽略問題的外在特徵，採用批判性的眼光去檢驗他們自己的回答；引導學生在理解的過程中，嘗試隨時自我監控。所以，學生的後設認知能力應該是影響概念改變的重要因素(Vosniadou, 1994)。

Vygotsky 認為，概念包括科學性與自發性的概念，科學性的概念有明確的定義，可藉由一套技術性的教育方式來教導學生學習；自發的概念是不經由特定的教育就能自然獲得的概念。在 Vygotsky 看來，科學概念和自發概念是循著相反方向行進的，自發概念是從概念的低級屬性向高級屬性「自下而上」地發展；科學概念則是從概念的高級屬性向低級屬性「自上而下」地發展；但是，相反的發展途徑並不會消除兩種概念形式的相互聯繫和相互作用。Vygotsky 把發展與教學的相互關係，視為科學概念與自發概念間的密切聯繫。透過自發概念與科學概念的充分互動，會慢慢地發展而產生真正的科學概念。當兒童發展到科學概念階段時，就能真正理解和內化符號、字義以及心理工具，並自主的運用心理工具來協助思考，不會一味地以自發的概念來思考。

一般學習理論均強調，成熟是學習的必要條件，而 Vygotsky 卻主張，學習可促動發展的歷程，這就是他著名的「近側發展區(Zone of Proximal Development，以下簡稱 ZPD）」的觀點。Vygotsky 認為，兒童心智發展可分為二個層次，即實際發展層次(Real Level of Development)及潛在發展層次(Potential Level Development)。所謂實際發展層次是指，兒童能夠獨立解決問題的能力；而潛在發展層次則是指，兒童在成人(例如教師)的引導下，或與能力較佳的同儕合作，解決問題的能力。ZPD 即

為個體實際發展與潛在發展之間的差距。「鷹架(Scaffolding)」概念源自於 ZPD 的精神，在學習者的 ZPD 中，教師根據學習者原有之背景知識所安排的暫時性學習架構，以協助學生能力的發展，由實際的發展層次，進入潛在發展的層次，此種導引就是一種鷹架。Greenfield(1984，引自陳祐凱，2001)的鷹架理論教學原則強調，在實際教學活動中，教師必須以學習者原有的先備知識為基礎，依據教材內容以及學習者特性，提供學習者在學習過程中所需的鷹架，並且該鷹架的支持程度, 會隨著學習者在實際學習的情況不斷地調整與修正。此鷹架所提供的支持主要是以, 導向學習者內化為目標，使學習者能藉以培養自身獨立自主學習的能力。同時，在教學的活動設計上，應該提供適當的學習情境，讓處於近側發展區的學習者能主動積極地學習。再透過學習社群間的互動，進行對話、溝通與協商，再由自我的反思過程，進而對學習過程及內容產生認同和意義。因此，教師若能適當運用鷹架理論，了解學生的 ZPD 而設計教學活動，應有助於學生的概念改變，促進學生的自我反思。

本研究的主要目標在重構高三學生的機率概念，而機率問題中因缺乏具體的運算，直觀的角色比在其他部分的數學學習更為重要。又由以上的討論得知「後設認知」是概念改變過程中一個重要的因素，因此，個人認為，學生重新學習機率相關概念的核心要素是「直觀」與「反思(或省思)」。所以，本試驗性機率概念教學的核心構念為利用 Vygotsky 的 ZPD 理論，為學生搭設適當的鷹架：瞭解和掌握學生的自發性概念(先前知識或概念)和 ZPD，用於教學準備；運用類比、認知衝突、和小組合作學習等策略，於課堂教學活動；以及，主動引入數學直觀法則，引動學生的後設認知和反省性思考。以下說明這些教學構念詳細的實施內涵。

### 1. 引出學生機率概念的既有想法，面對學生的原生數學直觀

Hashweh(1986)的研究指出，學生的大部份先前概念是與經驗世界互

動的結果。由於，之前一連串重覆地有效使用，這些先前概念便很快地被用來詮釋現象、形成解釋，致使這些先前知識，如直觀信念般不證自明，固執而難以改變。而機率概念與日常生活息息相關，學生的表現更是如此。依據認知心理學或建構主義的學習觀點，若要使學生確實獲得科學性知識，無論使用那些策略，教師都必須了解概念的本質以及學生教學前所持有的先前概念，才能設計適切的教學活動與內容，以促進有意義的學習。所以，個人在教學之前實施前測，一方面是想，了解和掌握學生的起點知識和原生直觀；另一方面也想，讓學生預先察覺自己的問題，如此，學生才會有更強的動機去改變已習得的數學概念，而願意接受新的科學性概念。

### 2. 運用類比、認知衝突、和小組合作學習策略，澄清學生的機率科學概念

類比、認知衝突、和小組合作學習這些概念改變的教學策略，皆是為達到概念改變的條件所發展出來的策略。運用認知衝突，讓學生瞭解其先前概念的侷限，而對本身概念感到不滿足，以促使概念改變；藉由類比的方式，可以幫助學生更易理解概念的內容；透過合作學習協助個別概念的改變，透過和他人互動的過程，對自己的經驗感到不滿意，以發展出較具說服力的新概念，並看到新知識在不同情境下的有效性(Chinn & Brewer, 1998；Posner et al. 1982)。個人在試驗教學中，利用前測問卷來開展教學的內容，配合這些概念改變教學策略的運用，為學生搭設學習的鷹架，以期能幫助學生再次澄清自己的機率概念。

### 3. 引入數學直觀法則，培養學生的批判性思考習慣

Stavy 和 Tirosh(2000)曾提到，數學及科學教育的目標之一，就是提昇學生批判性的思考。依據直觀法則的理論，學生的回答通常是根據題目外部不相干的特徵，這更顯示出，激發學生批判性思考的重要性。教

