第四章、中卷內容與結構

《籌學本原》中卷包含有方率、及圓家三率，方率首列「三率」和「徑周相求」，在這之後則是一系列面積與體積的問題，共分爲十類。朴繘在編排順序上，由「方率」的題型再轉爲「圓率」

> 方只一段，如平方面、立方面、三乘方面、四乘方面，各一設也。方率無古今新舊之異術只一種法也。[1]

朴繘指出方率是精準值，圓率是近似值，：「古圓、徽圓徑周平立積相求之率，今不須追煩改正，只用祖氏法，列其相求之率，而球積一款，另依經蘊如左。」而他所用的方率是爲求平方面周長、面積、立方體體積之值。方斜法是以「方五斜七」爲求正方形對角線之近似值。圓率是爲求圓面積、立圓體積之近似值。現列出一些互求的方法如下：

（1）方斜以五七爲率，方求斜，以斜七乘方面，以方五除之；斜求方，以方五乘內斜，以斜七除之。[2]
（2）方率，徑求周，以徑乘率；周求徑，以率除周。
（3）圓率，徑求周，以徑乘率；周求徑，以率除周。

朴繘爲《楊輝算法》中「方五斜七僅可施於尺寸之間，不可用於百步之外」[3]做了很好的註腳與銓釋：「方斜之間，開方多少之差，在尺寸之間甚微。而面求弦至七十尺，則方斜之不及開方者，幾滿一尺。弦求面至七十尺，則方斜之過開方者，亦已過半尺矣。故曰：方五斜七僅可施於尺寸之間，不可用於百步之外。」[4]此外，朴繘列出一些方五斜七術之原理與公式：「面求弦：七乘五除」、「弦求面：三乘七除」。他更清楚地說明：「方面求弦，以七乘方，則為五段斜弦。斜弦求面，以五乘方，斜則為七段方面。七個方與五個斜，等五個斜與七個方等。」他在〈方五斜七術〉中全部問題的內容與解法，驗證他上述的方法：

題目一：今有方面三尺，問弦幾何？
答曰：四尺五分尺之一

[1] 參閱黃胤錫，《理藪新編》，頁 2152。

[2]朴繘，《籌學本原》之〈方五斜七〉：「面求弦：七乘五除；弦求面：五乘七除。」參見金容雲，《韓國科學技術史資料大系．數學篇(3)》，漢城：驪江出版社，1985 年，頁 273。

[3] 參見本論文，第 23 頁。

[4]朴繘，《籌學本原》〈方五斜七〉，參見金容雲，《韓國科學技術史資料大系．數學篇(3)》，漢城：驪江出版社，1985 年，頁 243。

解法：方面＝3，3×7／5＝21／5＝$4\frac{1}{5}$。

題目二：今有方斜弦四尺五分尺之一，問面幾何？
答曰：三尺
解法：方斜弦＝$4\frac{1}{5}$＝21／5，21／5×5／7＝3。

題目三：今有弦三尺，問面幾何？
答曰：二尺七分尺之一
解法：弦＝3，3×5／7＝15／7＝$2\frac{1}{7}$。

題目四：今有方斜面二尺七分尺之一，問弦幾何？
答曰：三尺
解法：方斜面＝$2\frac{1}{7}$＝15／7，15／7×7／5＝3。

4－1 方率篇

「開方」乃算法中大節目，句股旁要演段鎖積多用例有七體：一曰：開平方、二曰：積平圓、三曰：開立方、四曰：開立圓、五曰：開分子方、六曰：開三乘以上方、七曰：帶從開方、併少廣、句股二章。九章：二百四十六問，固是不出乘、除、開方三術，但下法佈置尤宜偏，例如：互乘、互換、維乘、列衰、方程、併列圖于卷首。九章：二百四十六問，除習過、乘除、諸分開方自餘，方田、粟米只須一日，下編：衰分、功在、立衰、少廣全類，合分、商功皆是，折變、均輸、取用、衰分、互乘、盈不足、方乘、句股用法頗雜，更將九章纂類，消詳庶知用算門例。事物紀原載，句股旁要，本是兩章，今總為一章，詳觀法意，實是兩端。劉徽以旁要之術，變重差減積為海島九問，劉益以九股之術，治演段鎖方撰議古根源二百問，帶從益隅開方實，冠前古九章序云：或得一二，以能自成一家之書信矣，但海島題法，隱奧莫得其秘，李淳風雖注，祇云下法，亦不曾說其源議古根源，無細草，但依術演算，亦不知其旨，自九章句股而有二書，因二書增續諸家之妙序，又云九章儒者之六經，醫家之難素難經素問，兵家之孫子斁，句股者句段之平面測法也，旁要者句股之立面測法也，平立二面，雖曰異測，而其為句股則一也。[5]

