

利用螺旋變式課程設計“一題多解”理念培養准教師的 數學興趣¹

孫旭花²

澳門大學教育學院

摘要

本文通過強調螺旋變式課程設計模型“一題多解”理念，以三角形中位線定理的推導為例，進行實踐嘗試，發現澳大學生能在創新解法同時，並對中位線定理證明孜孜不倦地探索，影響了他們的數學學習興趣，發現“螺旋變式課程”作為一種數學教學的智慧，對數學興趣培養存在重要意義。

關鍵字：螺旋變式課程，准教師，三角形中位線定理，數學興趣

壹、問題的提出

興趣是最好的老師。在西方，多數學者認為數學興趣屬先天，數學興趣不大可能後天培養，數學興趣往往也自生自滅。東方華人地區，數學教育多注重考試的成敗，極少注意興趣發展，一些老師也認為考試成功了，就更有信心，興趣自然而來，國內大陸數學興趣班，實際上多為數學競賽而準備，也是為另類考試而存在，華人地區的數學興趣的培養，多強調以外外部獎勵而驅動，附屬於考試成功的成敗，而少靠數學本身魅力。因此無論東方、西方，數學興趣培養方面則是數學教育領域較少開發的處女地。數學興趣培養從哪里開始呢？波利亞說過，“教師首要的金科玉律是：自己對數學有濃厚的興趣，如果教師厭煩數學，那學生也肯定會厭煩數學（波

¹本文由筆者的博士論文中發展而來。此文早期成稿過程特別得到了香港中文大學黃毅英教授，香港教育學院林智中教授，香港教育學院盧敏玲教授、龐永欣教授，華東師大顧泠沅教授，瑞典 Ference Marton 教授，美國特拉華大學蔡金法教授諸多幫助和建議，特此鳴謝。

²孫旭花，女，山東莒縣，澳門大學教育學院，助理教授，香港中文大學課程與教學學系博士，聯繫方式：澳門：澳門大學教育學院 542 房，電郵 xhsun@umac.mo 研究方向：數學課程與教學方向。

利亞, 1982; 劉雲章, 1992)”。簡單地說, 沒有數學興趣的老師不可能培養出對數學有興趣的學生, 從這個意義上來說, 教師數學興趣培養, 是興趣培養的源頭。然而數學教師, 作為成年的學生, 經歷無數次失敗, 挫折, 他們對數學學習興趣已定型, 他們對自己數學信心已定型, 如何再來培養數學興趣呢? 的確, 筆者常常遇到家長諮詢培養如何培養孩子的數學興趣, 教師的數學興趣培養倒是更少受到關注。因此從這個意義上來說, 教師數學興趣培養該數學教育的難題中的難題。

螺旋變式課程設計模型, 是基於中國數學教學實踐的“揚長避短”的模型。主要根據中國數學教學中, 自然地使用“問題變式”實踐策略: 通過“一題多解”(解法變式) 和“一題多變”(概念變式), 實現“以舊概念引出新概念”(多數情境下的中國傳統教學利用“一題多變”引出新概念), 由概念的聚焦, 導出新概念, 達成“變中發現不變”, 並把這種逐步實現抽象化的問題變化, 稱之為深度變式。再根據中國數學教學中“問題變式”自然的實踐策略: “一題多變”和“一題多解”, 通過概念的發散, 把“以新概念歸回到舊概念體系中”, 幫助學生形成數學結構(多數情境下的中國傳統教學利用“一題多解”, 形成結構), “以不變應萬變”, 並把這種逐步實現公理化, 的問題變化, 稱之為廣度變式。無論深度、廣度變式(後來的研究, 進一步拓展為深度、廣度變式、歸納、應用變式四類。其中歸納、應用變式見, 孫旭花, 2007a; Wong, 2007; Wong, Lam, & Sun, 2006), 都是實現概念連接, 方法連接達成概念的“通透”, 方法組織的系統化的教學實踐。

