

## 第肆章 研究結果與討論

本章分爲五節，第一節到第四節針對本研究中四個幾何問題之解題表現進行逐題分析，第五節爲使用與不使用 GSP 之解題策略比較。

### 第一節 第一題解題表現與分析

文獻指出 GSP 除能夠精確作圖外，亦能提供視覺操弄的功能以探索問題情境。爲瞭解解題過程中，使用 GSP 是否較容易形成表徵進而成功解題，因此設計本題。題目如下：

銳角 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AH}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高， $T$ 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AT}$ 是 $\angle CAB$ 的內角平分線，若 $D, E$ 分別是 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 上的點， $\overline{TD}$ 垂直 $\overline{AB}$ 且 $\overline{TE}$ 垂直 $\overline{AC}$ ，試証：  
 $\angle AHD = \angle AHE$

本小節先說明問題特色，然後依序按解題時間、表徵與表徵轉換、過程策略、反思行爲等四個部分說明 GSP 組與非 GSP 組學生之解題表現。

#### 一、問題特色

本題解法大致如下：

1.  $\triangle ATD \cong \triangle ATE$  (ASA)，則  $\angle ATD = \angle ATE$  與  $AD = AE$ ；
2.  $A, D, T, E$  四點共圓(對角互補)且  $AT$  爲直徑；
3.  $A, H, T, E$  四點共圓(對角互補)且  $AT$  爲直徑；
4. 由 2 與 3 可知  $A, D, H, T, E$  五點共圓；
5. 由 4， $\angle ATD = \angle AHD$ (同對  $AD$  弧)且  $\angle ATE = \angle AHE$ (同對  $AE$  弧)

6. 由 1，AD 弧=AE 弧(等弦對等弧)，因此  $\angle AHD = \angle AHE$ 。

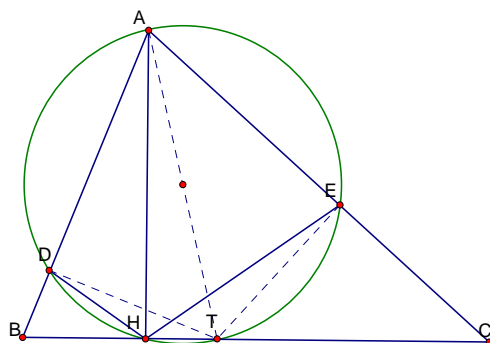


圖 4-1-1：第一題的關鍵表徵：A,D,H,T,E 五點共圓

本題的關鍵在於解題者能否形成 A,D,H,T,E 五點共圓表徵，並以此解題；五點共圓是推出  $\angle AHD = \angle AHE$  的前提。從邏輯演繹的觀點來看，四點共圓表徵是五點共圓表徵的基礎，解題者應先確認四點共圓之後，才能推得五點共圓表徵。因此將「確認四點共圓表徵」、「確認五點共圓表徵」及「解題完成」等時間做為本題關鍵時間。本題有兩個部分需要精確作圖，一是 HD、TD、HE 與 TE 四條線段可能產生視覺上的干擾，造成解題困難；二是五點共圓圖形，可能不易精準繪製從而產生誤解。

## 二、解題時間

彙整四位解題者之解題時間，如下表 4-1-1 所示：

表 4-1-1：第一題 GSP 組與非 GSP 組解題關鍵點出現之時間

解題關鍵點	GSP 組			非 GSP 組		
	甲生	乙生	平均	丙生	丁生	平均
確認四點共圓表徵	2:48	15:21	9:01	55:29	47:34	51:32
確認五點共圓表徵	4:02	20:07	12:05	57:16	60:46	59:01
解題完成	6:35	22:16	14:26	57:50	67:59	62:55

由上表可知各解題者與各組之解題表現結果，從中發現下列事實值得探討：

1. 非 GSP 組的解題平均時間比 GSP 組的解題平均時間約多 49 分鐘，主要原因是非 GSP 組確認四點共圓關鍵表徵的平均時間比 GSP 組的平均時間約多 43 分鐘；
2. GSP 組確認五點共圓表徵到解題完成的平均時間短且一致，顯示 GSP 能提供清晰的視覺表徵，利於解題；
3. 丙生確認四點共圓表徵的時間是四個人最慢的，但從確認四點共圓表徵到解題完成僅約 2.5 分鐘，卻是四個人最快的，是因為丙生在形成四點共圓表徵過程中，發現許多和共圓有關的事實，其對於五點共圓的發現與利用同弧證明等角的步驟預先留下伏筆，因此能確認四點共圓表徵後迅速解題；
4. 丁生的表現：「確認四點共圓表徵到五點共圓表徵的時間差」及「確認五點共圓表徵到解題完成的時間差」是四個人最長的，是因為丁生確認四點共圓表徵之後，仍重新檢查一遍，再找出第二組四點共圓之後，才確認五點共圓表徵；在形成五點共圓表徵之後，由於操作視覺策略之故，造成延宕。因此，丁生之三個關鍵時段的時間差較其他受測者長；
5. 甲生與乙生確認四點共圓表徵的時間差距大(約 13 分鐘)，係因乙生嘗試以相似、旋轉等方式表徵題意失敗後，才根據經驗考慮以圓的觀點解題，甲生利用專家知識說明 AT 是直徑之後，即形成四點共圓表徵，因此時間差距大。
6. 乙生確認四點共圓表徵到五點共圓表徵的時間差(5 分鐘)較同組甲生來得多(約為 4 倍)，係因為乙生約花 3 分鐘重組圖形關係，發現 T 可能在圓上，約花 1.5 分鐘實施拖曳檢驗而確認之，甲生直接使用專家知識，則不需要經過這個程序。

### 三、表徵與表徵轉換

本段分成三部分，第一部分說明 GSP 組與非 GSP 組所產生表徵數量與類型的差異，第二部分說明 GSP 組與非 GSP 組所產生表徵轉換之類型的差異，第三部分說明使用 GSP 有助於關鍵表徵(五點共圓)的形成。

#### (一) 表徵

解題過程中所產生的表徵數量，如表 4-1-2 所示：

表 4-1-2：第一題 GSP 組與非 GSP 組在各表徵類型之次數分配

表徵類型	GSP 組			非 GSP 組		
	甲生	乙生	平均	丙生	丁生	平均
草圖	2	3	2.5	1	1	1
符號關係	0	0	0	1	0	0.5
演繹陳述	1	0	0.5	6	4	5
總計	3	3	3	8	5	6.5

根據表 4-1-2 之數據，有下列發現：

#### 1. 使用 GSP 所產生表徵數目較少

從表 4-1-2 得知，使用 GSP 解題者所產生的表徵數目較不使用 GSP 的解題者平均數目少 3.5 次。表徵數目少的原因在於使用 GSP 有助於形成關鍵表徵，非 GSP 組的解題者需要在形成四點共圓表徵之前，對於問題情境進行更深入的理解，以丙生為例，在形成四點共圓表徵之前，至少要產生 5 個表徵做為產生共圓表徵的背景知識(表 4-1-3)，相較之下，以乙生(GSP 組)為例，當作出 A,D,H 三點的外接圓之後，圖形顯示題目中另外兩個點 T,E 都落在圓上(圖 4-1-2A)，GSP 直接呈現五點共圓的資訊，不需要形成其他表徵做為五點共圓的知識基礎，因此 GSP 組所產生的表徵數量少。

2.非 GSP 組之解題者多以演繹陳述呈現表徵，GSP 組之解題者多以草圖呈現表徵

由於本題的圖形線段重疊，在視覺干擾下，不使用 GSP 的解題者必須利用知識系統或是其他輔助方式表徵問題，在符號表徵遭遇相當困難時，表徵方式以演繹陳述方式居多(表 4-1-2)。

不使用 GSP 的解題者是一步一步揭露四點共圓的資訊，在沒有輔助視覺系統的支援下，解題者需要應用豐富的知識系統以及其他能力形成表徵，因此形成四點共圓表徵的過程是轉折迂迴且多為演繹陳述。相較之下，GSP 繪圖的結果直接呈現解題所能用到的資訊，解題者利用 GSP 所提供各種功能操弄圖形即能形成關鍵表徵，因此產生關鍵表徵的數量少且以圖形居多。

以丙生(非 GSP 組)為例，將原命題轉換成證明「 $\angle ADH$  和  $\angle AEH$  的差為  $\angle B$  和  $\angle C$  的差」(表徵  $B_1$ )之後即嘗試從兩個觀點理解題意，因此產生的表徵可分成兩類(相關符號與說明請參見表 4-1-3)：第一類在於理解  $\angle ADH$  和  $\angle AEH$  的關係( $B_3$  與  $B_5$ )；第二類則以數學性質或理論解譯  $\triangle ADH$  與  $\triangle AEH$  的關係，如： $SSA$  性質( $B_2$ )與正弦定理( $B_4$ )，其中  $B_1, B_2, B_3, B_4$  以演繹陳述呈現， $B_5$  以符號關係呈現。

相較之下，GSP 繪圖的結果直接呈現解題所可能用到的大量資訊，解題者僅提取部分資訊做為表徵之用，在形成命題檢驗失敗之後，仍試圖提取其他資訊，繼續表徵問題，直到形成合適表徵或是決定放棄，因此在解題過程中多以草圖呈現表徵；但 GSP 精確作圖的結果，使得繪圖結果與問題情境所呈現的事實非常接近，因此經過各種操弄與實驗，蹦出解題的火花。

以乙生為例，約在解題開始後 4 分 10 秒繪完圖形並透過拖曳調整圖形，之後除了進行 1 次測量角度與連接 HD 與 HE 之外，並沒有對於圖形進行任何的操作，一直到 13 分 25 秒才有動作，這段時間內乙生透過觀察，嘗試以對稱、旋轉與相似表徵問題但均告失敗，根據過去解題經驗，決定再次從弧度觀點表徵問題，他說：

120204 因為記得以前好像也曾經碰過類似的東西 (2007,3,21)

120061 想看看可不可以從弧度下去想 (2007,3,21)

表 4-1-3：第一題丙生（非 GSP 組）的表徵轉換過程

表徵概述	表徵形式	表徵轉換	備註
A：依題意直譯成圖	1-1		丙生以符號與演繹方式理解 $\triangle ADH$ 與 $\triangle AEH$ 關係，歷時約 48 分鐘。此階段對於四點共圓表徵助益很大，產生 $B_5$ 之後約 37 秒之後，產生新表徵 C。
$B_1$ ：以演繹方式陳述 $\angle ADH$ 和 $\angle AEH$ 的差即為 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的差	1-3	2-1-1	
$B_2$ ：以 SSA 性質說明 $\triangle ADH$ 與 $\triangle AEH$ 關係	1-3	2-1-3	
$B_3$ ：以演繹方式陳述 $\angle ADH$ 和 $\angle AEH$ 的差為 $\angle 1 + \angle 2$	1-3	2-1-3	
$B_4$ ：以正弦定理說明 $\triangle ADH$ 與 $\triangle AEH$ 關係	1-3	2-1-3	
$B_5$ ：以符號表示 $\angle AHD$ 與 $\angle AHE$ 的角度	1-2	2-1-3	
C：以演繹方式說明 ADTE 四點共圓	1-3	2-1-2	
D：以演繹方式說明 ADHTE 五點共圓（成功解題）	1-3	2-1-1	

註：表徵形式與轉換代碼請參見表 3-6-1 及 3-6-2

在繪圖完成之後，解題過程即呈現觀察圖形→視覺確認→質疑→拖曳確認的循環。在作出 A,D,H 三點的外接圓之後，圖形顯示題目中另外兩個點 T,E 都落在圓上，局勢逐漸明朗，約經過 1 分 30 秒作圖之後，展開一次循環，乙生發現 A,D,H,E 四點共圓，約 4 分鐘之後，開始另一次循環，發現 T 可能會落在 A,D,H,E 四點所決定的圓上，而開啓成功解題之門。以下口語資料可說明形成第二次循環—發現到確認五點共圓表徵的過程：

(乙生，2007,3,21)

120088 喔！看到了！[觀察]

120094 T 應該也會在，也會在圓上[確認]

120096 是嗎 [質疑]

120097 T 應該也會在圓上 [利用拖曳檢驗確認]

120099 哇 天啊 [利用拖曳檢驗確認]

120100 嗯 T 會在圓上 [拖曳檢驗完成]

## (二) 表徵轉換

針對解題過程中所產生的表徵換數量與類型，如表 4-1-4 所示：

表 4-1-4：第一題 GSP 組與非 GSP 組在各表徵轉換之次數分配

表徵轉換類型	GSP 組			非 GSP 組		
	甲生	乙生	平均	丙生	丁生	平均
等價變換	1	0	0.5	2	1	1.5
整併	1	1	1	1	1	1
突變	0	1	0.5	4	2	3
總計	2	2	2	7	4	5.5

根據表 4-1-4 之數據，有下列發現：

1. GSP 組表徵轉換次數較少，以「整併」型表徵轉換較多

由於 GSP 組所產生的表徵數目平均只有 3 次(表 4-1-2)，因此表徵轉換的次數較少，平均只有 2 次(表 4-1-4)。表徵轉換的形式以「整併」型較多(各 1 次)，均發生於四點共圓表徵轉換成五點共圓表徵時，此過程中，解題者必須在四點共圓的基礎上，整合 GSP 所提供的視覺資訊，才確認五點共圓表徵。

2. 非 GSP 所產生表徵轉換方式則以「突變」型最多

「突變」型表徵轉換以丙生產生最多(4 次)，這是由於解題者採用兩種策略：「以符號建立 $\angle ADH$  與 $\angle AEH$  的數學關係」與「以數學性質或理論探求 $\triangle ADH$  與 $\triangle AEH$  的關係」解決問題，當某一種策略受阻時，丙生「回頭」尋找先前表徵的部分資訊，

企圖從中突破困境，表徵轉換的過程呈現“跳躍”的情形顯示解題者輪流以兩種策略理解問題的結果(圖 4-1-3)。

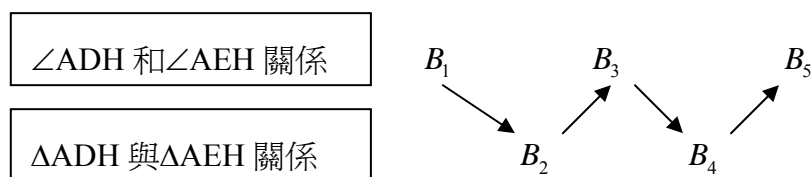


圖 4-1-2：丙生解題過程中表徵轉換呈現跳躍方式(表徵類型見表 4-1-3)

### (三) GSP 有助於關鍵表徵（五點共圓）之形成

GSP 組在確認四點共圓表徵的平均時間上較非 GSP 組約快 42 分鐘(表 4-1-2)，從確認形成四點共圓表徵與五點共圓表徵之間的平均時間上，GSP 組較非 GSP 組約快 4 分 15 秒(表 4-1-2)。

GSP 繪出四點共圓的圖和五點共圓的圖是同一個(圖 4-1-2A)，甲生極可能在形成四點共圓表徵時，也形成五點共圓的表徵，再者，在產生四點共圓表徵之後，解題者不需要重新構圖，僅透過觀察與拖曳檢驗便確認五點共圓表徵，因此確認形成四點共圓表徵與五點共圓表徵之間的平均時間上較非 GSP 組約快 4 分 15 秒。

以甲生為例，他在確認四點共圓表徵與五點共圓表徵之間僅有 1 分 14 秒的差距(表 4-1-2)，其中花了 40 秒在作圖與解釋四點共圓的理由，從發現 H 可能在圓上到完成拖曳檢驗而確定 H 在圓上僅花了 19 秒，因此可判斷在甲生發現四點共圓時，也發現了五點共圓的事實，在後測訪談中，甲生確認這件事。

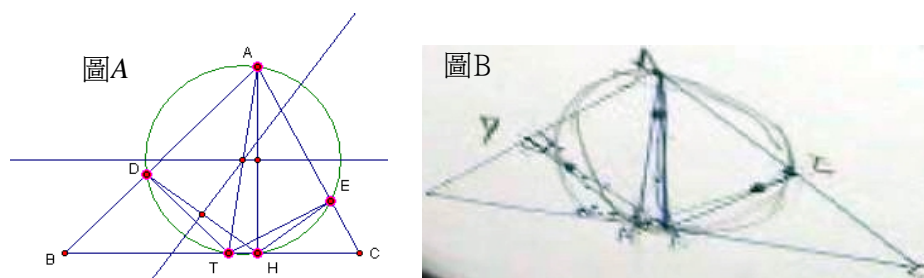


圖 4-1-3：A,D,H,T,E 五點共圓的草圖

徒手繪製四點共圓的草圖時，由於不清楚第五點是否會共圓，因此並沒有把第五個點畫在圓上，丁生所繪製的草圖(圖 4-1-2B)即呈現這個事實，丙生也有同樣的情況，特別是丁生，是找出兩組四點共圓之後，才得到五點共圓的事實，因此確認四點共圓與五點共圓之間的時間較長。