[5] 同著 1，頁 2094-2095。

朴繡在方率篇中共收錄 15 題，方面、方周、平方積、立方積、三乘方積、四乘方積、平方面求積、平方積求面、平方周求積、立方面求積、立方積求面、立方周求積、三乘方面求積、三乘方積求面、三乘方周求積。

用現代符號表示在方率中的方面a，平積a^2，方周 4a，半周 2a，半面 1/2a，四而一即除以 4，三乘方即 4 次方。書中所謂平方面求積，是已知正方形的邊長，求正方形的面積；

所謂平方積求面，已知正方形的面積，求正方形的邊長；所謂平方周求積，已知正方形的周長，求正方形的面積；所謂立方面求積，已知正方體的邊長，求正方體的體積；所謂立方積求面，已知正方體的體積，正方體的邊長；所謂立方周求積，已知正方形的周長，求正方體的體積；所謂三乘方面求積，已知a，求a的四次方；所謂三乘方積求面，已知a^4，求a；所謂三乘方周求積，已知正方形的周長，求a的四次方。筆者將此製成表格，供讀者參考與研究。就此一窺朴繡註解的風貌：

題型	題意	現代符號表示
平方面求積	以正方形邊長，求面積	以a求a^2
平方積求面	以正方形面積，求邊長	以a^2求a
平方周求積	以正方形周長，求面積	以 4a求a^2
立方面求積	以正方體邊長，求體積	以a求a^3
立方積求面	以正方體的體積，求邊長	以a^3求a
立方周求積	以正方形周長，求立方體體積	以 4a求a^3
三乘方面求積	已知a，求四次方	以a求a^4
三乘方積求面	已知a的四次方，求a	以a^4求a
三乘方周求積	已知周長，求a四次方	以 4a求a^4

中卷題型的編排順序，是由一次方求二次方，二次方求三次方，三次方求四次方。而且屬於幾何觀念的題目，都是先由一度空間的題目，開始引導到二度空

間平面，再到三度空間立方體和立方面，之間的換算題目。由問題的概念及書中作者的編排，可以看出朴緖具有算學家的邏輯概念。使我們感受到朝鮮數學家深具有的數學素養，及韓國的學養。

平方求積法：

（1）【面求積式】設方面爲 a ，則方積＝ a^2 。

（2）【周求積式】設方周爲 l ，則方積＝ $(\frac{l}{4})^2$ 。

立方求積法：

（1）【面求積式】設立方面爲 a ，則立方積＝ a^3 。

（2）【周求積式】設方周爲 l ，則立方積＝ $(\frac{l}{4})^3$ 。

三乘方面求積：

（1）【面求積式】設三乘方面爲 a ，則三乘方積＝ a^4 。

（2）【周求積式】設三乘方周爲 l ，則三乘方積＝ $(\frac{l}{4})^4$ 。

平圓求積法：

（1）【徑求積式】設圓徑（直徑）爲 d ，則圓積＝ $\frac{3}{4}d^2$ 。

（2）【周求積式】設圓周爲 c ，則圓積＝ $\frac{c^2}{12}$ 。

（3）【周徑求積式】設圓周爲 c ，圓徑（直徑）爲 d ，則圓積＝ $\frac{cd}{4}$ 。

立圓求積法：

（1）【徑求積式】設立圓徑（直徑）爲 d ，則立圓積＝ $\frac{9}{16}d^3$ 。[6]

[6]在傳統科學中可能用測量金丸與金方之重量的方法來推出球與立方體積之比率的。在《九章・少章》開立圓術劉徽與李淳風所作的注記載了它的發展簡史。《九章算術》給出的球體積公式是：

（2）【周求積式】設圓周爲c，則立圓積＝$\frac{c^3}{48}$。

在整理這些公式之後，朴繘在《籌學本原》中卷方率篇，展現他的數學觀。以下筆者整理書中的算題，以茲參考如下：

以〈平方積求面〉第二題爲例：

積通內二十五，又分母四之一，一百開方一十，又分母四而一，餘各半之。

以現代的意思，已知a^2爲$\frac{25}{4}$，開平方後，

求得$a=\sqrt{\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{25\times4}{4\times4}}=\frac{\sqrt{100}}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$。

再以〈立方積求面〉第五題爲例：

積通一百二十五，又分母冪六十四之八千，開立方得二十，又分母八而一之，餘各四約之。

以現代的意思，已知a^3爲$\frac{125}{8}$，開立方後，

求得$a=\sqrt[3]{\frac{125}{8}}=\sqrt[3]{\frac{125\times8^2}{8\times8^2}}=\sqrt[3]{\frac{125\times64}{8^3}}=\frac{\sqrt[3]{8000}}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$。