由此我們把這種“一題多解”“一題多變”(孫旭花, 待刊), 這一中國內地數學課程中的無意識、潛意識的教學實踐的合理因素, 升化為如下模型,

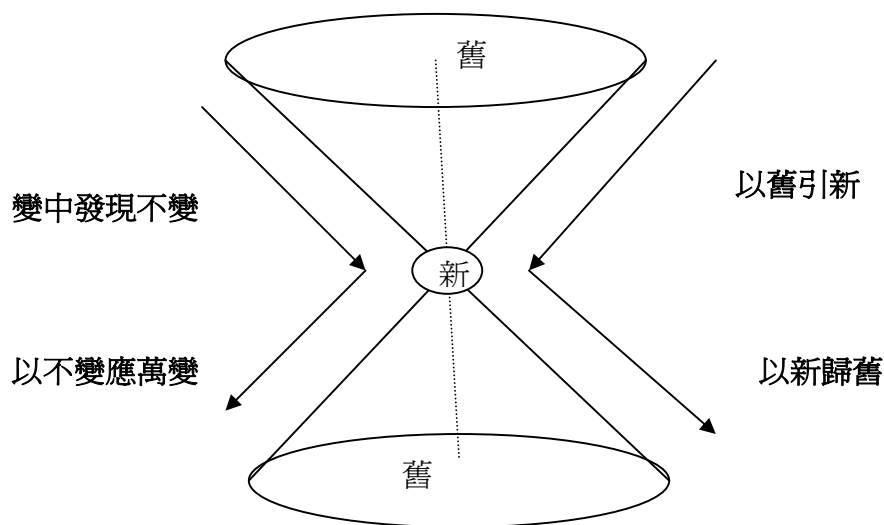


圖 1 螺旋變式課程設計理論示意圖³

總體而言，螺旋變式課程設計理論，主要強調“變中發現不變，以不變應萬變”角度（孫旭花，2007b），實現“以舊引新、以新歸舊”之概念連接（孫旭花，2007c），主要強調“一題多變”和“一題多解”兩種問題變化方式，教學也常常根據學生對具體概念熟悉情況，採取不同的問題變式，而不是任何教學同時涵蓋兩種變式。課程與教學也常常根據學生對具體概念的熟悉情況，採取不同的問題變式，而不是任何教學同時涵蓋兩類變式。

螺旋變式課程設計模型特別強調“一題多變”“一題多解”“以舊引新、以新歸舊”“以不變應萬變”“變中發現不變”幾個理念，本文特別是有目的、有意識地利用“一題多解”理念嘗試，通過證明方法的探索，培養准教師數學興趣的可能。該次探索仿佛打開了數學興趣的閘口，試過的班級同學大多顯示了對數學前所未有的衝動！現在舉一例，與同事分享。

³ 該模型根據筆者的博士論文《螺旋變式數學課程設計：理論與實踐》，加以訂正修改。

貳、研究方法

我們嘗試根據螺旋變式課程設計的“一題多解”的理念，在澳門大學教育學院教學，三角形中位線定理（三角形的中位線平行於第三邊，且等於第三邊的一半。）為例，進行嘗試，看是否有效呢？

教學時，讓學生用自己的方法“一題多解”推導三角形中位線定理，並強調黑板寫出並講解他們的解法，並以他們的名字命名解法，然後，不斷鼓勵學生給出不同於學生已經給出的新方法。

參、研究發現

以下是學生在課堂的現場解法，沒有創意的證明，也沒有興趣的生成，解法創意一定程度顯示了，他們推導三角形中位線定理非凡的興趣，具體介紹如下：

證明法一：清法⁴

$$AD=BD$$

$$AE=CE$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$$

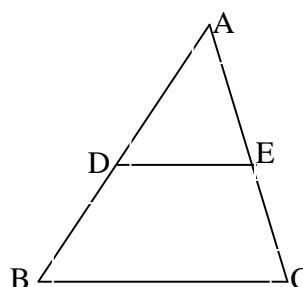
$$\text{而 } \angle A = \angle A$$

$$\therefore \triangle ADE \approx \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\angle ADE = \angle ABC$$

$$\therefore DE \text{ 平行 } BC$$



評注：這是最簡單直接利用相似的方法，幾乎兩步證畢，方法最簡潔而優雅。

⁴ 為了紀念學生的創意，本文以學生的名字，命名各方法，下同。

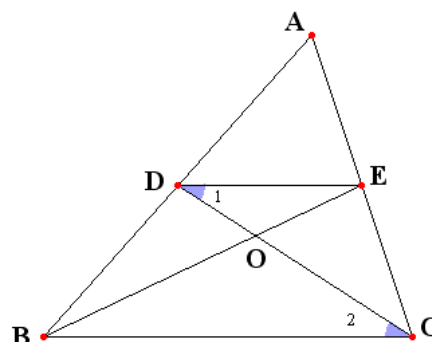
證明法二：賢法

三角形的中位線平行于第三邊，且等於第三邊的一半。

已知：三角形 ABC , D 及 E 分別為 AB, AC 的中點

求證： $DE \parallel \frac{1}{2}BC$

證：



連結 BE, CD ; 其交點 O 就是重心, 由重心定理可以得出

$$DO:OC = EO:OB = 1:2$$

所以在 $\triangle DOE$ 和 $\triangle COB$ 中,

$$\begin{cases} DO:OC = EO:OB = 1:2 \\ \angle DOE = \angle COB \end{cases}$$

所以可得 $\triangle DOE \approx \triangle COB$

由相似三角形可以得出以下結論:

$$\begin{cases} DE = \frac{1}{2}BC \\ \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow DE \parallel BC \end{cases}$$

證畢。

評注：這是簡單直接利用相似的方法，幾乎兩步證畢，方法簡潔、精練。

證明法三：字法

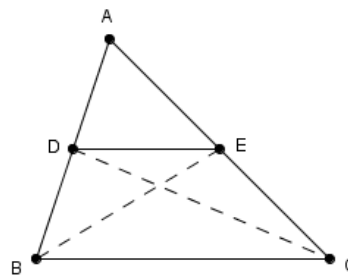
已知：在 $\triangle ABC$ 中， D, E 分別是 AB 和 AC 的中點。

