中學生通訊解題第十二期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
901201

(1)有一個 3×3 的正方形，裡面有 9 個單位方格。若在這 9 個單位方格中填入正整數 1~9 (數字可重複)，使得相鄰兩數(只有頂點相交的兩個方格不算相鄰)之差不大於 2，請問最多可填入多少個不同的數？

(2)若將(1)的問題改為在 $n\times n$ 的正方形所形成的 n^2 個單位方格中，填入正整數 $1\sim n^2$(數字可重複)，使得相鄰兩數(只有頂點相交的兩個方格不算相鄰)之差不大於 2，請問最多可填入多少個不同的數？

參考解答：

設 $A(m,n)$代表第 m 列，第 n 行的單位方格中所填入的數字。

如圖

A(1,1)	A(1,2)	A(1,3)	⋯
A(2,1)	A(2,2)	A(2,3)	⋯
A(3,1)	A(3,2)	A(3,3)	⋯
⋮	⋮	⋮	⋱

原則：

1.為了可以填入最多不同的數字，可以從 A(1,1)開始填，愈往右填，愈往下填，數字要愈大。故最右邊最下面一格數字最大

2.不失一般性，可設 A(1,1)＝1

3.$f(n)\le 4n-3$

A(1,1)	A(1,2)
A(2,1)	A(2,2)

1	3
2	4

(1)

考慮圖（1）那樣的 2×2 方形。很明顯，A(1,1)和 A(2,2)相差最多是 4。如果相差 4，A(2,1)，A(2,2)兩數與 A，與 B 都相差 2。故 A(2,1)＝A(1,2)。只有相差 3，這四個數才能都不相同。

1	3	5
2	4	6
4	6	8

2-1

1	3	5
2	4	6
3	5	7

2-2

1	3	5
3	5	7
4	6	8

2-3

1	3	5
3	5	7
5	7	9

2-4

(2)

對圖（2）的 3×3 方形因為 A(1,1)＝1，故 A(3,3)最多可填 9，如圖 2-4。若如此，則此 3×3 的方形最多只能填 1,3,5,7,9 五個不同的數，而且方形若擴大下去，2跟4這兩個數也補不回來（往右，往下，數字得愈來愈大）。所以雖然 A(3,3)=9，它的效力最多等同 7。

圖 2-1，圖 2-2，圖 2-3 都填入了 7 個不同的數字，這是 3×3 方形中最多可填入的不同數字數，故 f(3)=7。

但圖 2-3 的填法，2 永遠補不回來。A(3,3)=8 的效力最多等同 7，故也不採納。

1	3	5	7
2	4	6	8
4	6	8	10
5	7	9	11

4-1

1	3	5	7
2	4	6	8
3	5	7	9
5	7	9	11

4-2

而圖2-1與圖2-2雖都填入7個不同數字，我們選擇圖2-1，因為A(3,3)愈大，愈可能填入更多不同的數，且該3×3方形中所缺的7，稍後可以補回來。請看圖4-1，圖4-2，當方形擴大至4×4時，二圖的A(4,4)皆為11，但圖4-1有11個不同的數，而圖4-2只有10個，故f(4)=11。

1	3	5	7	9
2	4	6	8	10
4	6	8	10	12
6	8	10	12	14
7	9	11	13	15

(5)

若要填 5×5 方形，先將 4×4 方形中之A(4,4)盡量填到最大（為12），然後將A(5,5)填 15，則 1-15 這十五個數全部都可以填進去。（見圖（5））故 f(5)＝15。

1	3
2	4

1	3	5		$2n-3$	$2n-1$
2	4	6		$2n-2$	$2n$
4	6	8		$2n$	$2n+2$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
$2n-4$	$2n-2$	$2n$		$4n-8$	$4n-6$
$2n-3$	$2n-1$	$2n+1$		$4n-7$	$4n-5$

(6)