朴繘用上述所列公式，爲還原文本的風貌，筆者列舉方率中全部問題的內容與解法爲下列：

題目	解法	
平方面求積 方面$a=\frac{5}{2}$	面通內五，自之二十五。分母冪四而一，不滿法者，命之。	$a^2=25／4$

球體積＝$\frac{9}{16}$直徑^3。關於這一公式的由來，劉徽注記述了兩條：一是實物的測量；一是幾何的估算。劉徽注：「黃金方寸，重十六兩。金丸徑寸，重九兩。率生於此，未曾驗也。」,《周官・考工記》:「桌氏爲量，改煎金錫則不耗，不耗然後權之，權之然後準之，準之然後量之。”言煉金使極精，而後分之，則可以爲率也。」

平方積求面 方積＝25／4	積通內二十五，又分母四之一百，開方一十，又分母四而一，餘各半之。	$\sqrt{\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{100}{4^2}}$ ＝10／4＝5／2
平方周求積 方周＝4 a	周自之，十六而一，得積。	$(4a)^2$ ／16＝ a^2
立方面求積 立方面 $a=\frac{5}{2}$	面通內五，再自之，一百二十五。分母再自之，八而一。	立方積＝ a^3 ＝125／8
立方積求面 立方積＝125／8	積內通一百二十五，又分母冪六十四之八千，開立方，得二十，又分母八而一，餘各四約之。	$\sqrt[3]{\frac{125}{8}}=\sqrt[3]{\frac{8000}{8\times 64}}$ ＝20／8 ＝5／2
立方周求積 方周＝4 a	周再自之，六十四而一，得積。	$(4a)^3$ ／64＝ a^3
三乘方面求積 方面 $a=\frac{5}{2}$	面通內五，三自之，六百二十五，分母三自之，得一十六而一。 P.S 三自之：4 次方	三乘方積＝ $\left(\frac{5}{2}\right)^4=\frac{625}{16}$
三乘方積求面 三乘方積＝ $\frac{625}{16}$	積內通六百二十五，分母再乘四千空九十六，而乘之二百五十六萬，三乘方開之，四十又分母一十六而一，餘各八約之。P.S 三乘方開之：開 4 次方	16^3 ＝4096， $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}=\sqrt[4]{\frac{625\times 4096}{16\times 4096}}=$ $\sqrt[4]{\frac{2560000}{16^4}}$ ＝40／16＝5／2。
三乘方周求積 方周＝4 a 三乘方：指 a 的四次方	周三自之，二百五十六而一，得積。	$(4a)^4$ ／256＝ a^4

4－2 圓率三家

討論圓田的面積，就是離不開圓周率。圓周率的研究，在朝鮮傳統數學的重要議題。《九章算術》、《籌解需用》等著作均使用周三徑一，[7]中國漢劉歆（前 50-23 年）為王莽作銅斛，使用 π＝3.1547，[8]張衡（78-139 年）求出 π＝ $\sqrt{10}$ ，[9]魏劉

[7] 參考洪宜亭，《洪大容的《籌解需用》》第三章台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2003 年。

[8] 參考周宗奎，《黃胤錫《算學入門》探源》，台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2003 年。

[9] 錢寶琮，《中國數學史》，科學出版社，1964 年，頁 138；又見《李儼錢寶琮科學史全集》第 5

徽首次創造圓周率的科學方法，[10]求出 $\pi = \frac{157}{50}$ ，他還用此圓周率修正了《九章算術》中與圓有關的面積、體積公式。[11]$\pi = \frac{157}{50}$ 常稱爲徽率。南朝宋何承天（370-447 年）提出相當於 $\frac{22}{7}$ 的圓周率。[12]宋末南徐州從事史祖沖之（429-500 年）將圓周率精確到 8 位有效數字，並將 $\pi = \frac{22}{7}$ 稱作約率，又提出密率 $\pi = \frac{355}{113}$ 。[13]在《籌學本原》曾引用《隋志律曆志》這一段：

> 隋志曰：古之九數，圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒各設新率，未臻折衷。宋末南徐州從事史祖沖之更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正數在盈朒二數之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五。約率：圓徑七，圓周二十二。又設開差密開差立，兼以正負參之指要精密算氏之最者也，所著之書名為綴術，官莫能究其深奧，是故廢而不理。[14]

因此，《籌學本原》一系列與圓有關的面積、體積公式，所列出當時流傳的三個圓周率：

古率　周三徑一
徽率　周一百五十七徑五十
密率　周二十二徑七

朴繘在《籌學本原》中卷開宗明義，引用楊輝的論述，指出古法的圓周率 3 一數值是有誤差的：「楊輝曰：以徽密二術言之，圓三徑一亦未為是。古人取圓三方四之義，故行圓三徑一之法。」即朴繘認爲古法圓周三圓徑一（即 $\pi = 3$）的比率是不正確的。