求證： $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$ 。

證明：(面積法)

連結 BE 和 CD 。

$\because CD$ 是 $\triangle ABC$ 的中線，



$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}。$$

同理， $S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ ，則 $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BCE}$ 。

又 $\because \triangle BCD$ 和 $\triangle BCE$ 有等高（等底），

$$\therefore DE \parallel BC。$$

另一方面， ED 是 $\triangle ABE$ 的中線，

$$\text{則 } S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCE}。$$

又 $\because DE \parallel BC$ ， $\therefore \triangle BDE$ 和 $\triangle BCE$ 有等高，

$$\text{從而， } DE = \frac{1}{2} BC。$$

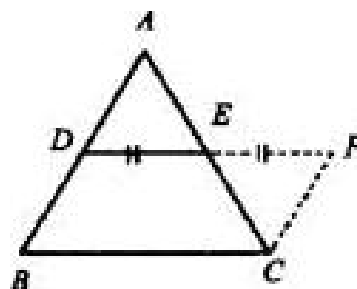
評注：這是簡單直接利用面積的方法，幾乎兩步證畢，方法簡約而別致。

證明法四：嬗法

已知： DE 是 $\triangle ABC$ 的一條中位線

求證： $DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2} BC$

證明：延長 DE 到 F ，使 $DE = EF$ ，連結 CF



因為 $\angle AED = \angle CEF$ 〈對頂角〉

$$DE = EF$$

$AE = EC$ 〈E為AC的中點〉

所以 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ 〈邊角邊〉

因為 $\angle DAE = \angle FCE$ 〈全等三角形，對應角相等〉

所以 $AD \parallel FC$ 〈內錯角相等，兩直線平行〉

且 $AD = FC$ 〈全等三角形，對應邊相等〉

又因為 $AD = DB$ 且 $AD \parallel DB$

所以 $BD \parallel FC$ 且 $BD = FC$

又因為 $DE \parallel DF$ 且 $DE = \frac{1}{2} DF$

所以 $DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2} BC$

評注：這是利用作三角形，全等三角形性質的方法，方法簡單。

證明法五：峰法

已知： $AD = DB$ ， $AE = EC$

求證： $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2} BC$

作 AF 垂直 BC ， DG 垂直 BC ， EH 垂直 BC 。

$\angle BGD = \angle BFA$

$DG \parallel AF$

$\angle BDG = \angle BAF$ ， $\angle B = \angle B$

$\triangle BGD$ 相似 $\triangle BFA$

$DG/AF = 1/2$ ，同理可證， $EH/AF = 1/2$

$DG = EH$ ， $DG \parallel EH$

$DGHE$ 是平行四邊形

$DE \parallel GH$ ， $DE = GH$

$DE \parallel BC$

$\angle ADJ = \angle DBG$

$\triangle ADJ \cong \triangle DBG$ (A.S.A.)