同理若要填 $n\times n$ 方形，先將$(n-1)\times(n-1)$方中之 $A(n-1,n-1)$填到最大 $4(n-2)$，然後將$A(n,n)$填$(4n-5)$，則 $1-(4n-5)$這$(4n-5)$個數全部都可以填進去(見圖(6))。即當$n\geq 3$時，$f(n)=4n-5$。

$f(1)=1$

$f(2)=4$

$f(n)=4n-5$，當 $n\geq 3$ 時。

至於 $f(n)$有可能等於 $4n-4$ 嗎？因為左上的 2×2 方形已是最佳狀況（若 A(2,2)=5，則A(2,1)=A(2,2)永遠補不回 2）

若要使 A（n,n）$=4n-4$,A(k,k)與 A(k+1, k+1)，當 $k\geq 2$ 時，必定要差 4，若然，則$(4n-3)$這個奇數補不進來。

$f(n)$ $4n-4-1=4n-5$

$f(n)$有可能等於$4n-3$嗎？若然，則 A(k,k)與 A(k+1,k+1)都差 4($\forall k\in N$),A(I,j)則全是奇數，全部的偶數皆補不進來即$f(n)4n-3-2=4n-5$ 當 $n\geq 3$ 時

故 $f(n)=4n-5(n\geq 3)$為最大值。

解題重點：

1.多試幾個例子，猜測其一般式。

2.給自己的猜測一個實際的填法。

3.證明不可能有更佳的答案。

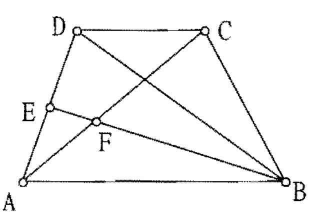
評析：

(1)本題參答人數共有 12 位，平均的分數為 3.08，得分率 44.05％。

寫出正確答案的有：北縣秀峰高中國中部張家維，東湖國中賴昱臣，板橋海山國中張源平，福和國中楊智寶。

問題編號
901202

如圖，梯形ABCD中，△ABD與△ACD的面積比為4：1，$\overline{BE}$為△ABD的中線，試求△AEF與梯形ABCD的面積比。



參考解答：

解法一：

此解法由明德國中王琨傑同學提供

∵ ABCD 是梯形∴ $\triangle ABD = \triangle ABC$，

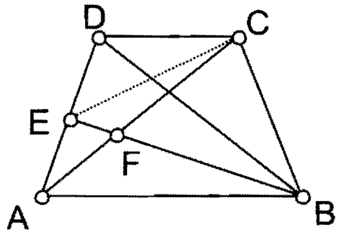
$\triangle ACD = \triangle BCD$

設 $\triangle ACD = \triangle BCD = x$，$\triangle ABD = \triangle ABC$

$= 4x \Rightarrow$ 梯形 ABCD $= 5x$

連 $\overline{CE}$，∵ $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EA}} = 1 \Rightarrow \triangle CDE = \triangle AEC = \dfrac{x}{2}$

而 $= \dfrac{\triangle AEF}{\triangle EFC} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{CF}} = \dfrac{\triangle ABE}{\triangle BCE}$



$$= \frac{\frac{1}{2}\Delta ABD}{\Delta BDE+\Delta BCD-\Delta CDE} = \frac{2x}{2x + x - \frac{1}{2}x} = \frac{4}{5}$$

$\therefore \triangle AEF = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{4}{5+4} = \dfrac{2x}{9}$

$\triangle AEF$：梯形 ABCD $= \dfrac{2x}{9} : 5x = \dfrac{2}{9} : 5$

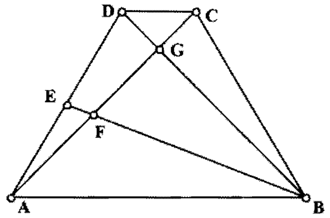
$= 2 : 45$。

解法二：

此解法由台南建興國中黃信溢同學提供

∵ $\overline{CD}//\overline{AB}$ ∴ $\overline{CD} : \overline{AB} = S_{\triangle ACD} : S_{\triangle ABD} = 1 : 4$