形成五點共圓表徵之後，GSP 組多能在兩分半以內證明完成，丁生(非 GSP 組)則約花七分鐘之後證明完成(表 4-1-2)，這顯示 GSP 作圖結果能清楚表徵題意，有助於解題。

丙生在形成五點共圓表徵過程中，發現許多和共圓有關的事實，已對於共圓的發現預先留下伏筆，因此雖然丙生不使用 GSP，但能夠迅速確認四點共圓表徵到確認五點共圓表徵(1 分 47 秒，參見表 4-1-1)。說明如後(表 4-1-3)：

丙生關注 $\angle ADH$  與 $\angle AEH$  的差，若探討 $\angle ADH$  與 $\angle AEH$  的和，可能會發現和為 $180^\circ$  (對角互補)而提早發現 A,D,H,E 四點共圓；產生表徵 B<sub>2</sub> 之後，丙生已經從 SSA 不全等性質推出 $\angle ADH + \angle AEH = 180^\circ$  (口語資料：130074，2007,2,13)，只不過並沒有更進一步推導出四點共圓；產生表徵 B<sub>4</sub> (以正弦定理說明 $\triangle ADH$  與 $\triangle AEH$  關係)後意謂著丙生已經知道答案可能和 $\triangle ADH$  與 $\triangle AEH$  的外接圓有關，只是當時認定這兩個外接圓不需要是同一個圓(口語資料：130189，2007,2,13)；當產生表徵 B<sub>5</sub> 之後，發現 $\angle ATE$ 、 $\angle ATD$ 、 $\angle AHE$  與 $\angle AHD$  都相同，即領悟到本題關鍵「角相等，對同一邊，都共圓」，「角相等」是形成表徵 B<sub>5</sub> 之後對於問題的理解，「對同一邊，都共圓」則連接自表徵 B<sub>4</sub> 的深入理解，在這段 48 分鐘的探索過程中，產生 5 個表徵能豐富五點共圓的背景資訊，因此丙生能迅速從確認四點共圓表徵到確認五點共圓表徵(1 分 47 秒，參見表 4-1-1)，不因沒有使用 GSP 而變長。

#### 四、過程策略

針對解題過程中 GSP 組與非 GSP 組所應用之解題策略次數分配，如表 4-1-5

所示：

表 4-1-5：第一題 GSP 組與非 GSP 組解題策略之次數分配

策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	甲生	乙生	丙生	丁生
啓思策略	7	4	14	13
符號策略	0	0	19	10
視覺策略	5	4	11	10
GSP 特殊策略	1	3	0	0
總計	13	11	44	33

比較 GSP 組與非 GSP 組在解題過程中所產生的策略，有以下五點結論：

##### (一) 非 GSP 組之策略數量較多

總數上，非 GSP 組採用的策略平均次數較 GSP 組多 27.5 次(表 4-1-5)，除了 GSP 特殊策略之外，非 GSP 組在使用三項分策略的平均次數皆高於 GSP 組。GSP 組完全沒有用符號策略，非 GSP 組使用符號策略的平均次數高達 16 次，是兩組間最大的差異(表 4-1-5)。

##### (二) 在啓思策略上，非 GSP 組在解題過程中，交互使用猜測、演繹邏輯與逆推策略，並沒有集中性；GSP 組多在關鍵表徵出現之後採用演繹邏輯

非 GSP 組使用較多的啓思策略，詳細探究其原因發現：GSP 組僅使用演繹邏輯為啓思策略，而非 GSP 組使用多元的啓思策略且呈現個人特色(表 4-1-6)，丙生以演繹推理與逆推法居多，丁生以演繹推理與猜測居多。非 GSP 的解題者則在解題過程中，交互使用猜測、演繹邏輯與逆推策略，並沒有集中性。以丁生為例，丁

生採取啓思策略雖集中於 7 到 16 分鐘之間與 47 到 68 分鐘之間(圖 4-1-4)，但並沒有如乙生一樣集中在形成五點共圓表徵至證明完成之間。

表 4-1-6：第一題 GSP 組與非 GSP 組啓思策略之次數分配

啓思策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	甲生	乙生	丙生	丁生
猜測	0	0	1	4
使用專家知識	0	0	1	0
演繹邏輯	6	4	6	7
從答案逆推	0	0	6	2
總計	6	4	14	13

「啓思策略上不具集中性」意謂著解題者必須針對解題階段實際發展的需要，使用不同的啓思策略。以丁生為例，在形成四點共圓表徵前之探索階段，以猜測及逆推為主，在證明題中，從欲証命題逆推或是代換成等價命題能夠使得解題有所進展；產生四點共圓表徵之後，解題有重大的突破與進展，證明方向亦大致確定，配合猜測，解題者多次利用四點共圓為前提進行演繹推理，終於確定五點共圓表徵；產生五點共圓表徵之後即具備充足解題資訊，則以演繹推理獲得結論。

兩位使用 GSP 的解題者在解題過程中，則產生啓思策略集中的現象。甲生與乙生分別使用 6 次與 4 次演繹推理的策略(表 4-1-6)，其中 4 次集中在形成五點共圓表徵之後至證明完成之間，這顯示 GSP 組的解題者從 GSP 所提供的視覺解題資訊中充分蒐集與彙整之後，才以演繹推理獲得結論。

逆向推理與符號運算的策略中都具有演繹推理的成分，只不過逆向推理的前提是欲証的結論，符號運算則強調以符號為主的推理活動，由此可知，在 GSP 環境下的推理活動集中在關鍵表徵出現至解題完成之時段，根據探索活動中所收集的資料以口語方式進行演繹推理。

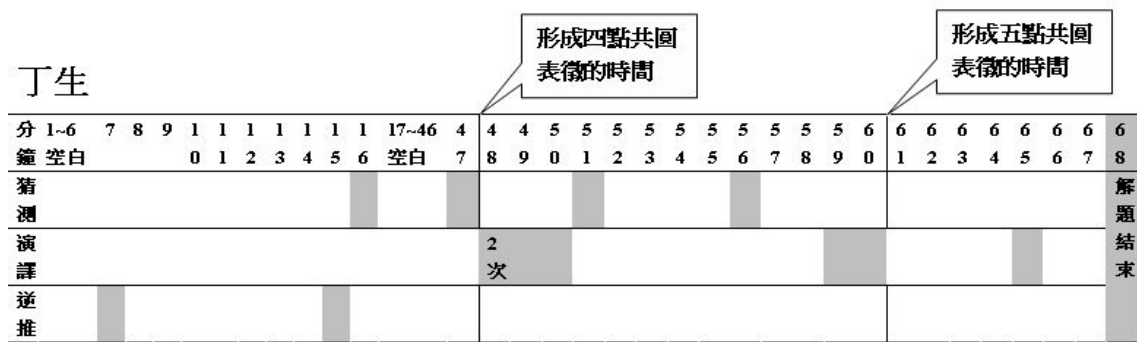


圖 4-1-4：丁生採取啟思策略的分佈方式

(三) 非 GSP 組使用符號策略進行邏輯演繹，GSP 組完全沒有運用符號策略

在解題過程中，GSP 組完全沒有運用符號，而非 GSP 組使用符號標記支援推理思考，丙生曾數度嘗試以符號表徵問題，因此較常以符號做為運算推理工具(表 4-1-7)。

表 4-1-7：第一題 GSP 組與非 GSP 組符號策略之次數分配

符號策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	甲生	乙生	丙生	丁生
命名	0	0	2	0
標記	0	0	11	8
運算	0	0	6	2
總計	0	0	19	10

非 GSP 組在使用標記上次數最多，使用標記至少有兩種功能，以丙生為例(圖 4-1-5)，標記的功能在於：1.簡記已知條件或先前推得的結果；2.標示欲證明或求解的目標。而標示已知條件或先前推得的結果有助於彙整與回顧解題資訊，標示欲證明或求解的目標則有自我提醒的目的。在丙生解題過程中，研究者曾誤解丙生畫弧線的目的：

130052 研：這畫這個符號(指橫跨  $\angle ADH$  與  $\angle AEH$  的弧線)的意思是 這兩個角一樣是不是？

130053 不是，那兩個角，就是我要觀察的。

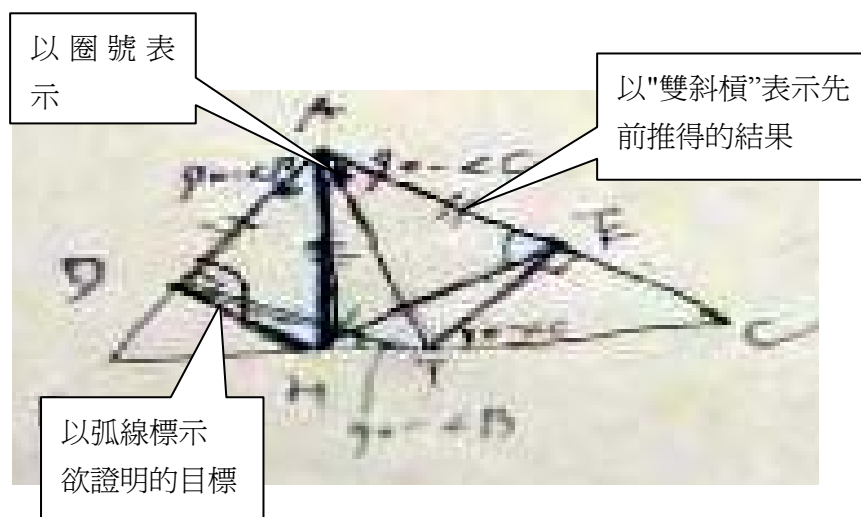


圖 4-1-5：標記的目的(丙生為例)

由此可知，丙生運用標記具有後設目的，注意解題過程中「已知」與「結果」之間的連結。

雖然，在本研究定義下，使用 GSP 解題者完全未運用符號策略，可能係因 GSP 功能之限制所致，但使用 GSP 之解題者能嘗試利用視覺策略達成類似標記策略之功能，例如：變換線條顏色、粗細或標示區域顏色等。

此外，命名策略可能與運算策略有密切關係，非 GSP 之解題者在採取運算策略之前，通常會先對運算之元素進行命名以形成算式之表徵。這可能也是 GSP 解題者未採用運算策略之原因。

(四) GSP 組與非 GSP 組均運用視覺策略維持視覺簡約性以獲取解題資訊，進而表徵問題

本題所使用的視覺策略次數彙整於表 4-1-8，從表 4-1-8 可知：不論是 GSP 組或是非 GSP 組均需要運用視覺策略維持視覺簡約性以獲取解題資訊，進而表徵問題；視覺策略中增刪圖形、變換樣式與重新畫圖次數均以非 GSP 組使用較多，非 GSP 組使用較多視覺策略以維持視覺簡約性，反而突顯 GSP 所提供強大的視覺功能。

表 4-1-8：第一題 GSP 組與非 GSP 組視覺策略之次數分配

視覺策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	甲生	乙生	丙生	丁生
重新畫圖	0	0	3	1
增刪部份圖形	3	2	6	5
調整圖形	1	2	0	0
變換樣式	1	0	2	4
總計	5	4	11	10

從徒手繪圖與 GSP 繪圖的特性來看，更能解釋視覺策略分配情況。徒手繪製的圖概略呈現題意所敘述的幾何關係，隨著更多隱藏訊息被挖掘時，增刪部份圖形，一步一步接近題意中所呈現的事實(Nunokawa, 1994)，但徒手繪圖可能有誤差，繪圖的結果僅能表徵題意，通常不是「真實顯現」；而 GSP 所繪製的圖精確呈現題意所敘述的幾何關係，除了表徵題意之外，更是真實顯現，一但繪圖完成時，便不需要改變。這顯示手繪圖的特點是從不斷改變中接近真實，因此非 GSP 組應有較多的增刪圖形、變換樣式與重新畫圖的次數。

圖的表徵與解釋的威力在於它的簡約性(Lowe, 1994)，在解題過程中將產生許多輔助理解資訊的符號標記，但過多的資訊同時陳列在圖形上，可能無法從中獲取資訊或可能導致訊息錯誤連結(Presmeg, 1986)，因此需要重新畫圖(Polya, 1957；Lawson & Chinnappan,1994)。以丙生為例，在解題過程中至少重新畫圖 3 次，對於丙生而言，重新畫圖的目的在於維持圖形的簡約性以便提取資訊，同時也有調整注意的焦點，從以下口語資料可知：

(丙生，2007,2,5)

130020 因為上面那個太複雜，我只要看...，我等一下只要看我要的線，線的圖就好

130103 喔因為我現在要，**注意算那個角**，角 1 加角 2 的那個

130134 對啊，然後要畫**精簡一點**，要不然亂七八糟看不懂

口語資料 130134 顯示圖形可能喪失了簡約性，所以”**要畫精簡一點**”，而造成提取資訊的不便；口語資料 130103 中”**注意算那個角**”則顯示重新畫圖的積極意義，擬藉由重新畫圖來調整注意的焦點，這個轉換可能牽動更多的轉變；口語資料 130020 則呈現雙重目的，當圖形不再簡約可辨時(”**上面那個太複雜**”)，重新畫圖能夠刪去不必要的干擾，僅注意特定的訊息(”**只要看我要的線**”)。

重新畫圖固然有維持圖形簡約性與聚焦的效果，但也可能在重畫的過程中造成轉譯的錯誤或是遺失或扭曲資訊。丁生雖然僅有 1 次重新畫圖，但常擦去部分圖形以維持視覺上的簡約性，必須在草圖中取捨，擦去他認為次要的部分(Polya, 1957)，但在擦去次要部分時，可能擦去某些參考的視覺框架，或是擦得不夠完整導致訊息干擾。以丁生的例子來看，雖然從共圓的條件中找到角度相等的條件，不過把關鍵的圓擦去之後就無法從圓的角度繼續發現「等角且對同弧」的解題資訊，導致丁生在此遇到瓶頸，顯然他發現這個問題，約四分鐘後，把擦去的圓補上。下面有一段口語分析可說明其過程：

(丁生，2007, 2, 7)

140096 我先試一下...這個四點共圓的圖 圓好難畫 好醜喔

1 分 30 秒後，擦掉畫好的圓並提出解釋：

140105 因為我找到角度相等應該就可以了，這樣比較清楚

但 1 分 10 秒之後，卻說：

140107 亂掉了

在 GSP 的環境中沒有重新畫圖的例子產生，解題者多半以隱藏物件或是更換線條粗細與顏色，甚至以放大或調整相關物件位置的方式提高視覺上的可辨性，由

此 GSP 能提供清晰視覺資訊的優點，解題者不需要冒著重新畫圖或減少擦去部分圖形的風險，影響問題表徵的形成以及解題的成效。

(五) 在 GSP 特殊策略上，拖曳策略可縮短確認關鍵表徵的時間

GSP 組的解題者多於檢驗共圓命題時應用拖曳檢驗(平均 1.5 次)，非 GSP 組的解題者則以「對角互補」(丁生)或「直徑上的圓周角為直角」(丙生)做為發現或檢驗共圓的工具(表 4-1-9)。以拖曳的方式確認共圓，所花費的時間約為 0.5~1 分鐘(口語資料 120085~120088, 120096~120100)，而丁生從四點共圓至確認五點共圓，則花了 12 分鐘(表 4-1-1)。

僅乙生使用 1 次測量角度的功能，於畫圖完成後即測量欲証的角度，雖然預先得知角度相等的事實，不過還是對解題沒有幫助。

表 4-1-9：第一題 GSP 組與非 GSP 組 GSP 特殊策略之次數分配

GSP 特殊策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	甲生	乙生	丙生	丁生
拖曳檢驗	1	2	0	0
測量長度	0	1	0	0
總計	1	3	0	0

## 五、反思行爲

比較 GSP 組與非 GSP 組的解題過程中所產生的反思行爲，有以下三點結論(參表 4-1-10)：

(一) GSP 組之反思行爲較少

GSP 組容易發現關鍵表徵完成解題任務，故反思行爲較少。反思行爲所展現的具體行動是解題過程中的一種趨力，影響過程中任何一個階段的認知行爲(Lester, 1994)；非 GSP 組的解題者在表徵數量、表徵轉換數量及解題策略使用次數較 GSP