$DJ = BG$ ，同理可證， $JE = HC$ ，

因為 $DE = GH$

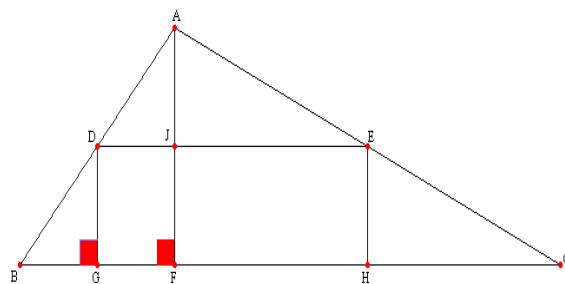
所以 $BG + HC + DE = BG + HC + GH$

$DJ + JE + DE = BC$

$2DE = BC$

$DE = \frac{1}{2} BC$

評注：這是作三條高，得到三矩形，利用全等三角形性質和矩形方法，方法簡單易明。



證明法六：柱法

已知：D、E 分別為 $\triangle ABC$ 上 AB 邊及 BC 邊中的中點。

求證：DE//BC 且 $DE = \frac{1}{2}BC$

證明：延長 DE 至 F，使 EF=DE，連結 AF，FC，CD，

因為 AE=CE，DE=EF，

所以四邊形 ADCF 為平行四邊形

所以 FC//AD 且 FC=AD，

因為 D 為 AB 中點，

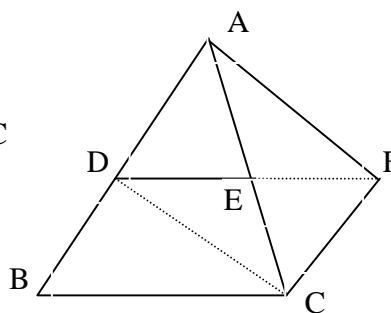
所以，BD=AD=FC 且 BD//FC，即 AD//FC

所以 BCFD 為平行四邊形，

所以 DF//BC 且 DF=BC

因為 $DE = \frac{1}{2}DF$ ，

所以 $DE = \frac{1}{2}BC$ 且 DF//BC



評注：這是最簡單直接利用平行四邊形的判定和性質，幾乎兩步證畢，方法簡潔而優雅。

證明法七：威法

已知：三角形 ABO，C 為 OA 的中點，D 為 BA 的中點。

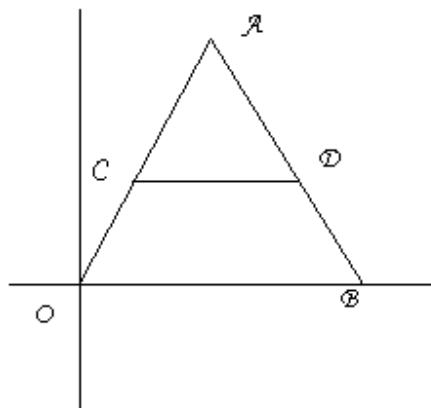
求證：CD 平行於 OB 及等於 OB 的一半

證：設點的座標 O(0,0)、A(x₀,y₀)、B(b,0)

則中點 C 及 D 的座標為

$$C\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right), D\left(\frac{x_0+b}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$$

$$OB = \sqrt{(b-0)^2 + (0-0)^2} = b$$



$$CD = \sqrt{\left(\frac{x_0 + b}{2} - \frac{x_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{2} - \frac{y_0}{2}\right)^2} = \frac{b}{2}$$

得到 CD 等於 OB 的一半，

又 OB 所在的直線斜率為 0

CD 所在的直線斜率為 0

故 CD 平行 OB，證畢。

評注：這是最簡單翻譯座標，通過解析幾何的方法，幾乎兩步證畢，方法簡潔而漂亮。

證明法八：減法

已知：三角形 ABC 中，AD=BD、AF=FC

$$\text{求證：} DF \parallel BC \text{ 且 } DF = \frac{1}{2} BC$$

證：(1)作過 C 點 CF 平行 AB，作過 A 點 AF 平行 BC，CF 和 AF 交於 F，且 G 點為 CF 的中點。(作法)

(2)因為 ABCF 為一平行四邊形(作法)，AB=FC, AD=BD，G 點為 CF 的中點。則 AD=FG

(3)所以 ADGF 為一平行四邊形 (AD=FG, AD//FG)

(4)同理 BDGC 為一平行四邊形

(5)得 AF//BC//DG

$$DG = BC = AF$$

(6)因為 1. $\angle AFD = \angle CFG$

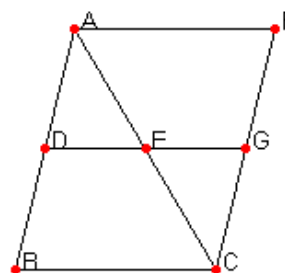
$$2. AF = FC$$

$$3. AD = CG$$

(7)所以三角形 ADF 和三角形 CGF 為全等三角形

(8)DF=FG

$$(9) DF = \frac{1}{2} DG = \frac{1}{2} BC \quad (\text{BDGC 為一平行四邊形})$$



評注：這是利用作平行四邊形，全等三角形性質的方法，方法稍繁。

證明法九：浩法

已知：三角形 ABC，DE 為 AB、AC 邊上的中點。

求證： $DE = \frac{1}{2} BC$ ，且 $ED \parallel BC$

證明：

過 E 點作 AB 的平行線 MN，過 A 點作 BC 的平行線 AM

則四邊形 AMNB 為平行四邊形（作法）

$\therefore AM \parallel BN$ ，即 $AM \parallel BC$ ，

即 $\angle AME = \angle CNE$

又 $\angle AEM = \angle CEN$

$\therefore AE = EC$

\therefore 三角形 AME 和三角形 CNE 全等(AAS)