卷，遼寧教育出版社，1998 年，頁 153。

[10]劉徽在計算圓面積的過程中，實際上也計算了圓周率。劉徽從圓的內接正 6 邊形起算，依次將邊數加倍，分別求出內接正 12，24，48，…等正多邊形的一邊之長，從而算出內接正 24，48，96，…等正多邊形的面積。邊數增加的越多，內接正多邊形面積與外接圓面積的差越小，算得的圓面積也就越準確，求得的圓周率也就更加精密。邊數增加越多，把圓越割越細，因此，劉徽的這種方法稱爲割圓術，劉徽用這種方法求得圓周率 157／50（相當於 $\pi = 3.14$）。

[11] 郭書春，《古代世界數學泰斗劉徽》，台北：明文出版社，1992 年，頁 234-242。

[12] 同註 3，分別見頁 87、95。

[13] 唐魏徵等，《隋書》〈律曆志〉，北京中華書局，1973 年，頁 388。

[14]參見金容雲，《韓國科學技術史資料大系・數學篇(3)》，漢城：驪江出版社，1985 年，頁 346。

而雖然劉歆、張衡、劉徽等人各各改定新率，卻仍然不夠準確。於是祖沖之又進一步進行了更精密的計算。祖沖之以一丈作為直徑，並把它分為一億份（一丈＝一億微）來進行計算，最後算得準確的圓周長應在三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽之間。由這段記載說明祖沖之算得圓周率的近似值 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ 祖沖之將圓周率的這一數值作了到小數點後第 7 位數字準確值。此外，按照當時的計算習慣（樂於使用分數），祖沖之還提出了兩個分數值的圓周率，即密率（比較精密些的）：$\pi = \frac{355}{113}$（相當於 3.14159292，即小數點後 6 位數字準確），約率（比較簡便些的）：$\pi = \frac{22}{7}$（相當於 3.14285714，即小數點後第 2 位數字準確）。[15]

朝鮮算學者認爲在處理圓面積與圓周問題時，以用古率 3 即可收簡捷之便，但是，如果要求得更精確的值，則應採用西法新率。也就是說，取圓周率的近似值取法是極爲務實且因時制宜的，而徽率與密率在精確度不及新率：

> 圓法之周三徑一，古率也，徽率、密率比古差，精而猶不免盈朒。蓋粗數不如古率之簡，精數莫如西法之密，學者詳之。[16]

朴繘使用（古率）：周三徑一、（徽率）：周一百五十七徑五十、（密率）：周二十二徑七，求圓面積及立圓體積的各種公式。求圓面積及立圓體積時，使用三個圓周率十個公式中，立圓徑體積指的是球的體積。

關於球體積（立圓徑體積）公式：最早《九章算術》給出的球體積公式是：

---

[15]祖沖之運用連分數，在中國古代的天文曆法的計算中，曾經有過依種逐漸調整分母和分子數值，以求得使分數值更加接近真值得方法，叫作“調日法”。宋代學者認爲“調日法”始自南北朝時期稍早於祖沖之。“調日法”的基本內容是：假如 $\frac{a}{b}$ ，$\frac{c}{d}$ 分別爲不足和過剩近似分數，則適當選取 m、n，新得出的分數 $\frac{ma+nc}{mb+nd}$ 有可能更加接近真值。由 $\frac{157}{50}$ （劉徽），和 $\frac{22}{7}$ （祖沖之約率）即可算得 $\frac{157\times1+22\times9}{50\times1+7\times9}=\frac{355}{113}$ 。用“調日法”由 $\frac{3}{1}$ （古率）和 $\frac{22}{7}$ 也可以算得 $\frac{3\times1+22\times16}{1\times1+7\times16}=\frac{355}{113}$ 。的分數值，在用割圓術校驗求得精確數值，即可斷定 $\frac{355}{113}$ 爲密率。

[16]參見洪大容，《籌解需用》，台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文，2003 年。

球體積 V＝$\frac{9}{16}$直徑 D^3，古人用測量金丸與金方之重量的方法來推出球與立方體積之比率。[17]

> 徽注又云：為術者，蓋依周三徑一之率。令圓冪居方冪四分之三，圓囷居立方亦四分之三。更令圓囷為方率十二，為丸率九，丸居圓囷又四分之三也。置四分自乘得十六分，三自乘得九，故丸居立方十六分之九也。[18]

《九章算術》可能考慮球與圓囷的體積之比而推導出球積上述的公式的。圓囷之積：立方之積=圓冪：方冪=3：4；而估計球積：圓囷之積=9：12=3：4，即圓囷之積=$\frac{3}{4}$立方之積；球積=$\frac{3}{4}$圓囷之積，故球積=$\frac{9}{16}$立方之積=$\frac{9}{16}$直徑^3。[19]