組為多，因此反思行為所產生的次數亦多。刪除未使用過的反思行為後，將本題所使用的反思行為次數彙整於表 4-1-10。

表 4-1-10：第一題 GSP 組與非 GSP 組所產生的反思行為類型與數目

反思行為類型		GSP 組		非 GSP 組	
		甲生	乙生	丙生	丁生
覺知	任務覺知	1	1	5	1
	策略覺知	0	0	4	3
	小計	1	1	9	4
評估	結果預見	0	1	2	15
	策略比較	0	0	1	3
	質疑	1	3	6	3
	回顧	1	0	6	7
	小計	2	4	15	28
校正	發生偵錯事件	0	2	5	1
	重新改變作法	1	2	3	7
	小計	1	4	8	8
總計		4	9	32	40

## (二) 反思行為有助於表徵或策略的選擇

解題過程的挫折促使受測者調整部分解題觀點或策略。以丁生為例，其反思行為與解題時頻頻遇到挫折有關，遇到挫折時，解題者需要對於策略提出評估與校正，以下原案說明丁生擬直接利用符號建立角度關係(策略)，遇到挫折後所產生的反思行為：

(丁生，2007,2,7)

140027 呃...我想試試看能不能...最直接的就是用  $\alpha$ 、 $\beta$  能標出這些角度，那是最好，或是標出它附近的角搞不好可以找出一些全等或是相似之類的[策略]

140028 好醜喔 [反思-結果預見]

140031 現在就是利用  $\alpha$  跟  $\beta$  然後想標出某些我想知道的角度 [策略]

140034 我覺得數字太醜這樣有點好像擾亂自己的感覺 [反思—結果預見]

在這兩分鐘過程中，丁生至少進行兩次反思，其中「好醜喔」意謂丁生以  $\alpha$ 、 $\beta$  標示其他角度時，所獲得的答案並不讓他滿意，似乎無法預見好結果。1.5 分鐘後，還是遭遇類似的感受。約 3.5 分鐘之後，丁生改變策略，嘗試尋找圖中相似三角形外，仍保留以符號建立角度的企圖，經過 3 分鐘的努力，還是宣告失敗：

140039 因為我想要知道這兩個角相等，我想要有相似 所以我就在猜有沒有哪個跟哪個會相似，所以我現在先猜這個，然後下一步我想再一次試著利用  $\alpha$ 、 $\beta$ ，就是反正我想要證明它們兩個相似，先看一下它們會不會相似 [策略]

140042 我現在試著想要求出  $\angle HDT$  這個小的角度 [策略]

140043 數字太多自己弄混了，只是繞了一圈 [反思—回顧]

解題過程的挫折使丁生調整部分解題觀點，聚焦於尋找可能的相似三角形組，但原則上還是以符號表徵角度，當所有可行策略都用完時，丁生決定進行更徹底的改變。嘗試以相似、旋轉觀點表徵題意，但遭遇符號與視覺上的困難，在解題開始後的 44 分鐘要求休息，丁生檢討失敗原因在於無法跳脫原有思考模式，一直想嘗試以符號算出角度：

140073 我還是...我覺得我一直困在想要做到我想要做到的事情上面...就是算出這些角度然後證明它相似...

他認為該重新閱讀題目，從巨觀的角度出發，求得突破：

140073 然後我想要...就是重新看一次題目，然後重新思考一下，然後從比較巨觀的角度來看這個題目，能不能看一些新的東西

挫折促使解題者調整部分解題策略，也可能促使解題者改變表徵問題的方式。以丙生為例，他是在「以符號建立  $\angle ADH$  與  $\angle AEH$  的數學關係」與「以數學性質或

理論探求 $\triangle ADH$  與 $\triangle AEH$  的關係」兩種觀點間變換相互輪替而產生跳躍式的表徵轉換(圖 4-1-3)，而這個過程伴隨著反思行爲，引用以下原案說明之：

約在產生表徵  $B_1$  九分鐘後，丙生認爲沒有充分利用所有條件，所產生的表徵不足以解決問題：

130070 只是一直沒有什麼用到那個用到 **AT 角平分線**，就是用到 DE 兩點的那個關係 **[對任務的覺知]** (2007,2,13)

因此丙生利用 AT 爲公共邊、角平分線到兩邊等距的性質( $AD=AE$ )與題目中欲証的等角關係( $\angle AHD=\angle AHE$ )產生新的表徵  $B_2$ ：

130074 而且我一直覺得它有點像 **SSA ... [對任務的覺知]** (2007,2,13)

以 SSA 表徵問題仍然遇到瓶頸，丙生又回到角度的觀察與計算，試以符號建立角度關係，於是產生表徵  $B_3$ ，再度嘗試以符號建立 $\angle AHD$  與 $\angle AHE$  的關係，不過，丙生意識到困難，他說：

130107 可是好像，好像，好像會就是 就是好像會跟原來一樣 **[策略預見]** (2007,2,13)

130143 我覺得光用角度，應該沒辦法 **[策略預見]** (2007,2,13)

從以上的分析中，可知反思行爲和解題時所遭遇到的挫折有關，遭遇挫折時的反思行爲能夠促使表徵轉換與改變解題策略。丙生解題過程中雖遭遇困難促使表徵轉換方式呈現跳躍方式，不過卻能因此深入理解和解題目標有關的各種關係，替成功解題預留伏筆。

### (三) 反思行爲之類型與解題者習慣之解題策略有關

從上述分析可知反思行爲和解題時所遭遇到的挫折有關，反思行爲的類型和解題策略有關。「重新畫圖」(視覺策略)和「重新改變作法」(校正)之間的界線不容易區分；以「嘗試錯誤」解題(啓思策略)可能需要經過較多的評估，因此「結果預

見」的次數可能較多；「符號標記」的使用(視覺策略)可能和解題者對於任務或策略的覺知有關。

以丙生為例，可能是根據過去經驗，在面對複雜圖形時，利用標記對於目標加以註記，標記的目的在於連繫現況與目標。他說：

130018 我要標示，因為這個圖很多線，所以我要看清楚是哪兩個角(相等)<sup>1</sup>

## 六、小結

在本題中，形成四點共圓與五點共圓表徵是本題的解題關鍵。在解題過程中，GSP 能精確表徵並能透過視覺操弄探索問題情境(Hanna, 2000)，因此使用 GSP 之解題者能較快形成關鍵表徵。

GSP 能精確表徵題意使得 GSP 組的解題者僅需要少數表徵即能理解問題且表徵轉換過程平順，以資訊整併為主，因此表徵數目較少(平均 3 個)，表徵轉換類型以「整併」型居多(平均 1 次)；非 GSP 組的解題者則需要較多表徵數目(平均 6.5 個)，表徵變換以「突變」型最多。

由於 GSP 能提供豐富的視覺資訊，因此 GSP 組表徵方式以草圖居多(表 4-1-2)；非 GSP 組且多以演繹陳述呈現表徵，因此非 GSP 組在解題過程中需要仰賴較多的視覺及符號策略。GSP 能提供豐富的視覺資訊，使得解題者在大多數時間中，以 GSP 所提供的探索功能蒐集解題資訊，直到拖曳檢驗確認五點共圓之後，才以演繹推理獲得結論，因此演繹推理的啓思策略集中在形成五點共圓表徵之後的推論活動中，非 GSP 組則無此現象。

由於解題過程順利，GSP 組的反思行為次數少(平均 6 次)。

---

<sup>1</sup> 這句話顯示丙生知道當遇到很多線的圖(任務)，就要利用標示，以免看不清楚。因此，在策略編碼上是「符號標記」(2-2-7b)，在反思行為編碼上是「任務覺知」(3-1-2)。

## 第二節 第二題解題表現與分析

透過 GSP 能迅速精確作圖，有助於理解題目所呈現的幾何關係，但由於直接呈現結果，因此可輕易看出數學性質，降低了證明的需求或是發展證明的機會，對於推理過程不見得有幫助。為瞭解軟體直接呈現結果對於問題表徵形成方式、解題策略與反思行為所造成的影響，因此設計本題。第二題題目如下：

各邊相等的凸五邊形 ABCDE 中，若  $\angle ABC=2\angle DBE$ ，求  $\angle ABC=?$

本小節說明第二題問題特色後，依序分解題時間、表徵與表徵轉換、過程策略、反思行為等四個部分依序說明 GSP 組與非 GSP 組學生之解題表現。

### 一、問題特色

本題的解法大致如下(參考圖 4-2-1)：

1. 連 BE 與 BD，從五邊等長條件推得  $\angle ABE=\angle AEB$  且  $\angle CBD=\angle CDB$ ；
2. 令  $\alpha=\angle ABE$  且  $\beta=\angle CBD$ ，從題目中「兩倍關係」( $\angle ABC=2\angle DBE$ )可知 DE 上必存在一個點 P 使得  $\angle EBP=\alpha$  且  $\angle CBD=\beta$ ；
3. 利用內錯角相等，可知線段 AE、CD 與 BP 為相互平行的三線段；
4. AE 與 CD 平行且等長，則 AEDC 為平行四邊形，因此  $AC=DE$ ，從五邊等長條件可知  $AC=DE=CB=BA$ ，則 ABC 為正三角形，故  $\angle ABC=60^\circ$ 。

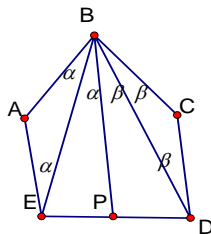


圖 4-2-1：第二題關鍵：表徵兩倍關係與確認平行軸的存在

本題解題關鍵在於表徵題目中的兩倍關係，兩倍關係確定平行軸 BP 的存在，平行軸平行 AE 與 CD，可推出平行四邊形 AEDC，因此  $\triangle ABC$  為正三角形。兩位

非 GSP 的解題者均迅速表徵兩倍關係而解題，恰當的表徵方式縮短解題時間，因此非 GSP 組的平均解題時間比 GSP 組約短 13 分鐘。

## 二、解題時間

研究設計與測驗前的訓練均要求受測者提供解釋，目的在於理解受測者解題歷程的轉變以及釐清受測者獲得重要結果的理由。對於求解題而言，由於 GSP 提供計算角度及長度的功能，解題者很容易透過這些功能直接得到答案，因此在解題者回答 60 度的答案後，需進一步設法提出答案為 60 度的解釋，可能導致解題關鍵出現之時間反而較答案出現之時間來得晚。

本題關鍵在於能否恰當表徵題目中的兩倍關係，兩倍關係確定平行軸 BP 的存在，進而推出四邊形 AEDC 是平行四邊形與 $\triangle ABC$  為正三角形，因此紀錄平行軸、平行四邊形與正三角形出現的時間。

解題時間彙整如下表 4-2-1 所示：

表 4-2-1：第二題 GSP 組與非 GSP 組解題特徵出現之時間點

解題特徵	GSP 組			非 GSP 組		
	甲生	乙生	平均	丙生	丁生	平均
草圖完成時間	01:42	<b>19:31</b>	<b>10:37</b>	01:11	02:28	01:49
平行軸存在的時間	02:00	未出現	<b>02:00</b>	03:52	04:52	04:22
平行四邊形出現的時間	08:27	<b>34:28</b>	<b>21:28</b>	05:55	07:15	06:35
正三角形出現的時間	09:01	<b>34:25</b>	<b>21:43</b>	07:46	07:35	07:41
回答 60 度的時間	09:05	<b>32:37</b>	20:36	08:05	07:45	07:55

根據表 4-2-1 之數據，有下列發現：

1. 非 GSP 組得到答案的時間(平均時間約 8 分鐘)比 GSP 組(平均時間約 20 分鐘)來得短，造成差異的原因是乙生解題時間特別長，扣除乙生之後，甲丙丁三人差異小；

2. 乙生草圖完成時間與解題完成的時間均和其他三位受測者差異很大，作答過程中始終沒有發現平行軸的存在，從 GSP 作圖結果回答答案為 60 度，並以此推論而確認正三角形與平行四邊形的存在，因此解題特徵出現的順序和其他三位受測者相反；
3. 乙生利用 GSP 繪圖、計算與拖曳功能逐步調整而得到五邊等長的五邊形，約花 19 分鐘，造成 GSP 組草圖完成時間較非 GSP 組約慢 9 分鐘，是造成兩組差距的主要原因；
4. 在作答過程中乙生始終沒有發現關鍵平行軸的存在，甲生認為滿足題意中兩倍關係的圖形必為對稱的，因此甲生(GSP 組)出現平行軸的時間較非 GSP 組的時間約快 2.5 分鐘，非 GSP 組均利用圖形與演繹推理而得到平行軸的時間反而較晚；
5. 甲丙丁三人的解題時間相近，除了甲生確認平行軸存在到確認平行四邊形存在的時間差較長之外，甲丙丁三人的解題時間相近，甲生從發現平行軸存在至確認四邊形 ACDE 為平行四邊形之時間差較非 GSP 組約短 4 分鐘，出現平行軸至完成解題之時間差亦較非 GSP 組約短 3.5 分鐘，顯示 GSP 為了完成精確作圖所需要步驟較多，費時較久，非 GSP 作圖結果雖不精確，卻足以表徵題意，用以解題，故時間短。

### 三、表徵與表徵轉換

本段分成三部分，第一部分說明 GSP 組與非 GSP 組所產生表徵數量與類型的差異，第二部分說明 GSP 組與非 GSP 組所產生表徵轉換之類型的差異，第三部分說明使用 GSP 對於形成表徵的影響。

#### (一) 表徵

解題過程中所產生的表徵數量與類型，彙整成爲表 4-2-2，如下所示：

表 4-2-2：第二題 GSP 組與非 GSP 組在各表徵類型之次數分配

表徵類型	GSP 組			非 GSP 組		
	甲生	乙生	平均	丙生	丁生	平均
草圖	5	2	3.5	1	1	1
符號關係	0	0	0	2	1	1.5
演繹陳述	1	0	0.5	3	3	3
總計	6	2	4	6	5	5.5

根據上表，彙整成以下兩點結論：

#### 1. 非 GSP 組多以演繹陳述呈現表徵，表徵數目組內差異小

在本題中，雖然非 GSP 組多以演繹陳述呈現表徵，但在陳述幾何關係或利用符號表徵題意之後，仍需要藉由圖形輔助說明。丙生與丁生的解題歷程幾乎是相同的：先表徵兩倍關係，再藉由兩倍關係確定平行軸 BP 的存在並推出四邊形 ACDE 為平行四邊形與三角形 ABC 為正三角形，而得到答案為 60 度。因此兩人所產生的表徵數量與解題時間均非常接近，表徵數目組內差距小(表 4-2-2)。

引用丁生與丙生表徵兩倍關係的口語資料，說明兩人表徵方式相近之處。丁生認為：“...既然這個  $\angle DBE$  等於  $OO$  加  $XX$ ，應該...就可以...好像把它翻進來一樣”(口語資料:240024，2007/5/2)”因此他以「翻進來」表徵題目中的兩倍關係；研究者認為以「翻進來」表徵問題具有相當好的空間操作能力，對於本題的問題結構已有相當程度的理解，但限於本研究表徵分類的定義，彼此歸類成符號關係的表徵。這個翻進來的動作，更進一步轉譯成符號，確立平行軸存在，以下有口語資料與解題過程中所繪的草圖為例：

240030 嗯...把它翻進來之後，兩個(指  $\angle ABC$  與  $\angle PBC$ )都是  $OO$ ，那...這兩個邊( $AB=AC$ )

又相等，這( $\angle ABC$  與  $\angle ACB$ )也是  $OO$

240032 所以，這兩條是平行的(指 AE 平行 CD)

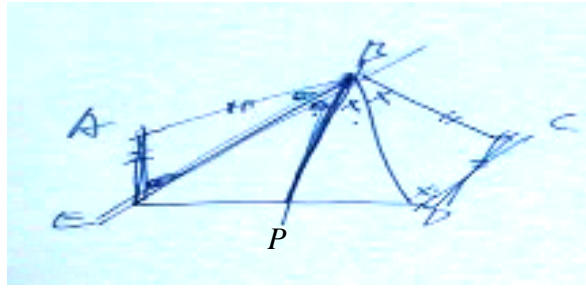


圖 4-2-2：第二題丁生以圖形說明平行軸的存在

丙生透過重新畫圖表徵題意，圖 4-2-3A 是解題開始所畫的草圖，只是題目中文字敘述的直譯，圖 4-2-3B 除了將相關位置稍作旋轉外， $\angle EBD$  的弧形標記被符號 $\alpha+\beta$ 所取代，丙生以符號 $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ 表徵題目的兩倍關係，這一次重新表徵是丙生唯一和丁生不同樣之處，因此丙生表徵數目多 1 次，圖 4-2-3C 出現平行軸，平行軸將視為一個整體的角度 $\alpha+\beta$ 拆解成兩個獨立的角度 $\alpha$ 與 $\beta$ ，能連接 AE 與 CD 的關係。