即 $AM = NC$

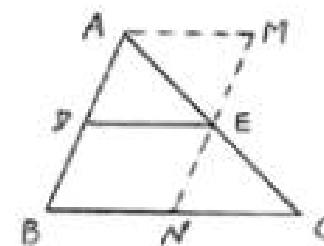
$ME = EN$

$\therefore AB = MN$ ，且四邊形 DENB 和 AMED 也為平行四邊形

即 $DE \parallel AM \parallel BC$

$\therefore AM = DE = BN = NC$

即 $ED = \frac{1}{2} BC$



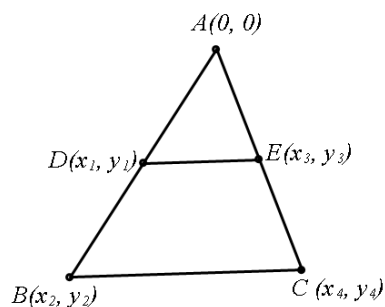
評注：這是利用作平行四邊形，全等三角形性質的方法，方法和證法三類似，稍繁。

證明法十：強法

已知： $\triangle ABC$ ， $AD = DB$ ， $AE = EC$

求證： $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2} BC$

證：設點



$A(0,0)$ ， $AD = (X_1, Y_1)$ ， $AB = (X_2, Y_2)$ ， $AE = (X_3, Y_3)$ ， $AC = (X_4, Y_4)$

$$\therefore DE = (X_3 - X_1, Y_3 - Y_1), BC = (X_4 - X_2, Y_4 - Y_2)$$

$$\therefore AD = DB, AE = EC \text{ (已知)}$$

$$\therefore 2X_1 = X_2, 2Y_1 = Y_2, 2X_3 = X_4, 2Y_3 = Y_4$$

$$\Rightarrow 2DE = BC$$

$$\text{即 } DE = 1/2BC$$

$$KDE = \frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1} = \frac{2(X_3 - X_1)}{2(Y_3 - Y_1)} = \frac{X_4 - X_2}{Y_4 - Y_2} = KBC$$

$$\therefore DE \parallel BC$$

評注：這方法和上面類似，翻譯座標，通過解析幾何的方法，兩步證畢，方法簡潔。

證明法十一：豪法

命題：已知 D, E 分別為 $\triangle ABC$ 的中點，試求證 $DE \parallel BC$ 且 $DE = BC/2$ 。

作法：如圖，作線段 AB, AC 的垂直平分線，垂足分別為 D, E，且交點為 O。

作線段 AD, AE 的垂直平分線，垂足分別為 D', E'，且交點為 O'。

連結 OD, OE, OB, OC。

證明：考慮 四邊形 AD'O'E' 及四邊形 ADOE

顯然 四隻對應內角相等，得知它們是相似四邊形，

而且 A, O', O 三點共線。

再考慮 $\triangle AD'O'$ 及 $\triangle ADO$

顯然 D'O' 平行 DO，則三隻對應內

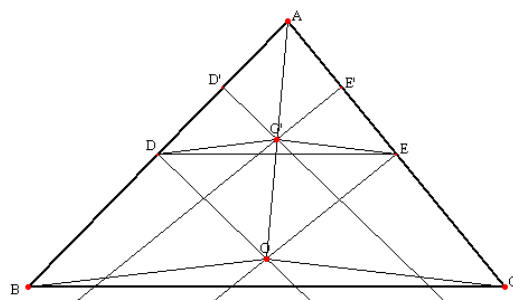
角相等，得知它們是相似三角形，

$$\text{而且 } \frac{AO'}{AO} = \frac{AD'}{AD} = \frac{1}{2}。$$

由於 O', O 分別為 $\triangle ADE$ 及 $\triangle ABC$ 的外心，構作 $\triangle ADE$ 及 $\triangle ABC$ 的外接圓

有 $O'A = O'D = O'E, OA = OB = OC$ ，

$$\text{並由此得出 } \frac{O'D}{OB} = \frac{O'E}{OC} = \frac{1}{2} \text{ --- (1), } \angle DOE = \angle BOC = 2\angle A \text{ --- (2)}$$



結合(1)、(2)得出： $\triangle O'DE \sim \triangle OBC$ ，

而且
$$\frac{DE}{BC} = \frac{O'D}{OB} = \frac{1}{2}$$
,

$\angle O'ED = \angle OCB$

另外，由於 $\triangle O'EA$ 與 $\triangle OBC$ 為有公共底角的等腰三角形

得出 $\angle O'EA = \angle O'AE = \angle OCA \Rightarrow \angle AED = \angle ACB \Rightarrow \boxed{DE \parallel BC}$

