



第壹章 緒論

從數學史的觀點來看，數學發展是以某些著名的問題為核心，為了解決這些問題所引發的定義、公設、定理與證明所建構出來的(Halmos, 1980)；這意味數學發展和解題活動息息相關。數學解題是八十年代美國數學教育中相當重要的議題(NCTM,1980；Hembree, 1992；Schoenfeld, 1992；Lester, 1994)，至今仍影響甚深(Nunokawa, 2005)，近三十來的解題研究深入探討各種影響解題活動的因素，對於紙筆解題行為已經有充分的認識；隨著科技的日新月異，電腦媒體融入教學活動，無須透過符號語言(symbolic language)，使用者直接透過滑鼠點選與拖曳特性和電腦互動的動態幾何軟體於九十年代初期問世(Yerushalmy & Chazan, 1990)，藉助電腦軟體所提供動態視覺與測量計算功能，在動態幾何環境下的作圖問題(Lopea-Real & Leung, 2006)、幾何教學方式(Laborde, 2001)、證明活動的發展(Hanna, 2000；Marrades & Gutierrez, 2000；Mariotti, 2000；Mariotti, 2001)與解題活動的進行(Healy & Hoyles, 2001)等議題均引起數學教育界的熱烈討論。

基於研究者個人興趣及教學實務上的動機，擬探討動態幾何環境中幾何解題的歷程，研究者試圖結合解題研究與科技媒體的發展脈絡，從中檢視兩種解題情境下，解題歷程的差異與相近之處；透過本研究能夠對於不同情境的解題行為有更深入的認識，檢視在何種條件下，GSP 可能對於解題發揮效用；期望本研究對於教學實務與數學教育有所貢獻。

本章有四節，第一節介紹研究背景與動機，第二節說明研究目的與問題，第三節為名詞解釋，第四節說明研究範圍與限制。

第一節 研究背景與動機

數學解題雖然有許多不同的面向，它是八十年代美國數學教育中相當重要的議題(NCTM,1980；Hembree, 1992；Schoenfeld, 1992；Lester, 1994)，數學解題是中學數學的焦點(NCTM, 1980)，數學解題幾乎成為『做數學』的同義字(NCTM,1989)。

數學解題是一個複雜的思考過程(Goldin, 1992)，過程中，解題者使用自身的數學知識試圖使問題情境變得有意義，並企圖從問題情境中獲得新訊息，直到它能解決其中的張力與模糊 (Nunokawa, 2005)。Polya(1957)將解題過程分成四階段：了解問題(understanding the problem)、擬定計劃(devising a plan)、執行計劃(carrying out the plan)及回顧(looking back)。Polya 的解題模式影響八十年代的解題研究 (Zambo & Follman, 1994)，九十年代有多位學者回顧解題文獻指出解題者的知識與信念、啓思法的應用、執行解題計畫過程的監控以及社會文化因素為主要影響解題成效的重要因素(Hembree, 1992；Schoenfeld, 1992；Lester, 1994)。數學解題的歷程並非是線性的，而是在猜測、證明與反駁中循環進行，直到解題者所擁有的知識能夠用以解決問題為止(Lakatos, 1976；Mason、Burton & Stacey, 1982；Carlson & Bloom, 2005；Nunokawa, 2005)。

幾何常常從兩個方向來考量，一是把幾何視為空間的科學，二是把幾何視為邏輯結構(Hershkowitz *et al.*, 1990)。幾何概念與圖形是伴隨產生的，Fischbein(1993)稱之為幾何概念與圖形的共生現象，圖形具象的特質與真實世界的形體相連結，以便於記憶，概念抽象的特質能於推理活動，利於解題與證明活動。由於幾何解題中常常需要畫圖(Polya, 1957；Schoenfeld, 1979, 1980；Mason *et al.*, 1982)，解題者透過視覺辨認圖形，觸發解題所需要的知識(Polya, 1957)，解題者以不同觀點看待圖形各部分，分解或增刪部份元素並嘗試有意義的重新組合，透過前述操弄圖形的方式而理解問題(Duval, 1998)，因此草圖會隨著理解問題而逐漸改變(Nunokawa, 1994)，無法以不同方式理解圖形，將無法從中提取更深入的解題資訊，則成為影響解題成效的重要關鍵(Hoz, 1981；Lawson & Chinnappan, 1994)。