學者應該提醒學生，在解題時除了注意到題目的外在特徵之外，更應批判性地檢驗自己的答案；而在激發學生以批判的角度去檢驗自己的答案時，需要小心地避免，因而阻礙了他們基本思考的機制，如普遍化、外推(張世昌，民 91)。個人認為，在教學之中主動地引入直觀法則，由經驗直觀法則產生錯誤的例子，讓學生觀察這些數學直觀迷思的共同結構，應該會有助於重新建立學生「直觀看似正確，但仍須檢驗」的直觀信念，鼓勵學生由多種觀點來解決問題。

**4. 引動後設認知和反省性思考，培養學生自我覺知和自我監控的能力**

後設認知可監控、調節及指揮學習者本身所具有的知識或認知策略，以應付某種特定的認知活動。後設認知是，學習者對認知過程進行反省性思考之心智活動，根據學習的結果，重新調整和安排有關的學習活動。例如，在心中保持目標、找出錯誤與障礙、知道如何改正錯誤與克服障礙(Beyer, 1987)，或在學習過程中監控和更改方向以達成目標(Paris & Lindauer, 1982)。所以，後設認知對學習者的學習與認知發展都扮演著非常重要的角色。

因為，直觀的立即性及強制性，容易讓人只看到問題的某一部分，而忽略了某些資訊而做出錯誤的判斷。所以，個人希望學生在回答問題之前能多停下來想一想(反思)，能重新檢視自己的解題歷程(監控、評鑑、調節)，能察覺到自己解題上可能出現的疏漏或不合理之處，進而採取修正的措施(後設認知的察覺)。學生對於自己的認知與學習歷程，若無反思、自我管理、與自我調節之能力，則其學習效果必定大打折扣。反省性思考及有意識的後設認知，能使學生更深刻地體會到自己的學習歷程與思考方式，並讓學生逐漸地為自己的學習負責任。

綜上所述，個人由學生在前測中的表現，了解學生的 ZPD；再運用

一些教學策略，為學生搭設適當的鷹架，協助學生將自發性的概念(原生直觀)發展成為科學性的概念(二階直觀)。另外，也借用 Skemp 理論中的學習指導系統(Delta1 是直接的、Delta2 是反思的思考)，用於個人的試驗性教學構思，因此，為學生所搭設的教學鷹架也包含直接與反思兩個部份。其中，類比、認知衝突、小組合作等策略，對學生的影響是直接的，這是教學的 Delta1；引用直觀法則、引動後設認知培養學生反省性思考，對學生的影響是反思的，這是教學的 Delta2。這樣的機率直觀教學構思，如圖 2-3 所示：

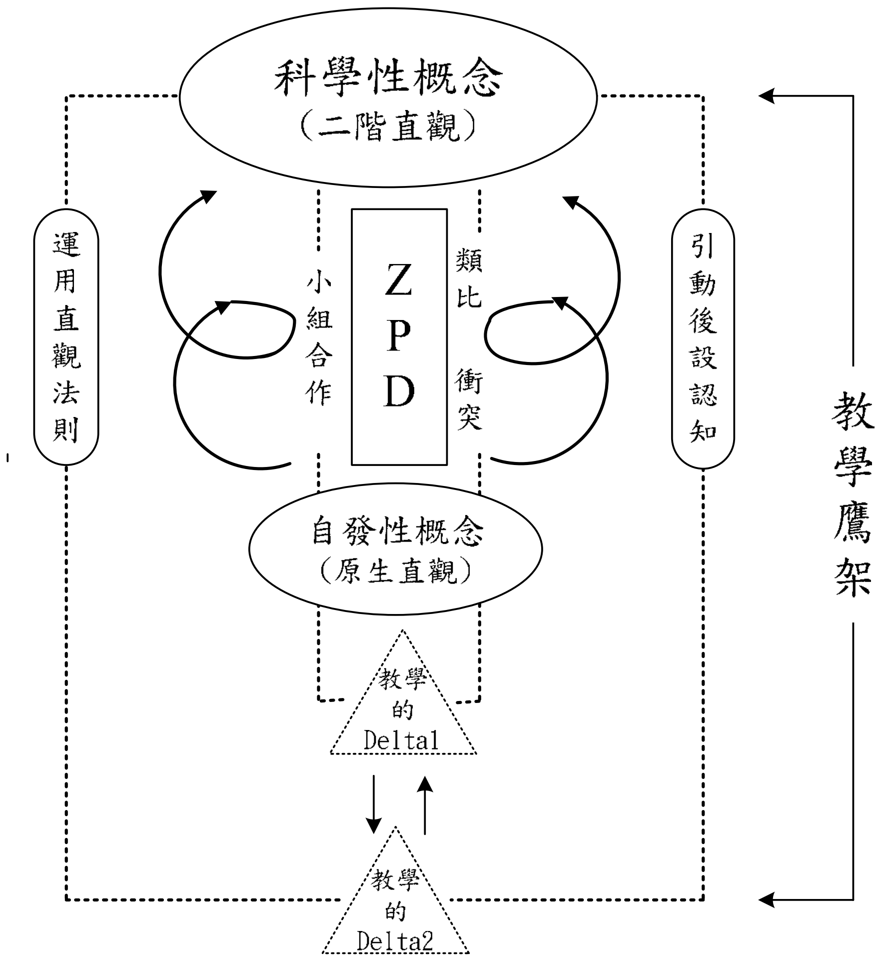



圖 2-3：試驗性機率直觀教學構思示意圖