($S_{\triangle ACD}$、$S_{\triangle ABD}$分別代表 $\triangle ACD$、$\triangle ABD$ 的面積)



又因為 $\triangle CGD \sim \triangle ABG$

所以 $\overline{CD} : \overline{AB} = \overline{DG} : \overline{GB} = \overline{CG} : \overline{AG} = 1 : 4$

在 $\triangle DBE$ 中，利用孟氏定理得

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \times \dfrac{\overline{EF}}{\overline{BF}} \times \dfrac{\overline{BG}}{\overline{DG}} = 1$，即 $\dfrac{2}{1} \times \dfrac{\overline{EF}}{\overline{BF}} \times \dfrac{4}{1} = 1$

$\Rightarrow \overline{EF} : \overline{BF} = 1:8$

故 $S_{\triangle AEF} : S_{梯形 ABCD} = S_{\triangle ABE} \times \dfrac{1}{9} : S_{梯形 ABCD}$

$= S_{\triangle ABD} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{9} : S_{梯形 ABCD}$

$= S_{梯形 ABCD} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{9} : S_{梯形 ABCD} = 2 : 45$

解法三：

延長 $\overline{CD}$，$\overline{BE}$ 相交於 G 點如圖（一）

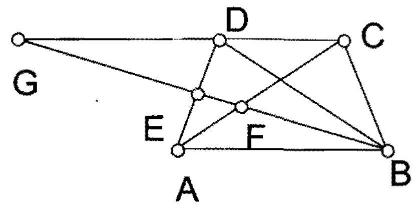
∵ $\overline{CD}//\overline{AB}$，$\overline{AE}=\overline{DE}$ ∴ $\triangle DEG \cong \triangle ABE$

故 $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle ABD} = \overline{CD} : \overline{AB} = \overline{CD} : \overline{DG} = 1 : 4$，

又因為 $\triangle GFC \sim \triangle BFA$，

所以 $\overline{CG} : \overline{AB} = (1+4) : 4 = 5 : 4 = \overline{GF} : \overline{BF}$

$\therefore \overline{BF} : \overline{EF} = \dfrac{4}{9} : \left(\dfrac{9}{9} \times \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{9}\right) = 8:1$，如同解法二 $S_{\triangle AEF} : S_{梯形 ABCD} = 2 : 45$