〈圓率三家〉共有分十類型及四十二條題目，主要內容是：平徑求積、平積求徑、平周求積、平積求周、平徑求周、平周求徑、立徑求積、立積求徑、立周求積、立積求周爲主。古法圓率的$\pi \approx 3$，劉徽新術的$\pi \approx \frac{157}{50}$，祖沖之密率的$\pi \approx \frac{22}{7}$。[20]

〈圓率三家〉中圓徑指的是直徑 2r，周指的是圓周長 $2\pi r$，平積指的是圓面積πr^2，立積指的是$\frac{3}{2}\pi r^3$。所謂「平徑求積」，是已知圓的直徑，求圓的面積；所謂「平積求徑」，已知圓的面積，求圓的直徑；所謂「平周求積」，已知圓的周長，求圓的面積；所謂「平積求周」，已知圓的面積，求圓的周長；所謂「平

---

[17]關於這一公式的由來，劉徽注記述了兩條：一是實物的測量；一是幾何的估算。徽注云：黃金方寸，重十六兩。金丸徑寸，重九兩。率生於此，未曾驗也。《周官・考工記》：“臬氏爲量，改煎金錫則不耗，不耗然後權之，權之然後準之，準之然後量之。”言煉金使極精，而後分之，則可以爲率也。

[18] 李繼閔，《《九章算術》及其劉徽注研究》，台北：九章出版社，1992 年，頁 344。

[19]劉徽指出推算是粗略的。他說：以周三徑一爲圓率，則圓冪傷少。令圓囷爲方率，則丸積傷多。互相通補，是以九與十六之率偶與實相近，而丸由傷多耳。

[20]宋元時期，”密率”一詞已遍及諸家算書。南宋楊輝《續古摘奇算法》中”方圓論”有記載：”密率：云七乘周，如二十二而一。”其《田畝比類乘除捷法》中”圓田”諸法亦載有：”密率求徑曰：以七乘周，如二十二而一。”元代朱世杰《算學啓蒙》有關於圓率的記載：”古法圓率：周三尺，徑一尺；劉徽新術：周一百五十七尺，徑五十尺；冲之密率：周二十二尺，徑七尺。”追溯古算書中”密率”詞義的演化，乃爲詞義縮小之一例。在早期劉徽與李淳風的著述中，密率原義泛指圓周與直徑較精確的比率，有時也藉以指代計算圓周與直徑精確比率的方法。到了宋元之後，密率變成了祖沖之圓率$\pi = \frac{22}{7}$的專有名詞了。參閱李繼閔，《《九章算術》及其劉徽注研究》，台北：九章出版社，1992 年，頁 298。

徑求周」，已知圓的直徑，求圓的周長；所謂「平周求徑」，已知圓的周長，求圓的直徑；所謂「立徑求積」，已知球的直徑，求球的體積；所謂「立積求徑」，已知球的體積，求球的直徑；所謂「立周求積」，已知圓的周長，求球的體積；所謂「立積求周」，已知球的體積，求圓的周長。

〈圓率三家〉內容涵蓋直徑、圓周、圓面積、立圓徑求積、方求斜、斜求方，平徑求積、平積求徑、平周求積、平周求積、平徑求周、平徑求周、平周求徑、立圓徑求積、立積求徑、立圓周求積、立圓積求周，皆是實用性問題。以下是這四十二條的內容說明：

	原文	現代符號	註解
【1】	圓徑	D＝2R	R:徑(指直徑)
【2】	周	S＝2πr	S:周(指圓周) r:半徑
【3】	平積	$A=\pi R^2$	A:平積（指圓面積）
【4】	立積	$V=3r^3／2$	V:立積（指立圓徑體積）
【5】	平徑求積	$A=\pi R^2／4$	
【6】	平積求徑	$D=\sqrt{4A/\pi}$	
【7】	平周求積	$A=s^2／\pi$	s:半周
【8】	平積求周	$S=\sqrt{4\pi A}$	
【9】	平徑求周	$S=\pi R$	
【10】	平周求徑	$R=S／\pi$	
【11】	立徑求積	$V=3R^3／16$	V:立積（指立圓徑體積）
【12】	立積求徑	$R=\sqrt[3]{16V/3\pi}$	R:立圓直徑

【13】	立周求積	$V=S^3/48$	S:圓周
【14】	立積求周	$S=\sqrt[3]{48V}$	

中國的劉徽推測《九章算術》,「徽注云：為術者，蓋依周三徑一之率。令圓冪居方冪四分之三，圓囷居立方亦四分之三。更令圓囷為方率十二，為丸率九，丸居圓囷又四分之三也。置四分自乘得十六分，三自乘得九，故丸居立方十六分之九也。」可能是由考慮球與圓囷的體積之比而推導出球積上述的公式的。圓囷之積：立方之積=圓冪：方冪=3：4；而估計球積：圓囷之積=9：12=3：4 即圓囷之積=$\frac{3}{4}$立方之積；球積=$\frac{3}{4}$圓囷之積；故球積=$\frac{9}{16}$立方之積=$\frac{9}{16}$直徑^3。但是這公式是粗略的。但是，朴繘給出球積=$\frac{3}{16}$直徑^3，朴繘所用公式是比較精緻的。[21]