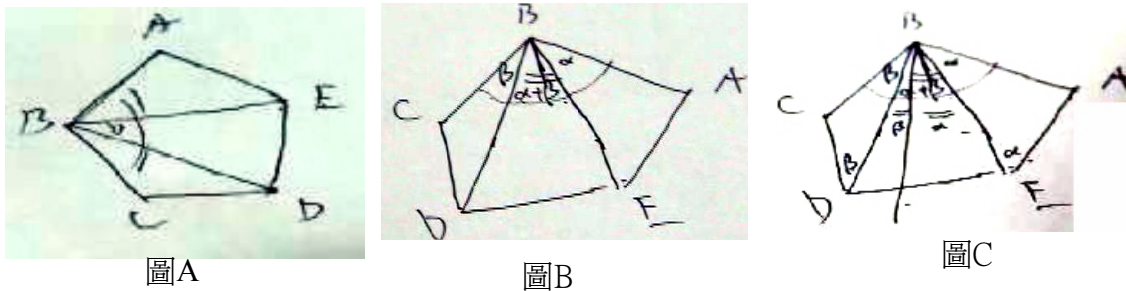


圖 4-2-3：第二題丙生以圖形說明平行軸的存在

在這兩個場景中，兩人均使用符號表徵兩倍關係，利用符號推理而確認平行軸的存在，而推出 ACDE 為平行四邊形，最後得到三角形 ABC 為正三角形的結論，因此在本題中，兩人所產生的表徵數量與解題時間均非常接近。

## 2. GSP 組多以圖形呈現表徵，表徵數目則呈現組內差異

由於乙生形成表徵數目很少(2 個，表 4-2-4)，因此和甲生(6 個，表 4-2-5)相較之下差異很大。為了釐清何在以 33 分鐘內，乙生僅產生 2 個表徵，研究者認為有必要說明乙生作圖過程。

乙生在解題過程中，經歷過兩次的失敗，經過 15 分鐘後，乙生嘗試第三度作圖。第一次擬利用壓縮正五邊形的方式得到滿足題意之等長五邊形(口語資料：240047)，但發現角度將被固定，因此放棄這個嘗試(口語資料：240059, 240061)；第二次擬利用旋轉方式畫出等長五邊形，但體認到 GSP 旋轉作圖中的角度必須是固定的數值，因此作罷。

乙生作圖過程如下：先畫出 AB 線段，並分別以 A,B 兩點為圓心，AB 長為半徑作兩圓，並在兩圓上分別取 C,E 兩點(如圖 4-2-4A)，再以 E 為圓心，AB 長為半徑作圓，在圓上取一點 D(圖 4-2-4B)，接著以 C 為圓心，AB 長為半徑畫圓並連接線段 DC(圖 4-2-4C)，透過拖曳與調整各頂點位置，使得 D 點落在圓 C 且  $\angle ABC$  與  $\angle DBE$  的比值最接近 2，則五邊形 ABCDE 即為所求(圖 4-2-4D)。

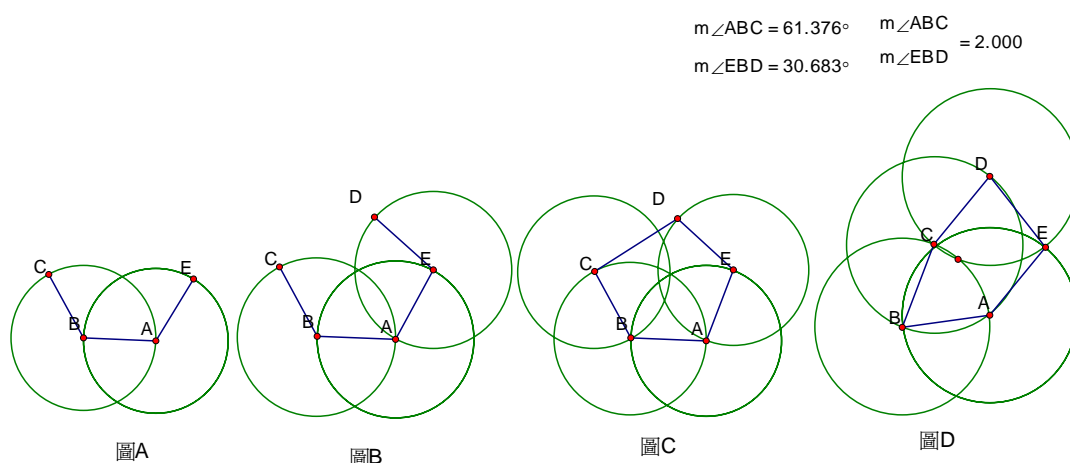


圖 4-2-4：第二題乙生作圖的流程

解題約進行至 19 分鐘時，乙生已經完成圖 4-2-4C 的情況，這是一個不穩固的等長五邊形(第一個圖形表徵)，隨著移動其他頂點，D 點隨時會脫離圓 C，乙生察覺這個情況，但沒有解決這個問題，他說：

240112 對啊，它又移動了，喔糗大了! [指 D 點會離開圓 C]

240116 這樣它就...移動掉啦

240118 就是...我要這個圓就是跟這個重合啊!

接著，乙生要以 GSP 測量、計算與拖曳功能找出滿足  $\angle ABC$  與  $\angle EBD$  的比值為 2 的點。必須一方面以目視檢查 D 是否落在圓 C 上，一方面要移動頂點，使得  $\angle ABC$  與  $\angle EBD$  的比值接近 2；拖曳檢驗(dummy loci dragging)的動作約持續 6 分鐘後，乙生才找到第一個成功例子(第二個圖形表徵)，乙生從測量結果猜測答案為 60 度，理由是：

240208 看到這種答案一定是猜 60 的啊

240211 認識的特殊角就那麼多而已啊

對於乙生而言，在 GSP 環境中畫一個等長五邊形是困難的。對於甲生而言，同樣不是一蹴可及的，因此在 GSP 環境中，畫了一個草圖，這個動作看起來有點矛盾：在精確作圖的環境中粗略地點選五個點，讓它看起來像五邊等長的五邊形！但甲生而言，這個草圖讓問題更具體，更能提供思考與作圖參考：

210022 就是比較好去看啊

210023 因為，沒、沒辦法用紙跟筆，做那種..簡圖

甲生以對稱觀點表徵兩倍關係，認為等長五邊形的圖應該具有對稱性(口語資料：210010)，透過草圖與對稱觀點理解問題。從非 GSP 組的例子可知，產生平行軸表徵可能是發現平行四邊形與正三角形的關鍵，甲生在稍後探索活動中亦發現正方形(平行四邊形特例)與三角形表徵(表 4-2-5)，顯示其表徵數目與解題時間較類似非 GSP 組，造成 GSP 組間差異。至於表徵呈現的方式則受限於 GSP 環境，需要在呈現圖形的情況下進行探索，因此多以圖形表徵為主。

甲生利用對稱概念作出中間軸 BH 之後(圖 4-2-5)組，透過草圖與對稱觀點理解問題，因此較乙生更早進入問題情境，他利用鏡射作圖目的表徵對稱與兩倍關係，雖必須透過拖曳確定 L 必須通過圓 B 與圓 E 的交點(圖 4-2-5)，但可省去較多拖曳檢驗的時間，因此解題時間較乙生短。甲生以鏡射方式作圖，相當於把 BH 線段”

翻出去”，甲生”翻出去”的作圖法和丁生”翻進去”的口語詮釋有異曲同工之妙，這亦可解釋甲生的解題表現和非 GSP 組近似的原因。

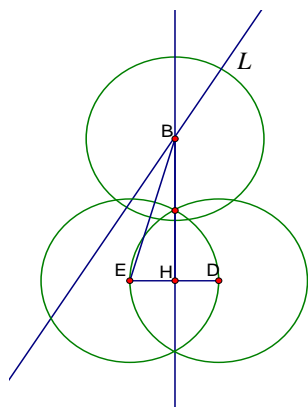


圖 4-2-5：第二題甲生作圖的過程

## (二) 表徵轉換

解題過程中所產生的表徵轉換數量與類型，彙整成爲表 4-2-3，如下所示：

表 4-2-3：第二題 GSP 組與非 GSP 組在各表徵轉換之次數分配

表徵轉換類型	GSP 組			非 GSP 組		
	甲生	乙生	平均	丙生	丁生	平均
等價變換	4	0	2	5	4	4.5
整併	1	1	1	0	0	0
突變	0	0	0	0	0	0
總計	5	1	3	5	4	4.5

根據上表，彙整成以下兩點結論：

### 1. 非 GSP 組表徵轉換完全都是「等價變換」型

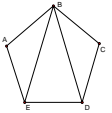
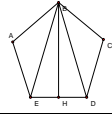
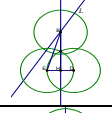
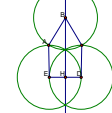
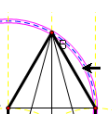
在本題中，非 GSP 組的解題模式可視爲一連串的語意轉換與邏輯演繹的結果，其中至少經過兩個子轉換：將兩倍關係轉譯成符號以及將符號轉成幾何關係(平行軸的存在)，因此表徵轉換的方式完全以「等價變換」型爲主。在此情況下，非 GSP 組不需要 GSP 利用所提供的視覺資訊來表徵題意，因此可以在短時間內解決問題。

2. GSP 組表徵轉換多數以「等價變換」型，僅有一次是「整併」型

為說明甲乙兩生表徵轉換的類型，將甲乙生表徵轉換過程呈現於表 4-2-4 及表 4-2-5。

甲生以圖形表徵題意之後(表徵  $C_2$ ，參看表 4-2-4)，”...感覺... $\angle AED$  很像是直角”(口語資料：220063)，他以重新畫圖的方式驗證猜想(雖然這個驗證有邏輯上的瑕疵)，由於需要整併驗證之後的結果才能得到新表徵，因此這次表徵轉換類型視為「整併」。除了這一次轉換之外，甲生的表徵轉換和丙生與丁生相近均為「等價變換」型。

表 4-2-4：第二題甲生(GSP 組)的表徵變換過程

表徵概述	表徵形式	表徵變換	草圖
A：依題意繪製簡圖	1-1		
B：以對稱表徵題意之兩倍關係	1-3	2-1-1	
$C_1$ ：以鏡射作圖表徵兩倍關係	1-1	2-1-1	
$C_2$ ：以圖形表徵題意	1-1	2-1-1	
D：以圖形表徵四邊形 ACDE 是正方形	1-1	2-1-2	
E：以圖形呈現 $\triangle ABC$ 是正三角形	1-1	2-1-1	

註：表徵形式與轉換代碼請參見表 3-6-1 及 3-6-2

乙生僅形成兩個表徵，在形成表徵 A 之後(表 4-2-5)，必須整併與確認托曳之後所呈現的計算與測量資訊之後才能形成表徵 B(表 4-2-5)，這唯一一次的表徵轉換被視為「整併」型。這個轉換過程耗時(約 13 分鐘)且耗費相當多的心力。

表 4-2-5：第二題乙生（GSP 組）的表徵轉換過程

原案概述	表徵形式	表徵變換	備註
A：利用 GSP 繪圖表徵五邊等長	1-1		透過拖曳性質確認
B：利用 GSP 繪圖表徵五邊等長且兩倍關係	1-1	2-1-2	透過拖曳、測量與計算性質確認

### (三) GSP 對於形成表徵的影響

在本例中，對於甲生而言，GSP 精確作圖的特性，影響形成平行四邊形表徵的時間(表 4-2-1)，在 GSP 的環境中，甲生必須交互使用拖曳與目視判斷，以確定 L 必須通過圓 B 與圓 E 的交點(參看圖 4-2-5)，雖然僅需沿著固定的軸進行拖曳檢驗，和非 GSP 組相較之下，仍然花費較多時間。為了符合精確性，在解題時間上則付出代價。

對於乙生而言，GSP 反而像是個分心的誘惑者(detractor)，讓乙生耗費心力思考各邊等長之五邊形的作圖問題上以及透過拖曳頂點與觀察計算測量結果的比值上，而忽略題目中兩倍關係的幾何意涵。

## 四、過程策略

彙整 GSP 組與非 GSP 組解題過程中的解題策略，如表 4-2-6 所示：

表 4-2-6：第二題 GSP 組與非 GSP 組解題策略之次數分配

解題策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	甲生	乙生	丙生	丁生
啓思策略	6	4	3	3
符號策略	2	0	4	1
視覺策略	12	3	3	5
GSP 特殊策略	1	8	0	0
總計	21	15	10	9

由上表可得到下列四點結論：

(一) 非 GSP 組使用策略方式及數量組內差異少，GSP 組使用策略方式及數量組內差異大

表徵方式造成使用策略方式及數量的差異。非 GSP 組表徵問題的方式幾乎是一樣的，因此表徵數量、表徵轉換方式與解題時間均非常接近，不僅如此，連使用策略方式及數量均類似。

非 GSP 組之解題者使用策略數量皆為 9 次(表 4-2-6)，其中邏輯演繹使用的次數皆為 3 次(表 4-2-7)，使用時機相當一致，均發生在確認平行軸存在、四邊形 ACDE 為平行四邊形及三角形 ABC 為正三角形時。在重新畫圖時機上，都曾經為了表徵 ACDE 為平行四邊形時重新畫圖。在確定平行軸存在時，均使用符號作為推理工具。因此在使用策略次數上有 5 次是相同的。

造成 GSP 組使用解題策略迥異的原因是甲生以對稱表徵題目中的兩倍關係，則不需要在 GSP 環境中表徵兩倍關係，乙生試圖直接以作圖、測量、計算與拖曳結果表徵五邊等長及兩倍關係，則需要使用較多 GSP 提供的特殊策略。因此甲生僅使用 1 次拖曳策略且時間很短(約 29 秒)，而拖曳過程中僅需在平行軸上下移動；乙生則必須使用次數較多且時間較長的拖曳行為(總和約 13 分鐘)以逐步嘗試錯誤的方式考慮平面上所有可能位置。

(二) 不論 GSP 組或非 GSP 組均使用重新畫圖的策略

第一題的研究結果顯示：GSP 環境中沒有產生重新畫圖的例子，係因為 GSP 能透過隱藏物件或是更換線條粗細與顏色，甚至以放大或調整物件位置的方式提高視覺上的可辨性，而且 GSP 所繪製的圖形能精確呈現題意所敘述的幾何關係，一旦繪製完成，更動的機會很少。

但本題中，四位解題者均產生重新繪圖的行為。甲生重畫兩次，第一次是在 GSP 環境中，粗略地點選五個點，讓它看起來像五邊等長的五邊形，這相當於非

GSP 組繪製草圖的習慣動作，對於甲生而言，讓問題更具體；第二次是爲了驗證 ACDE 爲正方形而重新繪圖，他說：

210065 嗯...所以我...大膽的假設一下...假設它是直角...然後我再把圖作一次...