解題重點：

1.三角形面積比的基本性質。

2.相似三角形的性質。

評析：

1.本題參答人數計有弘道國中賴楷文，海山國中張源平 21 位，平均得分為 6.86 分，平均得分率 98％。

2.本題參與者幾乎都能完整解題，有些簡潔易懂，有些轉換較繁瑣，但各有不同，都是有思考、有創意之作。

3.本題參與徵答者完全以面積比例作答者計有明德國中王琨傑，大直國中陳俊暐等 5 人，做平行線當輔助線作答者計有福和國

中吳霽庭，介壽國中蔡佳珍等 14 人，能知引用孟氏定理作答者計有建興國中黃信溢，南門國中李舒平等 2 人。

問題編號 901203

(1)如圖一，有 4 個銅板，正反面交錯，一個接著一個排成一直線。每次移動時，把相鄰的兩個銅板交換，使得這 4 個銅板最後變成圖二的情形，請問最少要移動多少次？

(2)請推廣這個問題到 n 個銅板的情形，並說明最少要移動多少次？

正 反 正 反

圖一

反 反 正 正

圖二

參考解答：

解法一：

設有 n 個正面，n 個反面交錯排成一直線最少須 a_n 次

(1)當 $n=2$ 時，$a_2 = 3 = a_1 + 2$

正反正反

1.正反反正

2.反正反正

3.反反正正

(2)當 $n=3$ 時，$a_3 = 6 = a_2 + 3$

正反正反正反

1.正反正反反正　　1.正反正反反正

2.正反反正反正　　2.正反正反正反正

3.反正反正反正　　3.正反反反正正 ******

4.反反正正反正　　4.反正反反正正

5.反反正反正正　　5.反反正反正正

6.反反反正正正　　6.反反反正正正

(3)當 $n=4$ 時，$a_4 = 10 = a_3 + 4$

正反正反正反正反

1.正反正反正反反正　　1.正反正反正反反正

2.正反正反反正反正　　2.正反正反反正反正

3.正反反正反正反正　　3.正反正反反反正正

******

4.反正反正反正反正　　4.正反反正反反正正

5.反正反正反反正正　　5.正反反反正反正正

6.反正反反正反正正　　6.正反反反反正正正

****

7.反正反反反正正正　　7.反正反反反正正正

8.反反正反反正正正　　8.反反正反反正正正

9.反反反正反正正正　　9.反反反正反正正正

10.反反反反正正正正　　10.反反反反正正正正

(4)當 $n = 5$ 時，$a_5 = 15 = a_4 + 5$ 因為 第10步時為　正反反反反反正正正正，再將最左邊的正移到中間，共需 5 步，所以需 15 步

(5)$a_2 = 3 = a_1 + 2$

$$a_3 = 6 = a_2 + 3$$

$$a_4 = 10 = a_3 + 4$$

$$a_5 = 15 = a_4 + 5$$

$$a_n = a_{n+1} + n$$

等式左邊、右邊分別相加，得 $a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ +----- a_n + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 -------+ a_{n-1} +2+3+4+5+--------+n

等式兩邊削去 $a_2 + a_3 + a_4$ +--------+ a_{n-1}，得

$$a_n = 1+2+3+4+5+6+\text{------}+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

解法二：

此解法由東湖國中賴昱臣同學提供

⊙：反面，⊕：正面

⊕⊙⊕⊙→⊙⊕⊙⊕→⊙⊙⊕⊕共三次

二次　一次

⊕⊙⊕⊙⊕⊙→⊙⊕⊙⊕⊙⊕→⊙⊙⊕⊙⊕⊕

三次　二次

→⊙⊙⊙⊕⊕⊕共六次

一次

⊕⊙⊕⊙⊕⊙⊕⊙→⊙⊕⊙⊕⊙⊕⊙⊕→⊙⊙

四次

⊕⊙⊕⊙⊕⊕→⊙⊙⊙⊕⊙⊕⊕⊕→⊙⊙⊙⊙

三次　二次

⊕⊕⊕⊕共十次

一次

銅板數	4	6	8	n(n 為偶數)
次數	1+2＝3	1+2+3=6	1+2+3+4=10	$1+2+3+4+\cdots+\frac{n}{2}=\frac{n^2+2n}{8}$

⊕⊙⊕⊙⊕→⊙⊕⊙⊕⊕→⊙⊙⊕⊕⊕共三次

二次　一次

⊕⊙⊕⊙⊕⊙→⊙⊕⊙⊕⊙⊕⊕

三次

→⊙⊙⊕⊙⊕⊕⊕→⊙⊙⊙⊕⊕⊕⊕共六次

二次　一次

⊕⊙⊕⊙⊕⊙⊕⊙⊕→⊙⊕⊙⊕⊙⊕⊙⊕⊕

四次

→⊙⊙⊕⊙⊕⊙⊕⊕⊕→⊙⊙⊙⊕⊙⊕⊕⊕⊕

三次　二次

→⊙⊙⊙⊙⊕⊕⊕⊕⊕共十次

一次

銅板數	5	7	9	n(n 為奇數)
次數	1+2＝3	1+2+3=6	1+2+3+4=10	$1+2+3+4+\cdots+\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-1}{8}$