4－2－1 古法

圓率三家共分爲三類，一爲古法（即指的是古法圓率），二爲徽術（即指的是劉徽新術），三爲密率（即指的是祖沖之密率）。朴繘在《籌學本原》以「**圓率三家之分。**」爲標題，提到「**古人取圓三方四之義，故行圓三徑一之法。**」「古法」就是指古代的算學所用的圓周率 $\pi=3$。作者刻意將此三率互相運用在十類題型，可以互相比較數值，以下爲〈圓率三家〉中「古法」的算題已知與題型及解法，筆者細心地將作者算題與解法，按其一條一條地詳細解說，使我們體會朝鮮算學家的細心求證的精神，以下供讀者參考：

算題	公式	解法
圓徑 $D=2r=2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ $\therefore r=\frac{5}{4}$	周 $L=2\pi r=7\frac{1}{2}$	平積 $A=\pi r^2=\frac{75}{16}=4\frac{11}{16}$
平徑求積	$r=\frac{5}{4}$，$r^2=\frac{25}{16}$	$\pi r^2=3\times\frac{25}{16}=\frac{75}{16}$

[21]參閱李繼閔，《《九章算術》及其劉徽注研究》，台北：九章出版社，1992 年，頁 344。

平積求徑	公式是 $\sqrt{\pi r^2\times 4/\pi}=\sqrt{4r^2}=2r$	$\sqrt{\frac{100}{16}}=\sqrt{\frac{100\times16}{16\times16}}=\frac{\sqrt{1600}}{16}=\frac{40}{16}=\frac{5}{2}$
平周求積	公式是 $\frac{(2\pi r)^2}{4\pi}=\frac{4\pi^2r^2}{4\pi}=\pi r^2$	$\frac{(2\pi r)^2}{4\pi}=\frac{\left(\frac{15}{2}\right)^2}{4\times3}=\frac{225}{48}=\frac{75}{16}=4\frac{11}{16}$
平積求周	公式是 $\sqrt{\pi r^2\times4\times\pi}=\sqrt{4\pi^2r^2}=2\pi r$	$\pi r^2\times4\times\pi=\frac{75}{16}\times4\times3=\frac{900}{16}$ $2\pi r=\sqrt{\frac{900}{16}}=\frac{\sqrt{14400}}{16}=\frac{120}{16}=\frac{15}{2}$
平徑求周	公式是 $2r\times\pi$	$2r\times\pi=\frac{5}{2}\times3=\frac{15}{2}$
平周求徑	公式是 $2r=2\pi r\div\pi$	$2r=2\pi r\div\pi=\frac{15}{2}\div3=\frac{5}{2}$
立徑求積	公式是 $(2r)^3\times\pi\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}\pi r^3$	Step1：$(2r)^3=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$ Step2：$\frac{125}{8}\times\pi\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1125}{128}$
立積求徑	公式是 $\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times2\times8}{3\times\pi}}=2r$	$\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times2\times8}{3\times\pi}=\frac{\frac{1125}{128}\times16}{3\times\pi}=\frac{2000}{128}$ $\sqrt[3]{\frac{2000}{128}}=\sqrt[3]{\frac{32768000}{128^3}}=\frac{320}{128}=\frac{5}{2}$

立周求積	公式是$\frac{3}{2}\times\frac{(2\pi r)^3}{8\pi^2}=\frac{3}{2}\pi r^3$	$\frac{3}{2}\pi r^3=\frac{3}{2}\times\frac{(2\pi r)^3}{8\pi^2}$ step1：$(4\pi r)^3=15^3=3375$ step2：$\frac{3}{2}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{48}$ step3：$\therefore\frac{3375}{48\times 8}=\frac{3375}{384}=\frac{1125}{128}$
立積求周	公式是$\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times 2\times 8\times\pi^2}{3}}=2\pi r$ $\therefore\frac{2\times 8\times 3\times 3}{3}=48$	$\frac{3}{2}\Pi r^3=\frac{1125}{128}$求$2\pi r=$？ step1：1125x48＝54000 step2：$128^2=16384$ step3：54000x16384＝884736000 step4：$\sqrt[3]{884736000}=960$ step5：$\frac{960}{128}=\frac{15}{2}$