這次重新畫圖的原因是爲了說明直角 ACDE 爲正方形，如果是因爲舊有的圖失去簡約性而無法辨識而重畫，則重畫的理由可以被接受；但是如果爲了要驗證直角而作出直角，以說明一切符合題意，則犯了邏輯上的問題，甲生犯個這個問題而不自覺，這值得深思的問題。乙生重新畫圖是因爲經歷過兩次失敗而重新開始。甲生與乙生重新畫圖的例子，顯示 GSP 環境中重新畫圖的理由並非視覺清晰上的考量，有別於紙筆解題中重新畫圖行爲，可能是基於方法上根本改變的需要而另起爐灶。

從丙生重新畫圖的過程中可推知其理解問題的進程，丙生第一個草圖(圖 4-2-6A)中以弧形標示  $\angle DBE$  目的在於提醒自己題目所求的角度在這個位置，再次驗證丙生使用標記具有後設的目的；第二個草圖(圖 4-2-6B)中  $\angle DBE$  有新的表示法： $\alpha+\beta$ ，其中  $\alpha$  與  $\beta$  分別代表  $\angle ABE$  與  $\angle CBD$ ，這個進展顯示丙生能以符號表徵兩倍關係；當丙生更進一步發現  $\angle DBE$  中可能隱藏的平行與內錯角關係時， $\angle DBE$  可看成兩個部分，命名爲  $\alpha$  與  $\beta$ (請見圖 4-2-6C)，隨著推理活動的進行， $\angle DBE$  能夠重新被多次解讀而產生更精緻意義，顯示解題者對於題目的內在結構有更進一步的理解(Nunokawa, 1994, 1997, 2000)。這個例子顯示符號的標示與命名將隨著解題者更深入理解題意而更加精緻：符號功能從一般指示到特殊命名，從統稱到獨立命名。

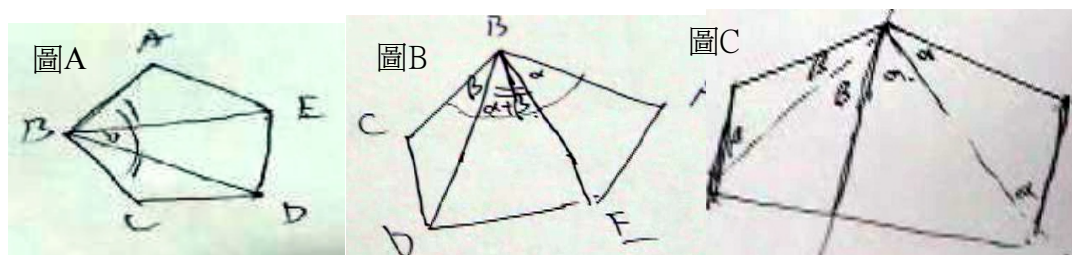


圖 4-2-6：草圖的演進與問題情境的理解(以丙生爲例)

從 van Hiele(1986)的觀點來看，丙生重新畫圖的過程亦可顯現其幾何思考的進展。丙生依題意繪製草圖(圖 4-2-6A)，即進入視覺思考階段，在這個階段中五邊形是一個視覺整體，在引入 $\alpha, \beta$ 表示角度兩倍關係角度，邁入解析思考階段，符號成爲解析的工具，符號上將 $\alpha + \beta$ 拆解成 $\alpha$ 與 $\beta$ ，對應著幾何上將 $\angle EBD$  被拆成兩個部分，而這兩個部分結合題目中等長條件之後則形成平行軸，此時，進入演繹思考階段，在這個階段中，草圖強調表徵的功能而忽略精確性(圖 4-2-6A)，草圖彰顯的是平行關係，而非等長關係。

丙生對於問題情境的理解與幾何思考的進程，不僅展現在草圖的演進中，亦顯示在重新構圖的過程中。解題初期草圖線段出現的順序解題者個人的習慣與好惡而定，當理解重要關係之後，爲了顯示其特徵則會改變構圖順序。以下圖爲例，圖 4-2-7A 爲丙生在解題初期所繪的草圖，草圖中的五邊形爲一個視覺整體，圖 4-2-7B 爲丙生在平行軸出現後，理解平行關係後所繪製的草圖，圖上的數字表示在構圖過程中該線段出現的順序。圖 4-2-7A 中顯示平行軸是最後出現的線段(標號 8)，而理解平行軸的意義之後，重新畫圖時，爲了表徵平行關係，圖 4-2-7B 中的標號爲 1,2,4 號的三條線順序，較圖 4-2-7A 中順序提早出現，尤其是平行軸(標號 2)，出現順序的改變是最多的。

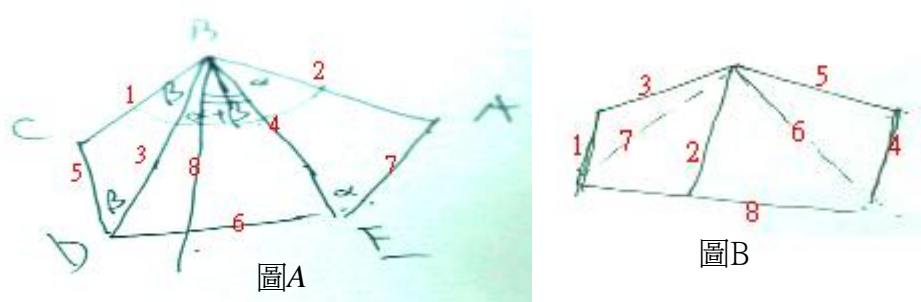


圖 4-2-7：構圖順序與問題情境的理解(以丙生爲例)

(三) GSP 組與非 GSP 組均很少使用符號策略，但在非 GSP 組中，符號的使用具關鍵意義

本題解題過程中，兩組均沒有運用到符號運算，符號僅用於命名或標記，而且次數很少(表 4-2-8)。原因可能在於平行軸出現之後所喚起的知識多和幾何知識有關，思考方式則偏向圖形關係或命題思考的推理上，因此不需要以符號進行運算，符號僅用來表示幾何物件或是幾何量的標記。

但在非 GSP 組中，符號的使用卻具關鍵意義，丙生對於符號的命名與標示隨著理解題意改變，尤其當丙生將表示  $\angle DBE$  的符號  $\alpha+\beta$  拆成  $\alpha$  與  $\beta$  時，顯示其更深入理解題意；丁生唯一一次使用符號時，亦是透過符號理解問題，進而確認平行軸的存在(詳見 p.93)。

表 4-2-7：第二題 GSP 組與非 GSP 組符號策略之次數分配

符號策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	甲生	乙生	丙生	丁生
命名	2	0	2	0
標記	0	0	2	1
總計	2	0	4	1

(四) 解題策略受表徵方式的影響較大，解題環境所造成的差異較小

在本題中，丙生與丁生以概念表徵兩倍關係，透過符號進行演繹推理活動，利用重新畫圖理解問題。GSP 組的甲生以對稱觀點表徵兩倍關係，甲生善用 GSP 所提供的作圖工具，而非實驗工具，視覺策略的使用多偏向維持視覺清晰性，在啓思策略上也多以邏輯演繹為主。因此甲生呈現的表徵數量、表徵轉換方式、解題時間與啓思策略使用方式較類似非 GSP 組的表現。這說明表徵方式影響策略，解題環境所造成的差異較小。

相較之下，乙生意圖以 GSP 所提供的實驗工具，同時表徵五邊等長與兩倍關係，因此可能多偏向具實驗特質的啓思策略，如：猜測、嘗試錯誤，在操作 GSP 上，則多運用探索實驗功能為主的策略，如：測量、計算與拖曳。

暫時打破 GSP 與非 GSP 的分組方式，從實驗特質與理論特質的觀點重新將解題策略分成實驗特質與理論特質的解題策略，並且將甲生與非 GSP 組成員排在一起，將相關結果彙整如表 4-2-7，可以此說明表徵對於策略的影響，遠超過工具(環境)對於策略的影響。

表 4-2-8：第二題以實驗與理論特質分類的解題策略次數分配

解題策略類型		乙生	甲生	丙生	丁生
實驗 特質	嘗試錯誤	2	0	1	0
	猜測	2	1	0	1
	測量計算拖曳	8	1	0	0
	總計	<b>12</b>	2	1	1
理論 特質	重新畫圖	2	2	3	2
	符號策略	0	2	4	1
	邏輯演繹	0	5	2	3
	總計	2	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>6</b>

## 五、反思行爲

比較使用與不使用 GSP 的解題過程中所產生的反思行爲，有以下兩點結論(參考表 4-2-9)：

1. 非 GSP 組形成中間值軸表徵的時間很早，解題時間短，顯示解題過程中順利，因此反思行爲很少(平均 2 次)；
2. 乙生的反思行爲最多且以質疑與結果預見兩項最多，和其所採以探索實驗為主的解題策略可能有關；

表 4-2-9：第二題 GSP 組與非 GSP 組所產生的反思行為類型與數目

反思行為類型		GSP 組		非 GSP 組	
		甲生	乙生	丙生	丁生
覺知	個人覺知	0	0	1	0
	任務覺知	2	1	0	0
	策略覺知	1	1	0	0
	小計	3	2	1	0
評估	結果預見	0	4	0	0
	質疑	3	10	0	0
	回顧	2	2	1	1
	小計	5	16	1	1
校正	發生偵錯事件	0	2	0	0
	重新改變作法	1	2	0	1
	小計	1	4	0	1
總計		9	22	2	2

針對反思行為與解題策略之關係加以說明：

以乙生為例，其反思行為最多且以質疑與結果預見兩項最多，和其所採以探索實驗為主的解題策略可能有關。滑鼠拖曳過程中螢幕呈現許多訊息，通常訊息以圖形外觀變化、數據或顏色改變呈現，解題者需針對各種訊息立即回應，採取後續動作，移動速度慢，單位時間內得到的訊息少，移動速度快，則可能讀取不及，因此在拖曳過程中，需針對滑鼠的移動方向與速度進行評估，甚至考慮改變拖曳頂點等問題。

表 4-2-10 彙整乙生反思行為與解題策略所發生的次數與時間點，每格約為 1 分鐘，塗成黑色部分的格子中表示其中產生一次相關的反思行為或策略。在 33 分鐘的解題過程中，出現 10 次質疑及 4 次結果預見的反思行為，其中 4 次質疑以及 2 次結果預見和拖曳過程有關(表 4-2-10)。以本題為例，拖曳過程需要讓  $\angle ABC$  與  $\angle EBD$  的比值接近於 2，但常事與願違，因此需要適當評估，以乙生的口語為例，在拖曳過程中曾經對於結果與方法產生質疑以及能對於預估相關策略施行的結果：

210166 怎麼又變大啊 [結果的質疑]

210123 這樣我要怎麼...怎麼固定那一點啊? [方法的質疑]

210165 可是怎麼好像看都看不出來耶 [無法預見結果]

表 4-2-10：第二題乙生反思行為與解題策略之類型統計

時間		00:00~09:39	09:39~14:21	14:21~20:11	21:11~23:49	23:49~32:37
任務		表徵等長五邊形 (失敗)	表徵等長五邊形 (失敗)	成功表徵等長五邊形	維持等長	表徵五邊等長及二倍關係
反思	質疑	1	1	1	1	1
	預見					
	其它					
策略	啟思策略					
	拖曳					
	測量計算					

## 六、小結

在本題中，使用 GSP 的解題者(乙生)耗費心力在思考各邊等長之五邊形的作圖問題上、拖曳頂點與觀察角度測量結果的比值上，而忽略題目中『兩倍關係』的幾何意涵，因此造成解題時間增長，本題係為熟練 GSP 的解題者所設計的作圖問題，作圖難度較高，可能增加解題時間，因此本題 GSP 組的解題者時間較長且無法正確理解問題結構。

GSP 組甲生的解題時間、表徵數目、表徵轉換方式與解題策略的使用和非 GSP 組的解題表現相似，反而和同為使用 GSP 的乙生差距較大，造成差異的原因在於表徵問題的方式而非解題情境。結果顯示，如果以實驗探索方式使用 GSP 則可能偏向使用測量、計算與拖曳策略，啟思策略則以猜測、嘗試錯誤為主，反思行為以質疑、結果預見居多。在解題中應用 GSP 精確作圖的特性，則可能偏向使用變色、增刪線段等視覺策略，啟思策略則以演繹、逆推為主，反思行為可能以偵錯、策略評估為主。

GSP 精確作圖的特性可能對於解題是一種障礙，以本題為例，不論是甲生偏向理論的作法或是乙生偏向實驗的作法，要以作圖方式得到等長五邊形均耗費心力，

而且作圖完畢之後，尚無法從中獲得解題資訊，無助於解題。況且解題時並不一定需要精確的圖(Polya, 1957)，以丙生與丁生為例，圖形是觸發相關幾何知識的媒介，從圖中能獲得解題資訊，理解問題，理解之後重新改變圖形(重新畫圖)，圖形則能逐步接近問題情境，即使不夠精確，還是能適當表徵題意，成功解題，這顯示圖形的表徵功能勝於精確性，只要在可辨認的情況下，圖形通常能發揮作用。若過度聚焦於測量的精確性上，可能忽略尋找合適表徵的重要性。

### 第三節 第三題解題表現與分析

為瞭解 GSP 的視覺操弄功能是否有助於探索問題情境，本題特別設計一個需要經由複雜作圖以進行證明的題目，其中有多組交疊的平行線與平行四邊形且涉及多組垂心之間的連線，在視覺上容易造成干擾。題目如下：

令  $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$  分別為  $\triangle ABC$  的三個高，點 K、M 及 N 分別為  $\triangle AEF$ 、 $\triangle BFD$  及  $\triangle CDE$  的垂心。試證： $\triangle KMN \cong \triangle DEF$ 。

#### 一、問題特色

本題關鍵在於發現隱藏於題目中的平行六邊形。解法大致如下(圖 4-3-1)：

1. 由公垂線關係可找出三組三條平行線(如：FM、EN 與 AD)；
2. 兩組平行線可決定一個平行四邊形，因此四邊形 KEHF、FHDM 與 ENDH 為平行四邊形；
3. 平行四邊形對邊平行且相等，因此  $KE=FH$  且  $FH=MD$ ，則  $KE=MD$ ，又由 1. 知 KE 平行 MD(公垂於 AB)，則四邊形 KEDM 為平行四邊形，可推得  $KM=ED$ ；
4. 同理，由 1 可知 FM 平行 EN，由 2. 可知  $FM=HD$  且  $HD=EN$ ，因此四邊形 FMNE 為平行四邊形，可推得  $FE=MN$ ；
5. 同理，四邊形 KFDN 為平行四邊形，可推得  $FD=KN$ ；
6. 由 3, 4, 5 可知， $KM=ED$ ， $MN=FE$  且  $FD=KN$ ，故  $\triangle KMN \cong \triangle DEF$ (SSS)。

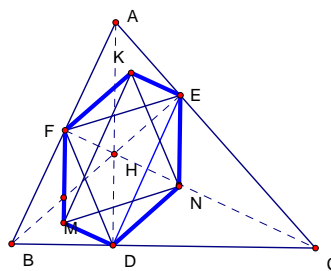


圖 4-3-1：第三題關鍵：平行六邊形之表徵

上述證明關鍵是從公垂關係發展出平行關係，解題者必須能觀察或推論出圖中和三邊垂直的三組平行線構成三個平行四邊形：平行四邊形 KEHF、平行四邊形 FHDM 與平行四邊形 ENDH，而垂心 H 恰為這三個平行四邊形的交點，這三個平行四邊形被”包含”在平行六邊形 KENDMF 中，卻是證明平行六邊形 KENDMF 對邊等長的基礎，對邊等長的平行六邊形能夠決定三組平行四邊形(平行四邊形 KEDM、平行四邊形 KFDN 與平行四邊形 FMNE)，而三組平行四邊形提供三組等長的對邊(KM=ED、MN=EF 與 KN=FD)，可由此證明全等(SSS)。

爲了方便解釋，則將平行四邊形 KENH、平行四邊形 FHDM 與平行四邊形 ENDH 稱爲**內部平行四邊形**；將平行四邊形 KEDM、平行四邊形 KFDN 與平行四邊形 FMNE 稱爲**外部平行四邊形**。

## 二、解題時間

由於乙生一開始即採用解析幾何之方法嘗試計算垂心座標，一直未能成功，約 28 分鐘時宣告放棄，因此，該生之資料未納入本題之比較分析。彙整 GSP 組甲、丁二生與非 GSP 組之丙生之解題特徵時間，如表 4-3-1 所示：

表 4-3-1：第三題 GSP 組與非 GSP 組解題特徵出現之時間點

解題特徵	GSP 組		非 GSP 組	
	甲生	丁生	乙生	丙生
完成草圖	(1) 03:51	(1) 09:25		(1) 03:59
發現二條平行線	(2) 12:06	(2) 12:09	-	(2) 09:10
發現三條平行線	-	(3) 12:13	-	(3) 09:25
發現內部平行四邊形	(6) 25:38	(6) 31:42	-	(4) 15:30
利用垂心連結對邊	(7) 28:09	-	-	(5) 16:46
發現平行六邊形	(3) 21:02	-	-	(6) 17:52
發現外部平行四邊形	(4) 21:57	(4) 26:25	-	(7) 19:42
指出全等	(5) 23:42	(5) 27:55	-	(8) 20:08
證明完成	28:35	35:29	-	20:08