∴當 n 為偶數時，要移動 $\frac{n^2+2n}{8}$ 次

當 n 為奇數時，要移動 $\frac{n^2-1}{8}$ 次

解法三：

此解法由福和國中吳霽庭同學提供

⊕⊙→⊙⊕｜⊙⊕一次　（圖一）

⊕⊙⊕⊙→⊙⊙⊕⊕｜⊙⊕⊕⊙，⊙⊕⊙⊕，⊙⊙⊕⊕三次（圖二）

⊕⊙⊕⊙⊕⊙→⊙⊙⊙⊕⊕⊕｜⊙⊕⊕⊙⊕⊙，⊙⊕⊙⊕⊕⊙，⊙⊕⊙⊕⊙⊕，⊙⊙⊕⊕⊙⊕，⊙⊙⊕⊙⊕⊕→⊙⊙⊙⊕⊕⊕六次（圖三）

⊕⊙⊕⊙⊕⊙⊕⊙→⊙⊙⊙⊙⊕⊕⊕⊕｜⊙⊕⊕⊙⊕⊙⊕⊙，⊙⊕⊙⊕⊕⊙⊕⊙，⊙⊕⊙⊕⊕⊙⊕⊙，⊙⊕⊙⊕⊙⊕⊙⊕，⊙⊙⊕⊕⊙⊕⊙⊕，⊙⊙⊕⊙⊕⊕⊙⊕，⊙⊙⊕⊙⊕⊙⊕⊕，⊙⊙⊙⊕⊕⊙⊕⊕，⊙⊙⊙⊕⊙⊕⊕⊕，⊙⊙⊙⊙⊕⊕⊕⊕十次（圖四）

條件：

把⊕⊙⊕⊙…⊕⊙的圖形用最少次數變成⊙⊙……⊕⊕⊕（⊙：$\frac{n}{2}$個，⊕：$\frac{n}{2}$個）假設由上圖可猜測：

個數	移動最少次數
2×1	1　（如圖一）
2×2	2+1（如圖二）
2×3	3+2+1（如圖三）
2×4	4+3+2+1（如圖四）
2×5	5+4+3+2+1
…	…
$2\times\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}-1)+\cdots+2+1$

證明：

(1)若個數為 n 個，且 $n=2k$（偶數），則有一個方法可以達到最少次數，也符合假設，如下：

步驟1：

⊕⊙⊕⊙⊕⊙…⊕⊙（移 $\frac{n}{2}$ 次），把不符合條件的部分圈起來，把每個⊙往左移一格。

步驟2：

⊙⊕⊙⊕⊙⊕…⊙⊕（移 $\frac{n}{2}-1$ 次），把不符合條件的部分圈起來，把每個⊙往左移一格。

…………

⊙⊙⊙……⊕⊕⊕（⊙：$\frac{n}{2}$ 個　，⊕：$\frac{n}{2}$ 個），反覆下去，必可符合條件。

用此種方式，便可發現每經一步驟，所需的最少次數為等差數列，$\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}-1)+\cdots+2+1$

$=\dfrac{\frac{n}{2}(1+\frac{n}{2})}{2}$。

(2)若個數為 n 個，且 $n=2k+1$（奇數），則其最少次數必跟 2k 是相同的，如下：

2k →⊕⊙⊕⊙⊕⊙…⊕⊙

2k+1 →⊕⊙⊕⊙⊕⊙…⊕⊙⊕，已符合條件不需再移動一次，

因此，公式也為 $\dfrac{\frac{n}{2}(1+\frac{n}{2})}{2}$。

解題重點與評析：

(1)這個題目當初的設計，是希望在正面錢幣與反面錢幣皆為 n 個的情形下來移 動，沒想到因為只寫了 n 個錢幣，卻引導同學從 n 是奇數或者偶數的情形去討論。也發現同學的思考嚴密與重視歸理求真的精神。

(2)回函中約有90% 的同學皆答的非常好，可見有許多同學在國中時，就懂得去推理，去把一件事推廣至 n 的情形，將來到了高中若學了數學歸納法的證明，更能把一些推廣至 n 的式子，證明的非常完美非常嚴密。因為來函都答的很好，無法一一挑出，只能就各種不同的解法中各挑出一人為代表。