4－2－2 徽術

此處所指「徽術」是劉徽的圓周率$\pi=\frac{157}{50}$，特地將三率互相比較，以下爲「圓率三家」中「徽術」的算題已知與題型及解法：

算題	公式	解法
圓徑 D ＝ $2r=2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ $\therefore r=\frac{5}{4}$	周 $L=2\pi r=\frac{5}{2}\times\frac{157}{50}=\frac{157}{20}=7\frac{17}{20}$	平積 $A=\pi r^2=\frac{157}{32}=4\frac{29}{32}$ 立積$\frac{3}{2}\pi r^3=\frac{123245}{12800}=\frac{24649}{2560}=9\frac{1609}{2560}$
平徑求積	平積 $A=\pi r^2$	$\pi r^2=\frac{157}{50}\times\frac{25}{16}=\frac{157}{32}$

平積求徑	公式是$\sqrt{\pi r^2\times 4 \big/ \pi}=\sqrt{4r^2}=$ 2r	Step1：157×4＝628 Step2：628÷$\frac{157}{50}=\frac{31400}{157}$＝200 Step3：$\sqrt{\frac{200}{32}}=\sqrt{\frac{200\times 32}{32\times 32}}=\frac{\sqrt{6400}}{32}$ $=\frac{5}{2}$
平周求積	公式是$\frac{(2\pi r)^2}{4\pi}=\frac{4\pi^2 r^2}{4\pi}=\pi r^2$	$\frac{(2\pi r)^2}{4\pi}=\pi r^2$，$2\pi r=\frac{157}{20}$ atep1：157^2＝24649 step2：$\frac{24649}{20^2\times\frac{157}{50}\times 4}=\frac{616225}{125650}=\frac{157}{32}$ （約 3925）
平積求周	公式是$\sqrt{\pi r^2\times 4\times\pi}=\sqrt{4\pi^2 r^2}$ ＝$2\pi r$	$\pi r^2\times 4\times\pi=\frac{157}{32}\times 4\times\frac{157}{50}=\frac{1971.92}{32}$ ＝ $2\pi r=\sqrt{\frac{1971.92\times 32}{32\times 32}}=\frac{2512}{320}=\frac{157}{20}$ （約 16）
平徑求周	公式是 2r×π	$2r\times\pi=\frac{5}{2}\times\frac{157}{50}=\frac{157}{20}$
平周求徑	公式是 2r＝$2\pi r\div\pi$	$2r=2\pi r\div\pi=\frac{157}{20}\div\frac{157}{50}=\frac{5}{2}$
立徑求積	公式是$(2r)^3\times\pi\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}\pi$ r^3	$(2r)^3=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$ $\frac{125}{8}\times\pi\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{58875}{6400}=\frac{2355}{256}=$ $9\frac{51}{256}$（約 25）
立積 求徑	公式是$\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times 2\times 8}{3\times\pi}}=2r$	$\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times 2\times 8}{3\times\pi}=\frac{\frac{2355}{256}\times 16}{3\times\pi}=\frac{375}{24}$

		$\sqrt[3]{\frac{375}{24}}=\frac{\sqrt[3]{3375}}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$
立周求積	公式是$\frac{3}{2}\times\frac{(2\pi r)^3}{8\pi^2}=\frac{3}{2}\pi r^3$	$\frac{3}{2}\times\frac{(2\pi r)^3}{8\pi^2}=\frac{3}{2}\pi r^3$ $(2\pi r)^3=\left(\frac{157}{20}\right)^3=\frac{3869893}{8000}$ $\frac{3}{2}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{48}$ $\frac{3}{2}\times\frac{3869893}{8000}\times\frac{1}{8}\times\frac{50}{157}\times\frac{50}{157}=\frac{2355}{256}$ $=9\frac{51}{256}$
立積求周	公式是$\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times2\times8\times\pi^2}{3}}=2\pi r$ $\sqrt[3]{\frac{3}{2}\times\frac{(2\pi r)^3}{8\pi^2}}=2\pi r$	$\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times2\times8\times\pi^2}{3}}=$ $\sqrt[3]{\frac{\frac{2355}{256}\times16\times\frac{157}{50}\times\frac{157}{50}}{3}}=\frac{15}{2}$ $\frac{3}{2}\times\frac{(2\pi r)^3}{8\pi^2}=\frac{3}{2}\times\frac{\left(\frac{157}{20}\right)^3}{8\times\frac{157}{50}\times\frac{157}{50}}=$ $\frac{3375}{8}$ $\sqrt[3]{\frac{3375}{8}}=\frac{15}{2}$

4－2－3 密率

朴繘在《籌學本原》中卷「圓率三家」「密率」中「**今依密率真數考政見**」爲標題。指的是祖沖之的圓周率$\pi=\frac{22}{7}$，以下爲「圓率三家」中「密率」的算題已知與題型及解法：