再者，研究顯示強調邏輯面向的幾何學不足以回應當今學習者的需要(NCTM 1985)，不僅讓學生感到枯燥，甚至畏懼(Senk, 1985；Wu,1996；洪萬生，2003)。近年來，隨著科技發展，電腦軟體環境提供強大的視覺功能以及動態操弄圖形的平台，從視覺支援提供學習者進行幾何學習與解題的另類途徑。

許多學者提倡以探究活動與強調視覺面向為主的「新幾何學」(Balacheff,1993；Lopez-Real & Leung, 2006；De Villiers, 2006)，他們認為應透過科技幫助學生以視覺方式理解數學關係的動態改變，嘗試說明學習者亦能在動態幾何環境中學到以形式、公設與邏輯演繹法為主的幾何學，為了進一步說明傳統的演繹邏輯與以語音學為基礎的幾何知識表徵，如何在動態幾何環境中，重新被解釋與定義，學者們嘗試在電腦科技所形成的微世界(microworld)與形式抽象的概念世界中建立實驗與理論鴻溝之間的橋樑(Lopez -Real & Leung, 2006, p.665)。在這樣的時代氛圍下，數學教育界鼓勵學生在動態幾何環境的協助下，參與幾何解題或是涉及性質或特例的檢驗與證明(Pandiscio, 2002；Nunokawa & Fukuzawa, 2002；Santos-Trigo & Espinosa-Perez, 2002；Lange, 2002；Lopez-Real & Leung, 2006；Nunokawa, 2005)。

動態幾何環境能夠提供解題者豐富的數學視覺表徵，只要使用者具備和視覺數學表徵有關的先備知識以及系統認可的指令，即能透過軟體及電腦設備(滑鼠)與表徵對話或操弄表徵(Sedig & Sumner, 2006)，同時，透過軟體所賦予的各種功能，如：繪圖、測量與計算，展開猜測與檢驗等探索活動 (Balacheff & Kaput, 1996；De Villiers, 2004；Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000；Santos-Trigo & Espinosa- Perez, 2002)，而動態幾何環境能立即呈現實驗結果，具有偵錯與校正的功能。

另一方面，利用滑鼠以拖曳方式作圖提供有別於尺規作圖的另類途徑，動態幾何軟體重新引發數學教育界對於作圖問題的興趣 (Lopea-Real & Leung, 2006)；透過動態幾何軟體探尋滿足條件的位置或幾何關係，GSP 精確作圖的特性使得作圖結果接近題意所呈現的終極結果，在預知或接近答案的情況下，將改變解題途徑(Hadas *et al.*, 2000)；拖曳能讓學生在數秒鐘中能夠看到數個必要的例子且提供回饋，是傳

統紙筆解題中無法達到的效果 (Marrades & Gutierrez, 2000)。儘管如此，動態幾何環境中解題者雖能輕易看出數學性質，但可能因此扼殺證明的需求或是發展證明的學習機會(Laborde, 2000)。

動態幾何軟體加入的舊議題的幾何解題其媒體效應(Kaput & Thompson, 1994)為何？及動態幾何環境所提供豐富的視覺表徵以及立即呈現實驗結果等功能對於幾何解題歷程所造成的影響均是值得深入探討的議題。

除了受到上述思潮影響之外，實務上的體驗與省思亦是觸發本研究的重要原因。研究者在北縣一所私立教會學校擔任數學教職十三年，開授國三、高一及高二資優課程多年，課程中介紹托勒密(Ptolemy)定理、孟氏定理(Menelaus)定理、西瓦定理(Ceva)定理、蝴蝶定理與費馬點等幾何知識，感受到學生對於幾何課程中探究的過程與發現的結果感到好奇與驚嘆，對證明過程卻不感興趣，證明過程對於學生而言是一種儀式。同時，發現學生在解幾何問題時常常因為徒手畫圖之故，使得圖形不夠精確，無法從中獲得和解題有關的資訊，而放棄解題。因此，研究者也關心是否能透過幾何繪圖的輔助工具，使得繪圖精準且容易操作而有助於學生的探究與發現，進而對於解題與證明有所幫助。