(3)參予本題徵答的同學共有30位同學，平均得分為6.34分，平均得分率為91%。

(4)優良徵答者有北縣海山中學賴建安，北縣江翠國中莊凱壹、黃明山，北縣新莊國中潘伯諺，北市南門國中李舒平。

問題編號
901204

1946年4月5日，美國某報紙登了一則消息、說一個著名的天文學家也是數論專家預言：「2141年將是世界末日」並且宣稱他的預言是通過深刻的數學與歷史的研究所得到的結果。他計算了 $1492^n-1770^n-1863^n+2141^n$，這個式子，當 $n=0,1,2,3,\cdots,1945$ 時，他發現這些數都能被1946所整除，而1492、1770、1863分別是一些重要的歷史年代：西元1492年哥倫布發現新大陸、1770年發生英國殖民者製造的波士頓慘案、1863年林肯發表「解放黑奴宣言」…，由於數學與歷史年代上的巧合，這位「專家」宣稱「2141年將是世界末日」。請問 $1492^n-1770^n-1863^n+2141^n$，這個式子，代入 $n=0,1,2,3,\cdots,1945$ 時，這些數都能被1946所整除，這是巧合嗎？試說明你的看法。

參考解答：

$\because a^n - b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$\therefore$當 n 是正整數時，a^n-b^n 都能被 a-b 整除

設 $F(n)=1492^n-1770^n-1863^n+2141^n$

$\because F(n)=(2141^n-1863^n)-(1770^n-1492^n)$

其中 $2141-1863=1770-1492=278=2\times 139$

$\therefore F(n)$可被 278 整除

$\because F(n)=(2141^n-1770^n)-(1863^n-1492^n)$

其中 $2141-1770=1863-1492=371=7\times 53$

$F(n)$亦可被 371 整除

$\because$ 278 與 371 互質

$\therefore F(n)$可被 $278\times 371=53\times 1946$ 整除

故 $F(n)$當然能被 1946 整除

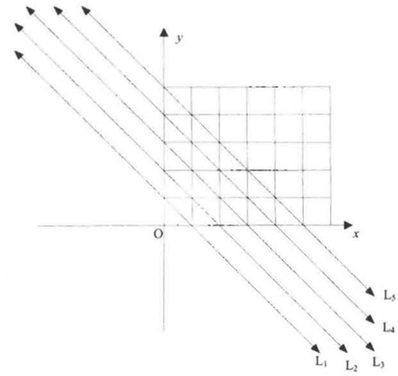
評析：

1. 關於這位專家的謠言，同學們基於智者的責任都很踴躍地參與揭露的行列，參答者大多能解，可喜可賀。
2. 相對的，大家所提的數據來源，也必須有所依據，這就是本提出提的原意與解題的主軸。
3. 參答者中，以北縣中山國中徐敏翔，江翠國中黃明山，竹市光華國中賴俊儒，北市弘道國中賴楷之，大直高中國中部陳俊曄，都能清楚地提到所依據的乘法公式，尤其徐敏翔同學更加以倒證，過程純真扼要，值得一提。
4. 參予本題徵答的同學共有 38 位同學，平均得分為 5.31 分，平均得分率為 85% 。

問題編號
901205

如下圖所示，有一組平行線，其中兩條相鄰平行線間的距離都是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，直線 L_1 通過點(1,0)、(0,1)，令 S_k 表示前 k 條平行線在第一象限內的格子點(點(x,y)中，x,y 均為整數的點稱為格子點)數目，A_k 表示這些格子點 x 坐標與 y 坐標的總和。例如 $S_4=1+2+3=6$，$A_4=(1+1)+(1+2)+(2+1)+(1+3)+(2+2)+(3+1)=20$

試找出 S_n 、 A_n 的值。(用 n 表示)



參考解答：

解法一：

$S_n=L_1+L_2+\cdots+L_n=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$

$A_n=L_1+L_2+\cdots+L_n=0\times 1+1\times 2+2\times 3+\cdots+(n-1)\times n$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k-1)k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)[(2n+1)-3]}{6}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