命題得證。

評注：該方法不構作任何與三角形邊的平行線來完成證明方法，利用了外心定理，2次利用相似性質，方法較其他方法較繁。

學生課堂解答，見附圖 2，圖 3，圖 4，圖 5。



圖 2 澳門大學學生對三角形中位線定理的推導課堂白板

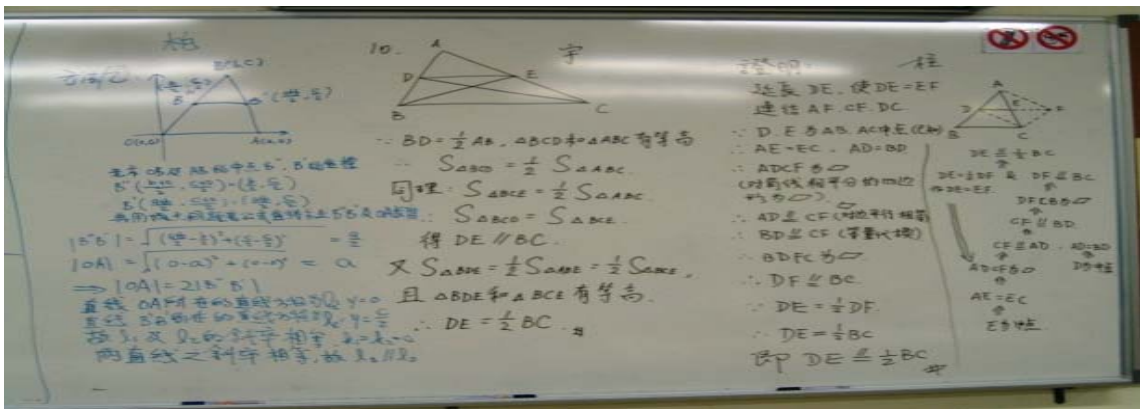


圖 3 澳門大學學生對三角形中位線定理推導課堂黑板圖

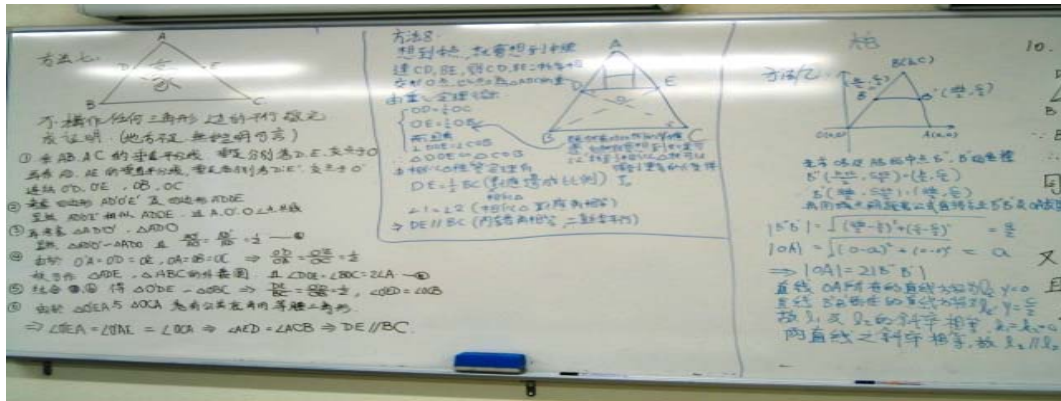


圖 4 澳門大學學生對三角形中位線定理推導課堂黑板圖

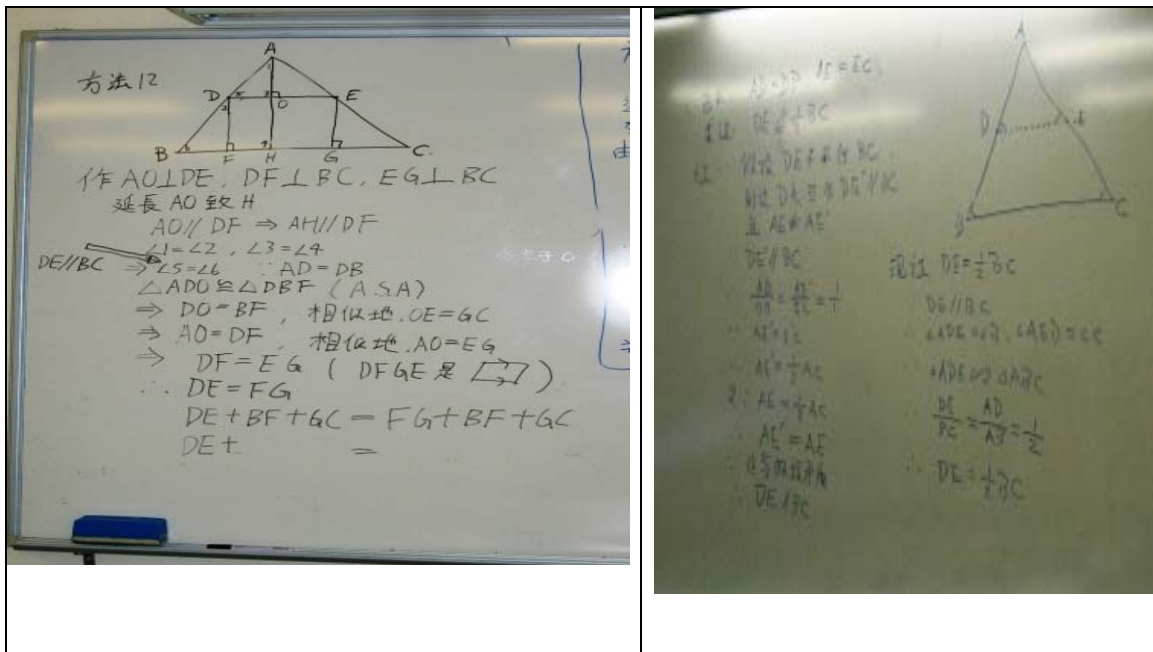


圖 5 澳門大學學生對三角形中位線定理推導課堂黑板圖

就證明方法而言，筆者認為前七種方法，都不超過四步，方法既精煉、簡潔又優雅！其中，證明法一：清法是最簡單直接利用相似的方法，兩步證畢，方法最簡潔而漂亮，不添任何輔助線。而證明法二：賢法直接利用相似的方法，證明法三：宇法直接利用面積比的方法，兩步證畢，方法既簡捷又優雅。而證明法四：嬋法，利用作三角形，全等三角形性質的方法，方法簡單，是一些教科書的方法。證明法五：峰法作高，得到矩形，借助全等性質，方法簡單，明瞭，證明法六：柱法，是簡單直接利用平行四邊形的判定和性質，兩步證畢，也是一些教科書的方法。而證