算題	公式	解法
圓徑 D ＝ 2r＝2 1 ＝ 5	周 L＝$2\pi r=\frac{5}{2}\times\frac{22}{7}=\frac{55}{7}=$	平積 A＝$\pi r^2=\frac{275}{56}=4\frac{51}{56}$

$2r=2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ $\therefore r=\frac{5}{4}$	$7\frac{6}{7}$	立積$\frac{3}{2}\pi r^3=\frac{15125}{1568}=9\frac{1013}{1568}$
平徑求積	平積 $A=\pi r^2$	$\pi r^2=\frac{22}{7}\times\frac{25}{16}=\frac{550}{112}=\frac{275}{56}$
平積求徑	公式是$\sqrt{\pi r^2\times 4/\pi}=\sqrt{4r^2}=$ 2r	$\pi r^2\times 4/\pi=\frac{275}{56}\times4\times\frac{7}{22}=\frac{25}{4}$，$\sqrt{\frac{25}{4}}$ $=\frac{5}{2}$
平周求積	公式是$\frac{(2\pi r)^2}{4\pi}=\frac{4\pi^2r^2}{4\pi}=\pi r^2$	$\frac{(2\pi r)^2}{4\pi}=\pi r^2$，$2\pi r=\frac{55}{7}$ atep1：$55^2=3025$ step2：$\frac{3025}{7^2\times\frac{22}{7}\times4}=\frac{21175}{4312}=\frac{275}{56}$ （約之 77）
平積求周	公式是$\sqrt{\pi r^2\times4\times\pi}=\sqrt{4\pi^2r^2}$ $=2\pi r$	$\pi r^2\times4\times\pi=\frac{275}{56}\times4\times\frac{22}{7}=\frac{3025}{49}$ $2\pi r=\sqrt{\frac{3025}{49}}=\frac{55}{7}$
平徑求周	公式是 $2r\times\pi$	$2r\times\pi=\frac{5}{2}\times\frac{22}{7}=\frac{110}{14}=\frac{55}{7}$
平周求徑	公式是 $2r=2\pi r\div\pi$	$2r=2\pi r\div\pi=\frac{55}{7}\div\frac{22}{7}=\frac{5}{2}$
立徑求積	公式是$(2r)^3\times\pi\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}\pi$ r^3	$(2r)^3=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$ $\frac{125}{8}\times\pi\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{8250}{896}=\frac{4125}{448}=$ $9\frac{93}{448}$
立積求徑	公式是$\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times2\times8}{3\times\pi}}=2r$	$\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times2\times8}{3\times\pi}=\frac{\frac{4125}{448}\times16}{3\times\pi}=\frac{462000}{29568}$ $=\frac{125}{8}=8r^3$

		$\sqrt[3]{\frac{125}{8}}=\frac{5}{2}$
立周求積	公式是 $\frac{3}{2}\times\frac{(2\pi r)^3}{8\pi^2}=\frac{3}{2}\pi r^3$	$\frac{3}{2}\times\frac{(2\pi r)^3}{8\pi^2}=\frac{3}{2}\pi r^3$ $(2\pi r)^3=\left(\frac{55}{7}\right)^3=\frac{166375}{343}$ $\frac{3}{2}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{48}$ $\frac{3}{2}\times\frac{166375}{343}\times\frac{1}{8}\times\frac{22}{7}\times\frac{22}{7}=9\frac{93}{448}$
立積求周	公式是 $\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times 2\times 8\times\pi^2}{3}}=2\pi r$	$\sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2}\pi r^3\times 2\times 8\times\pi^2}{3}}=$ $\sqrt[3]{\frac{\frac{4125}{448}\times 16\times\frac{22}{7}\times\frac{22}{7}}{3}}=\frac{15}{2}$

由《籌學本原》算學書中感受到，朝鮮算學者已經擁有獨自的見解，並且能將當時的社會現象融入在算學例題當中，[22]也使得朝鮮算學文本成為韓國數學自主發展的一種獨特風貌。近年來，中日韓數學史家如金容雲、川原秀城、洪萬生與金永植等都已經注意到此一非常重要的歷史圖像。[23]另外在數學方面，由中卷〈圓家三率〉我們可看出一些特點，作者編排順序是先由「方率」的題型再轉為「圓率」的討論。一般題型的編排順序是由一次方求二次方，二次方求三次方，三次方求四次方。而一些屬於幾何觀念的題型，由一度空間到二度空間再到三度空間換算。由書中一些問題的概念，朴繘具有邏輯完整的概念，使我們在閱讀本書時同時能感受到朝鮮數學家深具的數學素養，及韓國學養的自主性，以自成一格。

[22] 參見本論文第二章《籌學本原》的歷史脈絡。
[23]參考 Kim Yong Woon (1986)；川原秀城 (1998)；Kim Yun Sik (1998)。