在 1999 年十月至 2001 年二月，研究者有幸參與譚克平教授所主持的資優幾何課程計畫，以兩年時間編設幾何教材，並實施教學實驗，研究八位資優學生的解題歷程，從觀察中發現資優學生解幾何問題時能透過多種方式操弄表徵，如：剪裁、摺疊、黏貼、測量、製作模型等方式，願意反復嘗試，同時使用各種視覺策略，如：在圖上增刪輔助線、以顏色標示不同的區塊與重新畫圖，在解題過程中展現毅力，研究者從中思考動態幾何軟體與幾何解題的關係：如果在解幾何問題時，透過一套具有繪圖、剪裁、摺疊、黏貼、測量、模擬、以顏色標示區塊等功能的輔助軟體協助下，會不會增進資優生的解題效益呢？當研究者接觸到 *geometer's sketchpad* (GSP) 軟體時，發覺它具有上述功能，亦能提供座標化、測量與計算等功能，對於

解題者所做的猜測與檢驗，可立即回應，符合理論與實務上需求，是一種協助探究與發現的工具。

基於上述理論與實務背景，加上研究者親身的經驗，促使研究者想要了解在解題過程中使用動態幾何軟體(如：**GSP**)對於學生幾何解題的歷程與表徵問題方式及反思行為的影響。

第二節 研究目的與問題

本研究探討高二學生進行幾何解題時，使用 GSP 時其問題表徵、解題策略與過程以及反思行為的影響。爲了達到上述目的，本研究探討下列問題：

- 一、 比較使用與不使用 GSP 的解題時間？
- 二、 比較使用與不使用 GSP 的問題表徵方式？
- 三、 比較使用與不使用 GSP 的解題策略與過程？
- 四、 比較使用與不使用 GSP 的反思行為？
- 五、 比較使用與不使用 GSP 之問題表徵、解題策略及反思行為之交互作用？

第三節 名詞解釋

本研究需要定義下列名詞：

一、動態幾何軟體

動態幾何軟體指學習者能夠藉以繪製與操弄幾何圖形之電腦程式。透過此軟體，允許使用者直接移動頂點或邊等成分，改變原來物件在螢幕上的形狀或位置，當這些物件改變時，相關作圖、轉換或計算的結果也會在螢幕上自動更新，本研究中的 Geometer's Sketchpad 4.04 版(簡稱 GSP)即屬於這一類幾何軟體。

二、問題表徵

反應解題者理解問題情境的狀態與方式，觀察行為包括解題者所繪製的圖形、使用的數學符號與算式以及口語解釋與描述。

三、執行過程與策略

指解題者在解題過程中表徵的轉換以及解題策略的計畫與執行。解題策略則包括啓思策略、符號策略、視覺策略及 GSP 所提供之特殊策略。

四、反思行為

指解題者對於解題行為的覺知、過程的評估與校正行為。

五、幾何解題歷程

幾何解題歷程包含三個部分：解題過程中解題者之問題表徵、執行過程與策略以及反思行為。

第四節 研究範圍與限制

本研究的研究範圍界定如下：

- 一、本研究的研究對象為台北縣市三所學校之四名學生，具高數學學習成就、GSP 操作熟練以及具有參與科展經驗等特性，並非隨機取樣。
- 二、本研究之幾何問題依本研究需要特別設計，題目難度高且圖形複雜，並非高、國中教材中所涉及的幾何問題，內容為幾何變換、四點共圓、全等證明及平行線性質。
- 三、本研究之受測時間不限。

依研究範圍，研究結果之推論有下列限制：

- 一. 不能推論一般高二學生。
- 二. 不能類推高二課程中幾何或數學成績。
- 三. 不能類推幾何變換、四點共圓、全等證明及平行線性質以外的幾何內容。
- 四. 不能類推有時間限制的評量。