明法七：威法，簡單翻譯座標，通過解析幾何的方法，方法既簡潔又具普遍意義，事實上，很多平面幾何定理，都可以通過解析幾何的方法重新證明。其餘證明法八：斌法，證明法九：浩法，證明法十：強法，證明法十一：豪法，略微繁瑣，但能夠保持獨立思考，積極探索的精神仍然可佳。

就證明興趣而言，我們發現一開始，學生直接按照記憶，直接書寫下教科書的證明思路，無任何證明興趣。2個小時過後，每個學生都在尋找自己的方法中，對中位線定理重新迸發證明的激情，學生非常踴躍地展示自己的解法，每個學生深深陶醉發現證明的喜樂之中，每個學生對三角形中位線定理推理，都深深著迷，令人難忘。更為重要的是，學生通過參與公式的證明，感受到創造數學定理證明的源動力，我們注意到他們的興趣，建立在他們解法創造性上。

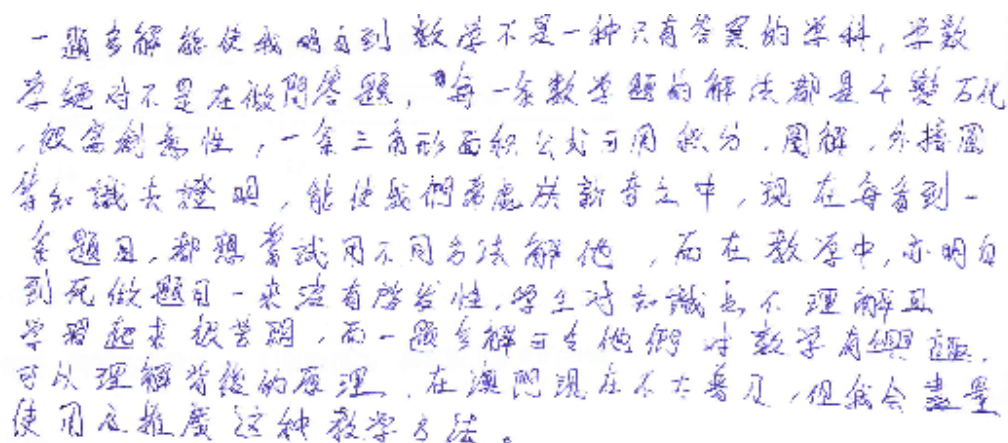
“一題多解”是中小學老師較為常用的教學方法，幾乎人人熟悉，但我們發現，但教師只是下意識地偶爾地使用。當我們昇華為理論層面，去指導教學實踐，發現原來實踐可以走更遠。14名普通澳門的大學生能給出三角形中位線定理，十多種創新解法，並對中位線定理證明樂此不疲，深深改變了他們對三角形中位元線定理認識，數學學習興趣的改變立竿見影。在推導的課堂瞬間，學生不斷創造新的證明方法，證明的同學感到前所未有的興趣和滿足，其餘同學紛紛舉起大拇指！祝賀發現新的證明方法的同學，全班一起融入創造、創新的喜樂氣氛之中，我自己也被這種氣氛感染。的確，極少文獻給出如此多方法證明三角形中位線定理，本節課不僅僅充分地發揮學生的創造能力，而且學生們因為親自發現到了數學本身的魅力，又激發了學生學習數學的興趣！真是一舉兩得。

經過幾節“一題多解”課的訓練，同學在課程總結體會中，告訴我他們的改變：

“我現在每當解題，都會嘗試看看還有沒有其他解法”，“我對數學有了全新的認識”！“我對數學重新有了興趣”！

一題多解能主動去令學生訓練自己的思維及創新的能力
令我自己對數學學習產生前所未有的興趣

“「一題多解」能使我明白數學不是一種只有答案的學科,學數學絕對不是在做問答題,每一條數學題的解法都是千變萬化,很富創意性。一條三角形面積公式可用圖解、外接圓等知識去證明,能使我們常處於新奇之中,現在每看到一條題目,都想嘗試用不同方法解它,而在教學中,亦明白到死做題目一來沒有啟發性,學生對知識不理解且學習起來很苦悶,而「一題多解」可令他們對數學有興趣,可以理解背後的原理,在澳門現在不太普及,但我會盡量使用及推廣這種教學方法”。



一題多解能使我明白到數學不是一種只有答案的學科,學數學絕對不是在做問答題,每一條數學題的解法都是千變萬化,很富創意性,一條三角形面積公式可用圖解,外接圓等知識去證明,能使我們常處於新奇之中,現在每看到一條題目,都想嘗試用不同方法解他,而在教學中,亦明白到死做題目一來沒有啟發性,學生對知識不理解且學習起來很苦悶,而一題多解可令他們對數學有興趣,可以理解背後的原理,在澳門現在不太普及,但我會盡量使用及推廣這種教學方法。