根據表 4-3-1 之結果，有下列發現：

1. 非 GSP 組(丙生)得到答案的時間(約 20 分鐘)比 GSP 組(平均時間約 32 分鐘)來得短(約少 12 分鐘)，主要原因是丙生掌握平行概念的時間較早，到下一個重要發現(發現內部平行四邊形)的時間較其他兩人短；
2. 就個人解題特徵出現的時間差而言，丙生在發現三組平行線到發現內部平行四邊形的時間最長(約 6 分鐘)，甲生在發現兩組平行線到發現平行六邊形的時間最長(約 9 分鐘)，丁生在發現兩組平行線到發現外部平行四邊形的時間最長(約 14 分鐘)，非 GSP 組的丙生時間差較小是因為丙生能夠善用平行關係，獲得有效的推論，而 GSP 組的解題者仍利用 GSP 嘗試各種可能；
3. 針對內部平行四邊形(簡稱「內」)、外部平行四邊形(簡稱「外」、平行六邊形(簡稱「六」)及說明全等(簡稱「全」)四個解題特徵的順序來比較，丙生(非 GSP 組)的順序為「內→六→外→全」，而甲生(GSP 組)的順序為「六→外→全→內」，丁生(GSP 組)沒有發現平行六邊形的存在，順序為「外→全→內」，解題特徵出現順序的差異受 GSP 的影響，GSP 所提供的視覺資訊超越演繹邏輯的順序，跳過「內部平行四邊形」的發現，直接以外部平行四邊形說明全等時，發現無法成功解釋，必須重新尋找內部平行四邊形做為推理的基礎；
4. 「跳躍而折回」的論證方式使得解題時間延長，丙生歷經「內→六→外→全」的順序約 4.5 分鐘，甲生歷經「六→外→全→內」至證明完成的時間約 6 分鐘，丁生歷經「外→全→內」至證明完成的時間約為 9 分鐘，這些數據得以說明丙生解題時間較短的原因。
5. 丁生完成草圖的時間較同組的甲生約多 6 分鐘，除了操作的熟練與作圖技巧之外，丁生在操作過程中曾經出現 3 次失誤，多次以拖曳方式調整圖形以維持視覺的可辨性及符合視覺習慣(口語資料：340072)，甲生在操作過程中並無錯誤，僅在最後階段以拖曳調整圖形。

### 三、表徵與表徵轉換

本段分成三部分，第一部分說明 GSP 組與非 GSP 組所產生表徵數量與類型的差異，第二部分說明 GSP 組與非 GSP 組所產生表徵轉換之類型的差異，第三部分說明使用 GSP 對於形成表徵的影響。

#### (一) 表徵

彙整解題過程中所產生的表徵數量與類型表徵轉換方式，如表 4-3-2 所示：

表 4-3-2：第三題 GSP 組與非 GSP 組在各表徵類型之次數分配

表徵類型	GSP 組			非 GSP 組		
	甲生	丁生	平均	乙生	丙生	平均
草圖	7	5	6	-	1	-
符號關係	0	0	0	-	0	-
演繹陳述	3	1	1	-	7	-
總計	10	6	7	-	8	-

由上表有以下發現：

#### 1. 非 GSP 組(丙生)多以演繹陳述呈現表徵

丙生多以演繹陳述呈現表徵，原因有二：一是丙生已掌握題意中垂直與平行關係；二是視覺困擾，必須以邏輯演繹為主要推論工具。

丙生在開始解題時即已體會到本題的意義在於平行關係，這是他對題意更深層的理解，他認為”每邊都有三條平行線，看要怎麼用”(口語資料：230037)，因此丙生掌握垂直關係(垂心)所造成的平行關係後，則多以演繹推理為主；以演繹推理為主的另一個原因是視覺上的困擾，必須以演繹推理確認或反駁視覺推論，推論才得以繼續，有以下的口語資料為證：

230056 應該就是這樣，好亂喔 [視覺上的困擾]

230066 好像都會平行的感覺，嗯...[視覺上的推論]

230066 應該這些都 平行平行 [演繹推理的確認]

表 4-3-3：第三題丙生（非 GSP 組）的表徵形式與轉換過程

表徵概述	表徵形式	表徵變換	呈現方式
A：依題意繪製草圖	1-1		
		2-1-1	
B <sub>1</sub> ：以演繹陳述方式表徵題意之三平行線關係	1-3		每邊都有三條平行線，看要怎麼用(230037)
B <sub>2</sub> ：以演繹陳述表徵題意之平行與垂直關係	1-3	2-1-1	只有平行和垂直的關係而已(230052)
C：以演繹陳述說明 FMHD 為平行四邊形	1-3	2-1-2	以原案 230069 陳述
D：以演繹陳述方式說明垂心的新意義(三平行四邊形交點的新認識)	1-3	2-1-2	這是垂心嘛(230084)
E：以演繹陳述方式陳述平行六邊形有三組等長的對邊	1-3	2-1-2	因為這有三個式子 可以這樣列(230091)
F：以演繹陳述方式說明夾角相同並以此推出 KM=ED	1-3	2-1-1	以原案 230100, 230102 陳述
G：以演繹陳述說明全等(證明完成)	1-3		以原案 230108 陳述

註：表徵形式與轉換代碼請參見表 3-6-1 及 3-6-2

## 2.GSP 組多以圖形呈現表徵，表徵數量則呈現組內差異

甲生的表徵數目有 10 個(見表 4-3-4)，其中有 7 個表徵以圖形呈現。完成草圖後，除了利用 GSP 測量結果或彙整資訊之後以演繹陳述說明全等外，大多數的時間皆利用 GSP 所提供視覺工具進行圖形操弄，因此呈現表徵的方式多以圖形居多。

丁生的表徵數目有 6 個(見表 4-3-5)，除了以演繹說明全等之外，其他多以圖形呈現表徵(5 次)。他是以三條平行線的核心想法出發(表徵 B)，經過考慮之後，將三條平行線縮減為兩條(表徵 C)，這個圖類似平行六邊形，但丁生並沒有繼續深入討論，利用測量結果確定 EFNM 為平行四邊形(表徵 D)，在說明全等之後，自認為外部平行四邊形成立的理由並不充分，發掘並確認內部平行四邊形與外部平行四邊形關係(表徵 F)。丁生形成表徵數目較少的原因在於直接利用測量結果確定 EFNM 為

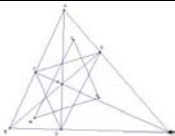


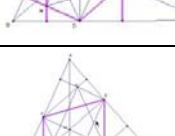

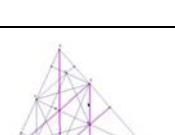
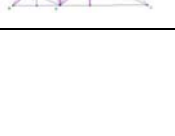
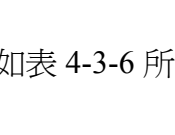

平行四邊形(表徵 D)，並將這個結果類推，得到全等證明，丁生很少的”代價”獲得關鍵的表徵，省去操弄圖形的過程，因此表徵數目較少。

表 4-3-4：第三題甲生（GSP 組）的表徵形式與轉換過程

表徵概述	表徵形式	表徵變換	呈現方式
A：依題意繪製草圖	1-1		
		2-1-2	以原案 310074 陳述
B：從測量結果以演繹陳述方式說明 SAS 全等	1-3	2-1-3	
		2-1-2	
C <sub>1</sub> ：以圖示兩平行線(梯形)關係	1-1	2-1-2	
		2-1-2	
C <sub>2</sub> ：以圖示兩平行線間之相似三角形	1-1	2-1-3	
		2-1-3	
C <sub>3</sub> ：以圖示兩平行線(梯形)關係	1-1	2-1-2	
		2-1-2	
D：以圖示平行六邊形	1-1	2-1-2	
		2-1-2	
E：以圖示外部平行四邊形	1-1	2-1-2	
		2-1-2	
F：以演繹陳述指出全等	1-3	2-1-3	以原案 310174 ~ 310191 陳述
		2-1-3	
G <sub>1</sub> ：以圖示內部平行四邊形	1-1	2-1-2	
		2-1-2	
G <sub>2</sub> ：以演繹陳述三線段等長 (證明完成)	1-3		補充說明外部平行四邊形成立的理由

註：表徵形式與轉換代碼請參見表 3-6-1 及 3-6-2

表 4-3-5：第三題丁生（GSP 組）的表徵形式與轉換過程

表徵概述	表徵形式	表徵變換	呈現方式
A：依題意繪製草圖	1-1		
		2-1-1	
B：以圖形表示每邊都有三條平行垂線	1-1		
		2-1-2	
C：以圖形表示每邊都有兩條平行垂線(平行六邊形的雛型，但丁生沒有繼續深入探討)	1-1		
		2-1-3	
D：彙整測量結果，以圖形表示四邊形 EFN M 為平行四邊形	1-1		
		2-1-2	
E：以演繹陳述指出全等	1-3		
		2-1-3	
F：以圖形表示內部平行四邊形與外部平行四邊形關係 (證明完成)	1-1		

(二) 表徵轉換

彙整解題過程中所產生的表徵轉換的數量與類型式，如表 4-3-6 所示：

表 4-3-6：第三題 GSP 組與非 GSP 組在各表徵轉換之次數分配

表徵轉換類型	GSP 組			非 GSP 組		
	甲生	丁生	平均	乙生	丙生	平均
等價變換	0	1	0.5	-	3	-
整併	6	2	4	-	4	-
突變	3	2	2.5	-	0	-
總計	9	5	7	-	7	-

由上表有以下發現：

## 1.非 GSP 組(丙生)表徵轉換形式以「整併」型居多，沒有出現以「突變」型

丙生掌握垂直與平行關係之後，表徵轉換的方式即以「整併」型居多，並沒有出現「突變」型，這是因為丙生在推理過程中持續深入探討平行關係，透過整併資訊而增進理解問題，沒有改變觀點。

丙生整併平行關係之後形成平行四邊形表徵 C(參見表 4-3-3)，發現三個內部平行四邊形的交點為垂心 H 之後，垂心有新的意義與功能(形成表徵 D)，垂心能夠連結平行六邊形的三組對邊，在證明平行六邊形對邊等長時扮演重要角色，形成對邊等長平行六邊形表徵(表徵 E)之後，剩下一小步即完成證明。這些過程中，丙生需要整併諸多資訊，才能形成更進一步的理解。

延續平行關係，他利用兩組平行線夾等角(表徵 F)與兩組對應邊等長的性質證出一組邊長相等： $KM=ED(\triangle FMK \cong \triangle DNE, SAS)$ ，同理可得  $KN=FD$  與  $MN=FE$ ，即可證明  $\triangle KMN \cong \triangle DEF(SSS)$ 。在測後訪談中，丙生以圖 4-3-2 呈現他的想法，他將平行六邊形的一組對邊向外延伸成為平行四邊形(如圖 4-3-2 的外框所示)，利用平行四邊形對角相等性質得到  $\angle END = \angle KFM$ 。丙生透過整併資訊增進對於問題的理解，他不僅看內部平行四邊形與外部平行四邊形，更發現延長邊長所形成的平行四邊形，這是在 GSP 組中不會出現的例子。

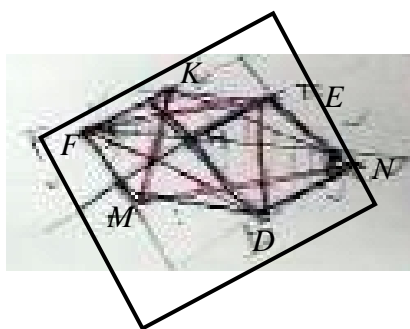


圖 4-3-2：丙生第三題的表徵 F(研究者依題意加入頂點標記)

## 2.GSP 組表徵轉換形式亦以「整併」型居多，但出現「突變」型

甲生的表徵數目有 10 個(見表 4-3-4)，表徵轉換過程中有 6 次「整併」型，3 次「突變」型。以其中 4 個表徵為例，甲生發現兩平行線表徵(表徵  $C_1$ ，圖 4-3-3A)

之後，即嘗試各種可能組合，以理解題問題，他曾短暫聚焦於兩平行線中的相似三角形(表徵  $C_2$ ，圖 4-3-3B)，後來又鎖定梯形  $FF'DH$ (表徵  $C_3$ ，圖 4-3-3C)，表徵  $C_1$  到表徵  $C_3$  的轉換即是遵循著核心想法：在兩平行線間尋找可能的表徵方式。

平行六邊形  $FMDNEF$  的發現(表徵  $D_1$ ，4-3-3D)雖然受到梯形表徵( $C_3$ )的影響，但這是一個「突變」型的表徵轉換，是經過視覺操弄(Duval,1998)之後所得到的，以下口語原案可知：

(甲生，2007,3,15)

嗯...就從那個梯形(圖 4-3-3C)發現...我就試著把梯形四個點都連起來，然後發現..好像看到一個平行四邊形( $FHDM$ )，那我就..試著畫出其他線啊.....就是..不同方向的垂線，然後..就...畫出一個很大的平行六邊形 (口語資料：210147~210158)

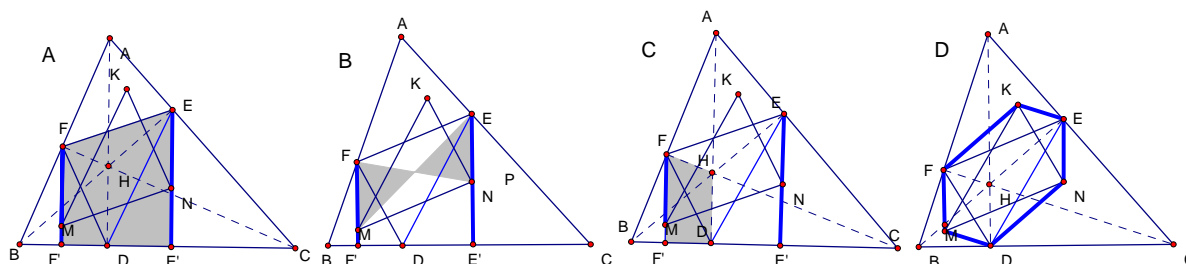


圖 4-3-3：甲生發現平行六邊形的表徵演進過程

從上述原案語句”看到”、”看起來像”中判斷出甲生圖中的發現平行六邊形是由視覺主導的，並嘗試對圖形進行各種分解與組合而產生的結果，只是甲生並沒有提供演繹的解釋。「突變」型表徵轉換呈現在表徵的外觀與核心的表徵觀點上；從外觀上，表徵  $C_3$  到表徵  $D_1$  即呈現巨大的變化；同時，在兩平行線間尋找可能表徵方式的核心想法已經遭到棄置，取而代之的是在平行六邊形中尋找可能的表徵方式。這一層躍進對於理解問題幫助很大，但是對於說服與證明可能沒有幫助，例如：使用 GSP 的解題者必須透過內部平行四邊形與垂心重新表徵平行六邊形，才能在後

續的演繹推論中，發揮效果，這個躍進的過程，需要有更多的演繹推論加以支持，使用 GSP 的解題者則必須填補這一層空缺。

丁生表徵轉換過程中亦出現 2 次「突變」型。一次是在指出全等之後(表徵 E，表 4-3-5)，重新尋找內部平行四邊形與外部平行四邊形的關係；另一次則是出現在表徵 C 和表徵 D 的轉換之間(表 4-3-5)。以下篇幅將詳述這一次轉換的過程：丁生將每邊三條平行線(表徵 B)的想法縮減成每邊兩條平行線，嘗試在每邊兩條平行線的情況下理解問題(表徵 C，圖 4-3-4A)，這個圖具有平行六邊形的雛型，如果繼續深入探討，可由此完成證明；丁生是在圖 4-3-4A 的各種子圖尋找可能組合，猜到其中可能有平行四邊形，他中斷推理活動，直接利用 GSP 所提供測量結果作為推論的依據，以測量結果說明四邊形 EFNM 為平行四邊形(表徵 D)。這一次轉變除了在圖形外觀上有變化，還帶有猜測成分：

340160 就是..對...我就是從這個圖形中，就覺得...這裡好像有一個...平行四邊形..很像平行四邊形的東西，就去量量看，結果發現它真的長度是一樣的

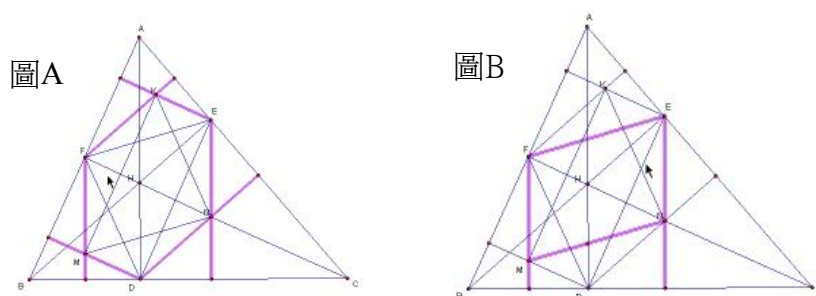


圖 4-3-4：突變型表徵轉換(以丁生為例)

### (三)使用 GSP 對於形成表徵與表徵轉換的影響

本題中，使用 GSP 的解題者多數以圖形呈現表徵，亦出現多次「突變」型表徵轉換(共 5 次)，出現「突變」型表徵轉換有兩個時機：一是指出全等之後需要重新解釋，因此產生「突變」型的表徵轉換；二是彙整視覺資訊後，產生思考過程跳躍的「突變」型表徵轉換。第一類「突變」型表徵轉換是因為使用 GSP 的解題者