解法二：

此解法由基隆市銘傳國中吳敏中同學提供

我們先來看關於的部分：

$S_1=0$

$S_2=1=0+1$

$S_3=3=0+1+2$

$S_4=6=0+1+2+3$

$S_5=10=0+1+2+3+4$

不難發現。S_n的部分是由0開始、公差1，最後一項為$(n-1)$的等差數列的和。所以 0+1+2+

$\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{(n-1)n}{2}$

再來是有關 A_n 的部分：

$A_1=0$

$A_2=(1+1)=2=2\times 1$

$A_3=(1+1)+(1+2)+(2+1)=8=2+6$

$A_4=(1+1)+(1+2)+(2+1)+(1+3)+(2+2)+(3+1)$

$=20=2+6+12$

$A_5=(1+1)+(1+2)+(1+3)+(2+2)+(3+1)+(1+4)$

$+(2+3)+(3+2)+(4+1)=40=2+6+12+20$

由於觀察 A_n 得知其為一個三階等差數列，設 $A_n=an^3+bn^2+cn+d$ 代入 $A_2\sim A_5$ 得

$8a+4b+2c+d=2, 27a+9b+3c+d=8,$

$64a+16b+4c+d=20, 125a+25b+5c+d=40,$

解這個四元一次方程式得

$a=\dfrac{1}{3}, b=0, c=-\dfrac{1}{3}, d=0$ 亦 $An=\dfrac{n^3-n}{3}$

解 $Sn=\dfrac{(n-1)n}{2}$， $An=\dfrac{n^3-n}{3}$ 。

解法三：

此解法由台北市東湖國中賴昱臣同學提供

S_1	S_2	S_3	S_4	S_n
0	0+1	0+1+2	0+1+2+3	$\dfrac{(0+n-1)n}{2}=\dfrac{n^2-n}{2}$

$A_1=0(1+0)$

$A_2=0(1+0)+1(1+1)$

$A_3=0(1+0)+1(1+1)+(1+2)+(2+1)$

$=0(1+0)+1(1+1)+2(1+2)$

$A_4=0(1+0)+1(1+1)+2(1+2)+(1+3)+(2+2)$

$+(3+1)$

$=0(1+0)+1(1+1)+2(1+2)+3(1+3)$

$A_n=0(1+0)+1(1+1)+2(1+2)+3(1+3)+\cdots$

$+(n-1)[1+(n-1)]$

$=(0\times 1)+(1\times 2)+(2\times 3)+(3\times 4)+$

$\cdots+[n(n-1)]$

$=(1^2-1)+(2^2-2)+(3^2-3)+(4^2-4)+\cdots+(n^2-n)$

$=(1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2)-(1+2+3+4+\cdots+n)$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{n^3-n}{3}$

評析：

1.本題為數列級數，坐標平面的混和概念題，只要知道數列級數中與運算規則者，相信必能掌握解題關鍵。

2.參答者中以台北市東湖國中賴昱臣，明德國中王琨傑，北縣江翠國中黃明山、莊凱壹，海山國中張源平，基隆市銘傳國中吳敏中，新竹市光華國中賴俊儒等人答題清楚嚴謹，值得嘉許，特別是吳敏中、賴昱臣二人的答題方式獨具一格。

3.本題參答人數共有52位，平均的分數為5.41分，得分率77％ 。

說明：

(1)本期有五題徵答題，請照「中學生數學通訊解題答題規則」中的規定作答。（參閱師大科學教育月刊223期）

(2)本期徵答題不限您作答的題數，請於90年4月1日前將回函寄達：（100）台北市南海路56號，台北市立建國高級中學，楊希聰老師收。（信封上請註明通訊解題）

(3)徵答題可能有多種解法，本期參考答案與徵答者之優良解答，答題優良者姓名、就讀學校，將於90年5月份在台灣師範大學科學教育月刊及建國高級中學數學科網站上發布

(4)進入建中網站方法：

1.先利用瀏覽器進入建中首頁（網址：http://www.ck.tp.edu.tw/）

2.至最新消息點選數學科通訊解題。