學生的這些體會,使我感到巨大安慰,數學興趣的可以後天培養嗎?這次課後,筆者對教師的數學興趣這道數學教育的難題,看到一線曙光。

事實上,中位線定理是一個基礎定理。但多數教材都是簡單推導,引出定理,然後就通過練習,套用定理。這種採用死記硬背的方法,和上述的嘗試比較,學生少了親自發現定理證明的魅力與機遇,其實在中小學教材中,數學的大部分定理、概念、公式的引入,均採用死記硬背的方法,學生少了親自發現到了數學本身的魅力機遇,剝奪了數學興趣培養的機會,實在可惜。

肆、 幾點反思

數學興趣培養無處不在

多年來，課程範圍裏的數學問題，大多為掌握課程內容而設計，問題的答案封閉，能夠吸引學生，激發學生的數學衝動，少之又少，結合課程內容培養興趣的內容，則少之又少，而數學興趣培養，如老虎啃天，無處下口。筆者研究發現其實任何公式、定理、例題、問題都可嘗試一題多解，都可作為數學興趣培養的載體，從這個角度而言，螺旋變式課程的一題多解理念，使得數學興趣培養無處不在，正是一件好事。

數學興趣培養枯木再逢春之可能

這次嘗試使我看到原本對數學害怕、甚至恐懼，對數學沒興趣的人，幾個能力稍弱學生，也能把握了定理證明的精髓，給出創造性解法，並對證明重新產生興趣，平凡學生卻給出不平凡的創造解法。的確一些方法不夠新穎，仍應該表揚，畢竟自己思考的成果，新生數學興趣的嫩芽，值得呵護。

捨得給興趣“生長”時間

以往數學教學有個誤區，不捨得給“思考”時間，課堂“思考”時間總有點覺得浪費，不夠有效率，而事實上，大部分教學沒有給出學生探索證明的時間，大部分證明方法由老師“教”，課堂“教方法”時間才真的浪費學生“想方法”的時間，替代了“想”的時間，興趣“生長”的時間，真的不夠有效率，把學生思考時間，變成記住老師解法的時間。雖然教改提及需要重學輕教，但教學也總是基於教學任務，限於固定時間，講完，才有“效率”，完成教學任務，給“思考”時間，興趣“生長”時間，遠遠不夠。這堂課雖然比以往教學多了些時間思考，但我們注意到，證明“不講勝於講”，教學給“思考”時間，興趣“發生”時間，創造“生長”的空間，教學可能還原學生的創造力之教學根本，螺旋變式課程設計的“一題多解”理念，增大了學生探索定理證明的解法空間，還原學生原本的數學創造興趣，貼近了數學教學的最高境界。

這裏願意以一首短詩結束全文。

一題多解，我的秘方

-----2008 年 6 月 20 日根據夢中所記

讀書時

一題多解是我作秀的秘方

展示特別解法

帶我早把數學的自信品嚐

工作時

一題多解是我教學的秘方

展示特別解法

學生齊齊步入

數學創造的殿堂

親愛的同事

一題多解是數學興趣的秘方

展示特別解法

數學魅力

定要百花齊放

參考文獻

- 波利亞 (1982)。歐陽絳譯，《數學的發現》。北京:科學出版社。 -
- 劉雲章 (1992)。《數學解題思維策略—波利亞著作選講》。長沙: 湖南教育出版社。
- 孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙 (2006)。問題變式，結構與功能的統一。《課程教材教法》，第五期，頁25-31。
- 孫旭花 (2007a)。《螺旋變式數學課程設計：理論與實踐》。香港：香港中文大學未發表的博士論文。
- 孫旭花 (待刊)。一題多變：中國數學課程問題概念組織之優勢----中美課程分數除法比較的發現
- 孫旭花、黃毅英、林智中 (2007b)。變式的角度，數學的眼光。《數學教學》，第10期。
- 孫旭花 (2007 c)。螺旋變式數學課程之還原理念簡介 -----以青浦變式教學中“以新歸舊”概念理解教學實踐為例。臺灣數學教師電子期刊 2007 年 12 期
<http://www.math.ntnu.edu.tw/~tame/tameteachers/TJMT12>
- Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wong, N. Y., Lam, C. C., & Sun, X. (2006). The basic principles of designing bianshi mathematics teaching: A possible alternative to mathematics curriculum reform in Hong Kong [in Chinese]. Hong Kong: Faculty of Education and Hong Kong Institute of Educational Research, The Chinese University of Hong Kong.
- Wong, N.Y. (2006). From “Entering the Way” to “Exiting the Way”: In Search of a Bridge to Span “Basic Skills” and “Process Abilities”. In F.K.S. Leung, G-D. Graf, & F. J. Lopez-Real (Eds.), Mathematics Education in Different Cultural Traditions: The 13th ICMI Study (pp. 111-128). New York: Springer.
- Wong, N. Y. (2007). Confucian Heritage Cultural learner’s phenomenon: From “exploring the middle zone” to “constructing a bridge”. Regular lecture, the Fourth ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematical Education, Penang, Malaysia, 18th to 22nd, June.