常常在指出結果之後，才增補演繹解釋，因此會產生這一類型的表徵轉換；第二類「突變」型表徵轉換是因為 GSP 能夠提供豐富的視覺資訊，視覺資訊(圖象)展佈於平面，每個元素都可任意相互連結(Larkin & Simon, 1987)，尤其在思路受阻時或是沒有想法時，解題者可能嘗試任意組合與連結，帶著運氣成分下，常會有「突變」型表徵轉出現。

#### 四、過程策略

彙整 GSP 組與非 GSP 組解題過程中所使用的解題策略，如表 4-3-7 所示：

表 4-3-7：第三題 GSP 組與非 GSP 組解題策略之次數分配

解題策略類型	GSP 組		非 GSP 組
	甲生	丁生	丙生
啓思策略	6	8	7
符號策略	1	0	0
視覺策略	20	8	6
GSP 特殊策略	4	3	0
總計	31	19	13

由上表，有以下發現：

##### (一) GSP 組與非 GSP 組採用啓思策略之數量差異很少

GSP 組與非 GSP 組採用啓思策略之數量差異很少(表 4-3-8)，由於要求 GSP 組以演繹方式提供解釋，因此甲丙丁三人邏輯演繹策略次數接近(表 4-3-8)，僅在於呈現順序不同，GSP 組大部分邏輯演繹出現在提供答案之後的演繹解釋上。

甲丙丁三人的解題過程中，均涉及下列 4 個解題特徵：發現內部平行四邊形、外部平行四邊形、平行六邊形與說明全等，而經歷這 4 個特徵至少須歷經 3 次演繹推理。丙生(非 GSP 組)四個解題特徵點出現的順序為「內→六→外→全」，至少代表 3 次演繹推理過程，甲生(GSP 組)的順序雖為「六→外→全→內」，「六→外→

全」代表 2 次演繹推理的過程，在指出全等之後，以另外 1 次的演繹推理補足平行六邊形對邊等長的證明，丁生雖然沒有明確說出平行六邊形的存在，不過出現類似表徵(表徵 C，參見表 4-3-5)，在以外部平行四邊形說明全等之後，仍至少需要 2 次演繹推理才得以補充先前推論理由不夠充足之處，因此不論 GSP 組與非 GSP 組皆至少需歷經 3 次演繹推理。以上說明，顯示解題環境不同，但解題特徵近似的情況下，啓思策略使用情況與數目亦接近。

表 4-3-8：第三題 GSP 組與非 GSP 組啓思策略之次數分配

啓思策略類型	GSP 組		非 GSP 組
	甲生	丁生	丙生
嘗試錯誤	0	2	0
猜測	1	2	2
演繹邏輯	5	4	4
從答案逆推	0	0	1
總計	6	8	7

(二) 在符號策略之使用上，僅有 GSP 組之甲生出現一次，其餘受試者均未採用

甲生出現的一次標記，僅爲了標示一個特殊位置，並沒有參與解題的推理過程，因此，可視爲三人都沒有用到符號策略。本題不需要利用符號參與推理的理由有三：一、丙生(非 GSP 組)在解題初期時即掌握平行關係，所引發的幾何知識多和平行、平行線與平行四邊形有關，因此解題朝幾何推理的方向前進，而非藉助符號推理；二、證明全等的問題，通常不需要符號；三、垂心問題不適合座標化，不需要引入符號建立座標。

(三) GSP 組所採取之視覺策略顯然較非 GSP 組爲多

甲生使用視覺策略次數特別高(20 次，表 4-3-7)，其中 16 次(表 4-3-9)爲使用變換樣式的策略。由於甲生以區塊或線條的顏色變化呈現部分表徵變換的過程，因此隨著甲生表徵數目而增加，本題中，甲生出現 10 個表徵，可解釋變換樣式的策略使用次數高達 16 次的情況。

表 4-3-9：第三題 GSP 組與非 GSP 組視覺策略之次數分配

視覺策略類型	GSP 組		非 GSP 組
	甲生	丁生	丙生
重新畫圖	0	0	2
增刪部份圖形	3	6	0
調整圖形	1	0	0
變換樣式	16	2	4
總計	20	8	6

丙生使用視覺策略的次數並不多，但兩次重新畫圖，均發揮重大功用。重畫的目的在維持圖的簡約性(Lowe, 1994)，重要的部份會被保留，不必要的部份將被刪去。丙生第二次重新畫圖為例，該次重畫圖約在解題開始 13 分鐘半左右，他保留題目中的平行特徵，重畫過程中，連三角形的外框被省略了，只擷取三組三條平行線(圖 4-3-5B)；重畫過程除了維持圖形的簡約性之外，過程中亦發現新訊息，丙生找到多組平行四邊形(內部平行四邊形)且確認垂心就是這些平行四邊形的交點，這個發現使得垂心有更深層的意義，它不只是三高交點，也是證明全等的重要依據。

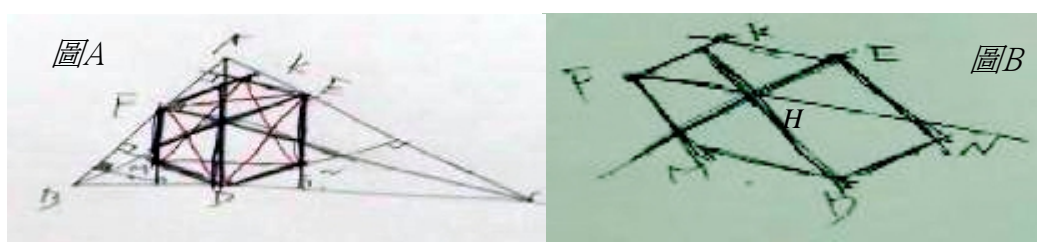


圖 4-3-5：丙生的視覺策略(重新畫圖)

除了從統計資料中發現各種解題策略實施情況之外，研究者觀察到下列現象和  
解題策略的使用有關：

(一)、GSP 組均在指出全等之後，才以演繹邏輯說明全等

GSP 組均在指出全等之後，才以演繹邏輯說明全等。以丁生為例，第一次使用演繹邏輯是在指出全等之際：

340148 (四邊形 FMNE)這根本就是...平行四邊形啊

340156 另外一個方向應該是...這裡是平行四邊形 (指的是四邊形 KEDM)

340158 然後就等於三個方向應該有三個平行四邊形，那就...可以知道它們...長度都一樣了，所以是...全等.....

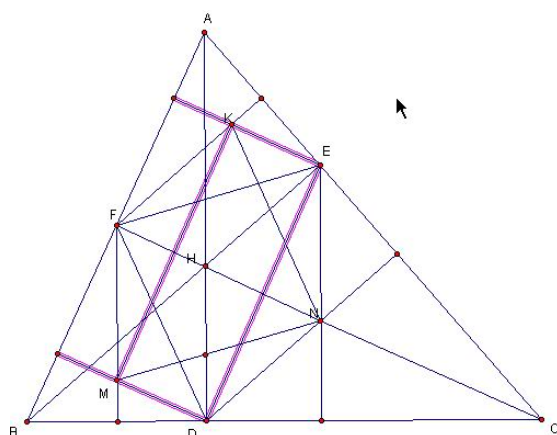


圖 4-3-6：丁生發現平行六邊形的表徵演進過程

之後，丁生以演繹邏輯解釋四邊形 FMNE 是平行四邊形(第二次)，四邊形 FMNE 是平行四邊形的理由是因為  $FM=EN$  且  $FM$  平行  $EN$ ， $FM$  平行  $EN$  是基於兩線段皆公垂於  $BC$ ，而  $FM=EN$  是因為四邊形  $FMDH$  與  $HDNE$  為平行四邊形，因此丁生必須為四邊形  $FMDH$  為平行四邊形的事實基礎提出第三次的演繹證明。由此可知，GSP 組指出全等之後，才開始進行演繹推理，是因為資訊的蒐集已經告一段落，已經有足夠的資訊呈現演繹推理的理由，再者，由於解題活動已經進行一段時間，有足夠時間重新整理資訊，調整順序以演繹邏輯陳述證明。

## 五、反思行爲

彙整 GSP 組與非 GSP 組解題過程中所產生的反思行爲，如表 4-3-10 所示：

表 4-3-10：第三題 GSP 組與非 GSP 組所產生的反思行為類別與數目

反思行為類別		GSP 組		非 GSP 組
		甲生	丁生	丙生
覺知	任務覺知	0	0	1
	策略覺知	0	1	0
	小計	0	1	1
評估	結果預見	0	1	4
	質疑	2	1	1
	回顧	1	1	2
	小計	3	3	7
校正	發生偵錯事件	2	1	2
	嘗試另類解法	0	1	0
	重新改變作法	1	1	1
	小計	3	3	3
總計		6	7	11

由上表有以下發現：

1. GSP 組反思行為出現之次數略少於非 GSP 組；
2. 非 GSP 組採取之評估行為較多。

非 GSP 組(丙生)採取之評估行為較多，有可能是由於丙生個人特質所造成的。丙生在解題過程中，產生 11 次的反思行為，細查丙生 11 次反思行為後發現，這些行為大概分成兩類：一類是和圖形的複雜度，係針對複雜圖形所產生事前評論(預見)或事後評論(回顧)以及重新畫圖時所發生的偵錯事件與評估行為(6 次)，如：

230012 發現 非常亂 [預見]

230050 這角度好像都不太好找 [預見]

230050 應該就是這樣 好亂喔 [回顧]

另一類是針對平行觀點的評論，包括對於平行、平行四邊形或平行關係的察覺與評估(5 次)，例如：

230066 好像都會平行的感覺 嗯 [預見]

230035 然後這邊有很多平行線 [回顧]

230076 好多平行四邊形 [回顧]

230052 對啊 因為它只有平行和垂直的關係而已 [任務覺知]

而這兩類評論都和 GSP 的使用有間接關係。丙生沒有使用 GSP 必須更謹慎小心處理圖形，常針對圖形的辨識程度進行評估，是否需要重先畫圖或是能否順利提取資訊；另一方面，沒有 GSP 的視覺協助，丙生必須以偏向演繹的方式，深入理解題目內涵，尤其是在掌握題目只有“平行與垂直關係時(口語資料：230052)”，需隨時針對各類有關平行的資訊進行評估，以作為後續決策之用，因此針對平行所產生的反思行為亦多。

GSP 組的反思行為較少，分布零散，有些項目僅有 1 次或 0 次，可視為個別的偶發事件，並不是由某一個共同因素造成，以甲生為例，其產生 6 次反思行為的原因皆不同，並沒有出現丙生的情況：11 次反思行為可歸類為兩個和 GSP 使用的相關因素，這顯示：某些因素促使不使用 GSP 的解題者發生反思行為。

## 六、小結

在本題中，GSP 組與非 GSP 組(丙生)之解題特徵出現的順序不同，非 GSP 組解題特徵出現依序為：內部平行四邊形、平行六邊形、外部平行四邊形及說明全等，大致上依循演繹邏輯的順序，表徵出現方式多以演繹陳述為主，並在陳述之後輔以圖形說明，表徵轉換方式則無「突變」型；GSP 組解題特徵出現的順序為：平行六邊形、外部平行四邊形、說明全等、內部平行四邊形，其中演繹推理活動集中在說明全等之後；產生平行六邊形表徵，可能是一個突變的過程(對甲生而言)，這個順序說明 GSP 提供的視覺環境中，資訊能夠任意連結(Larkin & Simon, 1987)，可能改變演繹發現的順序；儘管如此，本研究要求受測者以演繹方式提供解釋，因此本題邏輯演繹策略次數接近，僅在於呈現順序有所不同。

本題特別設計一個複雜的圖在視覺上干擾解題者，其中有多組交疊的平行線與平行四邊形且涉及多組垂心之間的連線，以瞭解 GSP 是否有助於探索問題情境。理論上，GSP 的使用者會使用較多的視覺策略，從操弄圖形過程中理解問題。從結果來看，數據顯示 GSP 組雖使用較多的視覺策略，但可能是由甲生特殊使用所造成的結果；丙生多以演繹陳述表徵問題，故能以演繹推理輔助視覺環境之不足，解題時間沒有因為不使用 GSP 而變長。沒有輔助工具的情況下面對複雜的圖形，使得丙生的反思行為增加，從口語資料所呈現的內容可知，丙生必須時常針對圖形的辨識程度進行評估，由於丙生理解平行關係的重要性，因此時常評估各類有關平行的訊息，作為決策之用，以致反思行為多。

本題和第一題皆為求證題，發現 GSP 組的解題者演繹推理活動均出現在後期，第一題是產生五點共圓表徵之後到證明之間，本題則出現在指出全等之後到說明全等之間；演繹推理所發生的次數相近，第一題皆為 6 次，本題則僅差 1 次。

在第二題中，使用 GSP 可能誘使解題者過度聚焦於計算與測量的執行與搜尋，而忽略尋找合適表徵的重要性。在本題中，亦看到類似的結果，使用 GSP 的解題者(丁生) 出現較多次的嘗試錯誤與猜測策略(共 4 次)，從解題特徵出現的順序亦可判斷 GSP 的解題者僅執行操作式理解而忽略以數學理論進行論述式理解(Duval, 1998)。

## 第四節 第四題解題表現與分析

為瞭解軟體直接呈現結果對於問題表徵形成方式、解題策略與反思行為所造成的影響，因此設計本題。第四題題目如下：

正三角形  $ABC$  中內部一點  $P$ ，若  $\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$ ，求  $\angle APB = ?$

本小節先說明問題特色，然後依序按解題時間、表徵與表徵轉換、過程策略、反思行為等四個部分說明 GSP 組與非 GSP 組學生之解題表現。

### 一、問題特色

本題解法大致如下：

1. 以  $A$  為頂點，將  $AP$  旋轉  $60^\circ$  之後的得到  $AP'$ ，連接  $PP'$  後可得：  
 $\triangle AP'B \cong \triangle APC$  (SAS)，則  $PB = P'C$ ；
2. 因  $\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$ ，由 1 可得  $\overline{PP'}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{BP'}^2$ ，因此  $\angle P'PB = 90^\circ$ ；
3. 由 1.2. 可知  $\angle APB = \angle APP' + \angle P'PB = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ 。

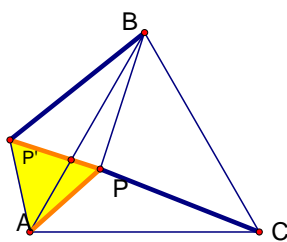


圖 4-4-1：第四題的關鍵表徵：以旋轉表徵問題

對於使用 GSP 的解題者而言，關鍵在於能否從直接呈現的結果中，將  $150^\circ$  拆解成  $90^\circ$  與  $60^\circ$  之和。對於非 GSP 的解題者而言，關鍵在於能否將共點的三條直線  $AP$ 、 $BP$  與  $CP$  依題意組成直角三角形，旋轉是最直接能夠得到答案的(如圖 4-4-1)。除此之外，本題亦可以對稱的方式、解析幾何的方式與三角學的方式解題，解法相當多元。

## 二、解題時間

彙整 GSP 組與非 GSP 組之解題時間，如下表 4-4-1 所示：

表 4-4-1：第四題 GSP 組與非 GSP 組解題時間表

解題特徵	GSP 組		非 GSP 組	
	乙生	丙生	甲生	丁生
實驗得到答案	5:22	4:53		
完成解釋	21:52	49:52	88:16	9:47
平均	35:52		49:02	

自表 4-4-1 有以下發現：

1. 非 GSP 組解題平均時間比 GSP 組解題平均時間約多 13 分鐘，係因為非 GSP 組的甲生解題時間特別長，使得非 GSP 組的平均時間較多；
2. 非 GSP 組的解題時間變異是因為表徵方式不同所致，丁生解題初期即以對稱觀點成功表徵問題而迅速解題，甲生反復歷經旋轉、三角學(餘弦定理)、相似等觀點表徵問題，過程並不順利；
3. GSP 組在解題初期即利用 GSP 所提供之測量與計算功能得到答案，但需要分別花費額外的 16 及 45 分鐘，才完成解釋，這顯示預知答案之後，並不一定能夠迅速展開逆推或解釋。

## 三、表徵與表徵轉換

本段分成三部分，第一部分說明 GSP 組與非 GSP 組所產生表徵數量與類型的差異，第二部分說明 GSP 組與非 GSP 組所產生表徵轉換之類型的差異，第三部分說明使用 GSP 對於形成表徵的影響。

### (一) 表徵

彙整解題過程中所產生的表徵類型與數量，如表 4-4-2 所示：

表 4-4-2：第四題 GSP 組與非 GSP 組在各表徵類型之次數分配

表徵類型	GSP 組			非 GSP 組		
	乙生	丙生	平均	甲生	丁生	平均
草圖	2	2	2	2	1	1.5
符號關係	0	0	0	2	1	1.5
演繹陳述	1	0	0.5	3	3	3
總計	3	2	2.5	7	5	6

由表 4-4-2，有以下發現：

### 1. GSP 組所產生表徵數目較少，多以草圖呈現表徵

GSP 組皆以旋轉觀點表徵問題即順利解題，惟丙生多以軌跡觀點表徵問題，因此表徵數目多 1 個。以丙生為例，他利用 GSP 實驗結果以軌跡觀點轉觀表徵問題，在實驗過程中，丙生至少找到 4 個滿足題意的 P 點且經過測量的結果確信：

430103 APB 的角度一定，所以...它是...一個在圓上跑的軌跡

於是丙生畫出 $\triangle APB$ 的外接圓(圖 4-4-2)，但丙生並未察覺圖中 P 點位置略有誤差，以致繪圖結果失真。之後，丙生注意到 $\angle AOB$ 可能是 75 度(口語資料：430111, 430119, 430121)。事實上， $\angle AOB$ 的度數為 60 度且 $\triangle AOB$ 為正三角形，若繼續推論下去的話，可以從此途徑得到解答，丙生稍後所嘗試的方法，亦接近這個作法，可惜，他放棄這個想法重新另起爐灶。

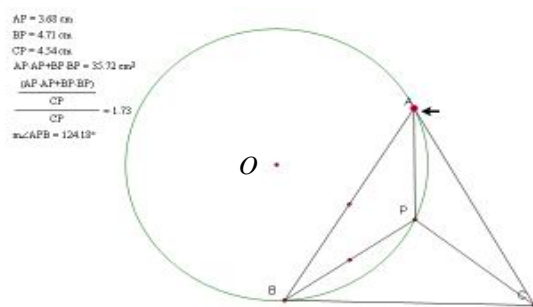


圖 4-4-2：丙生以圓弧表徵問題

GSP 組均以旋轉表徵問題而旋轉即是題目之平方關係式： $\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2$  的解譯，兩人皆以畢氏定理解譯這個關係，因此在解題過程中均利用旋轉 90 度的技巧，製造直角三角形以滿足平方關係式；以丙生為例，儘管先前利用圓弧表徵問題，最後還是回到旋轉的觀點來解題，他將 AP 旋轉 90 度並取 BP 與 B<sub>2</sub>P 等長，試圖把  $\angle APB$  拆解成 90 度(直角)與 60 度之和(如圖 4-4-3)。

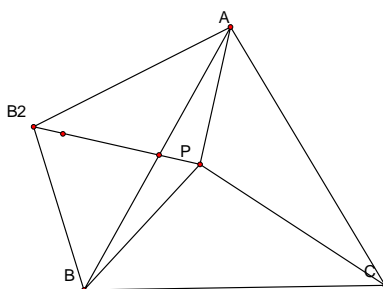


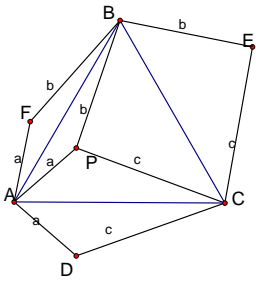
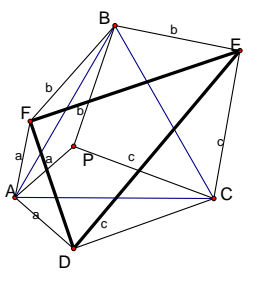
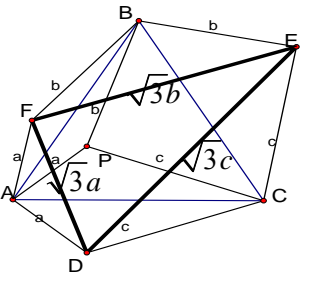
圖 4-4-3：丙生以旋轉表徵問題

GSP 組表徵數目少的原因在於成功以旋轉觀點表徵問題，旋轉觀點除了來自題意的解譯之外，亦受惠於 GSP 所提供的實驗環境，尤其在確定特殊角或正三角形之前，均使用測量功能確認之。

## 2. 非 GSP 組所產生表徵數目較多，多以演繹陳述呈現表徵

非 GSP 組的表徵方式差異很大，丁生以對稱觀點表徵問題後即接著符號表徵問題，丁生解題歷程符號使用的時間很長，約 10 分鐘的解題時間中即有 7 分鐘的時間中利用符號進行表徵題意、運算與推理活動。甲生解題時間很長，約 88 分鐘(表 4-4-1)，大致經歷幾個階段：表徵題目中的直角三角形、以餘弦定理列出邊角關係、以相似觀點表徵問題及以旋轉觀點表徵問題等階段，表徵出現的數目多，且以符號、圖形與演繹陳述交替出現，和丁生以符號為主的表徵方式不同。丁生的解題歷程中，符號能表徵題意與數學關係，具有命名與計算的功能，同時符號能夠擔任標記的工作以標示途中的幾何量，在符號多重優勢情況下，丁生能快速解題，丁生解題歷程中表徵改變與符號使用關係請參見表 4-4-3。

表 4-4-3：第四題丁生解題歷程中表徵與符號功能的關係

解題歷程描述	表徵	符號功能
以三邊為對稱軸，向外作 P 點的對稱點 D,E,F 依序連接各頂點，得六邊形 ADBECF，以 a,b,c 標記圖中線段，得到 $a^2+b^2=c^2$		標記功能 表徵題意 表徵知識
從對稱關係得到 $\angle FAD = \angle FBE = \angle ECD = 120^\circ$ 從邊角關係得 $DF = \sqrt{3}a$ , $FE = \sqrt{3}b$ , $DE = \sqrt{3}c$		計算 命名
發現 $(\sqrt{3}a)^2 + (\sqrt{3}b)^2 = (\sqrt{3}c)^2$ 因此 $\angle EFD = 90^\circ$ 則 $\angle BFA = \angle BPA = 150^\circ$		表徵知識

## (二) 表徵轉換

彙整解題過程中所產生的表徵轉換類別與次數，如表 4-4-4 所示：

表 4-4-4：第四題 GSP 組與非 GSP 組在各表徵轉換之次數分配

表徵轉換類型	GSP 組			非 GSP 組		
	乙生	丙生	平均	甲生	丁生	平均
等價變換	1	0	0.5	2	2	2
整併	0	1	0.5	0	1	0.5
突變	0	1	0.5	4	1	2.5
總計	1	2	1.5	6	4	5

由表 4-4-4，有以下兩點發現：

## 1. GSP 組所產生表徵轉換數量少，並沒有呈現特定規則

丙生彙整 GSP 實驗的結果發現 P 點所形成的軌跡是圓的一部分，以圓弧(軌跡)觀點表徵問題，這是第一次表徵轉換，屬於「整併」型；第二次表徵轉換，是在以圓弧表徵問題失敗之後所產生「突變」型表徵轉換，他放棄先前的想法，改以旋轉表徵問題。

乙生唯一一次的表徵轉換是從草圖到旋轉表徵之間的轉換，這層轉換視為方程式(平方關係式)與圖形間的轉換，即透過旋轉在圖形上呈現方程式的關係，這一次轉換歸類為「等價變換」型。這三次表徵轉換分屬不同類型，GSP 組在表徵轉換上並沒有呈現特定類型。

## 2. 非 GSP 組所產生表徵轉換數量較多，突變型較多，等價變換型亦多

非 GSP 組中有 5 次「突變」型表徵轉換，其中有一部分是思考的躍進，有一部分則是解題受阻時的觀點轉換。丁生形成對稱表徵時的表徵轉換則是思考的躍進，丁生以對稱表徵開啓解題之門，將內部三條線以各邊為軸向外對稱做出之後，配合符號、120 度特殊角與題目中平方關係式的運用，即迅速解決問題(參見表 4-4-3)。甲生四次突變型的轉換，則多屬於解題受阻時的觀點轉換。

## 四、過程策略

彙整使用與不使用 GSP 的解題過程中所產生的解題策略，如表 4-4-5 所示：

表 4-4-5：第四題 GSP 組與非 GSP 組解題策略之次數分配

策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	乙生	丙生	甲生	丁生
啓思策略	14	9	19	7
符號策略	2	2	45	3
視覺策略	18	14	37	5
GSP 特殊策略	8	10	0	0
總計	42	35	101	15

由上表，可得以下發現：

(一) GSP 組使用策略數量較少，組內變異小

GSP 組使用策略數相對較少，是因為甲生(非 GSP 組)在符號策略使用次數上特別多，若暫時忽略符號策略，則 GSP 組所使用的策略數不見得少。由於表徵數目少且皆以旋轉表徵問題而順利解題，因此策略使用的模式與次數相近，呈現組內差異小的情況；以 GSP 使用的策略為例，計算、測量與拖曳等行為皆出現在草圖時至下一個表徵形成之前，待以旋轉觀點說明全等之前，亦出現少數測量行為。

甲生以旋轉表徵問題之前嘗試多種方式，造成在策略使用上組內差異大。甲生試圖以符號建立邊角關係，需要利用符號列式與化簡，同時符號運算次數亦多，因此甲生使用符號策略的次數超越其他三人，在解題過程中，甲生需要使用 16 次符號命名；18 次的標記，這也是異於其他三人之處。

丁生以對稱表徵問題，雖然依賴符號，不過符號功能上多以表徵目的居多，真正參與運算的機會不多(表 4-4-6)。

表 4-4-6：第四題 GSP 組與非 GSP 組符號策略之次數分配

符號策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	乙生	丙生	甲生	丁生
命名	2	2	16	0
標記	0	0	18	1
運算	0	0	11	2
總計	2	2	45	3

(二) GSP 環境能聚焦於幾何策略的使用

GSP 環境侷限代數符號的使用，促使解題思考方式以幾何或視覺面向的思考為主。解題初期如果盲目嘗試各種方式，分散認知資源，將無法有效解題。理解幾何圖形的深層結構需要經過視覺、構圖、推理與論述等階段(Duval, 1998)，並注意圖形與概念面向間的連結(Fischbein, 1993)，方能從中獲取重要的解題資訊。在 GSP

環境中，解題者會利用 GSP 所提供的繪圖工具繪製出滿足題意的圖，過程中解題者對於該圖形已經有了最基本的認識，要思考的是如何將圖形與概念進行連結，從圖形中理解資訊的過程不是一蹴可及的，解題需要輪流考慮圖形的各部分，嘗試不同組合，經常對圖形進行各種修改，圖才能發揮最大的效果。GSP 某種程度上侷限代數思考的可能性，即增加幾何思考的面向，這不一定是有利的，有些解題者在多重表徵中找尋合適的表徵，能迅速解題，但也有解題者在摸索中之一直找不到頭緒而放棄，GSP 提供一個能夠適度堅持的環境，進行幾何思考，對於甲生而言，也許是一個優點。

### （三）GSP 情境能提供利於視覺操作的策略

甲生在本題中重新畫了 5 次圖，至少 4 度局部重新畫圖。當甲生發現圖 4-4-3 上方圖形中可能藏有部分重要訊息，但一方面避免視覺干擾，一方面避免建立輔助框架造成原圖的污染，讓草圖變得複雜而不可辨識，因此選擇在草圖附近的空白處，摘錄這部分資訊，在草圖附近局部重新畫圖，亦可方便檢查與校正，減少在新圖與舊圖之間轉錄時產生錯誤而引起解題錯誤；而在 GSP 的環境中可以使用「複製」、「隱藏」與「復原」等指令取代上述動作或是改變線段粗細或顏色等視覺策略達到相同效果，不需要冒著抄錄錯誤的風險及耗費時間心力。

甲生選擇在草圖附近局部重新畫圖的行為顯示視覺清晰性的重要(Lowe, 1994)，他必須在嘗試操弄圖形過程中，同時維持圖形清晰性，因此以折衷方式—局部重新畫圖達到上述目的。相較之下，在 GSP 環境中很少重新畫圖，更沒有發生局部重新畫圖的例子，這顯示 GSP 的情境中利於視覺操作，解題者不需要花費龐大的心力於畫圖與重新畫圖的行為上。

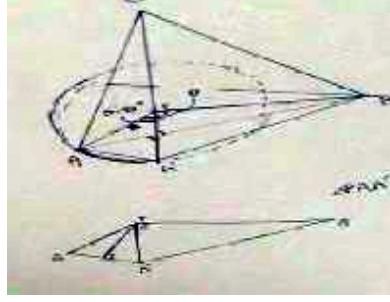


圖 4-4-4：局部重新畫圖的例子(甲生)

除了有 4 次局部重新畫圖的行為之外，甲生在解題過程中更出現 3 次調整圖形的策略，他將草圖倒轉過來，希望能從中發現新的觀點：

240101 研:你為什麼又要把圖又倒過來?(第二次把圖倒轉過來)

240102 我想從...不同方向來看

以不同方向看圖，調整視覺框架，透過適當的變化，直到成功地找到某些有益於解題的資訊，是變化問題的方式之一(Polya, 1957)。然而，在這兩個情境中，所需要花費的代價卻有不同：GSP 組使用滑鼠拖曳頂點，即能調整視角，使得解題者得以輕易地選擇適合的角度以觀察圖形，而非 GSP 組必須“頭手並用”(歪著頭且移動紙)才能達到調整視角的功能。從重新畫圖與調整視角的觀點來看，相較之下，GSP 所顯示視覺操作的便利性是紙筆解題環境中很難達到的。

甲生使用 18 次的標記動作、16 次的符號命名及 37 次的視覺策略(見表 4-4-5 及表 4-4-6)，顯示甲生在解題過程中特別需要利用各種輔助記號與線段以理解題意，一方面解題時間長，曾嘗試數個觀點表徵問題，以致於使用策略數目較多，另一方試圖以餘弦定理表徵題意，利用符號列出邊角關係並且參與運算，企圖從運算結果中推得答案，因此有較多標記與命名的策略產生；相較之下，GSP 的環境中，兩位解題者則不需要使用等量的符號與視覺策略(見表 4-4-5 及表 4-4-6)即能達到解題的效果，顯示 GSP 所提供精確作圖的功能與結果，在本題發揮影響力，在 GSP 環境中解題者可以以較少的視覺操作與符號輔助達成視覺效果。

表 4-4-7：第四題 GSP 組與非 GSP 組視覺策略之次數分配

視覺策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	乙生	丙生	甲生	丁生
重新畫圖	0	0	5	0
增刪部份圖形	13	12	16	1
調整圖形	1	2	3	0
變換樣式	4	0	9	4
局部重畫圖	0	0	4	0
總計	18	14	37	5

## 五、反思行爲

彙整使用與不使用 GSP 的解題過程中所產生的反思行爲，如表 4-4-8 所示：

表 4-4-8：第四題 GSP 組與非 GSP 組所產生的反思行爲類別與數目

反思行爲類別		GSP 組		非 GSP 組	
		乙生	丙生	甲生	丁生
覺知	個人覺知	0	1	0	1
	任務覺知	2	3	2	4
	策略覺知	0	0	1	0
	小計	2	4	3	5
評估	結果預見	1	2	4	2
	策略比較	0	0	1	1
	質疑	2	4	7	0
	回顧	0	0	1	1
	小計	3	6	13	4
校正	發生偵錯事件	0	1	2	0
	重新改變作法	0	0	3	0
	小計	0	1	5	0
總計		5	11	21	6

根據表 4-4-8，可得以下兩點結論：

### (一) 反思行為次數和解題時間成正比

反思行為次數和解題時間成正比。本題的甲生的解題時間最長，21 次的反思行為中較高比例發生在三類的反思行為上：質疑(7 次)、結果預見(4 次)與重新改變作法上。對於策略的反思行為較少，策略覺知與策略比較僅各出現 1 次，在策略調整上的反思行為少顯示其思索於策略調整的時間少，以致於解題時間長，在解題受阻時，對於策略使用有較多評估時，將有助於突破困境(Weber, 2001)。

### (二) GSP 組的反思行為中沒有出現策略比較與改變作法兩類

GSP 組的反思行為中沒有出現「策略比較」與「改變作法」兩類，這顯示本題 GSP 的使用者對於解題方式與策略並沒有認為需要更動，將丁生一起入考慮，丁生只有產生 1 次「策略比較」與 0 次「改變作法」(見表 4-4-8)，這個結果符合先前的解釋，丁生對於解題方式與策略並沒有認為需要更動，事實上，丁生唯一一次的「策略比較」是發生在解題開始時 1 分半鐘，他認為還是從角度下手比較好(口語資料 240012)，自此之後，一分鐘後以對稱觀點表徵問題即沒有改變解題策略：以符號表徵長度的策略，而這個策略也的確有效，在剩下 6 分鐘的解題時間中，他沒有類似的困擾。在反思行為上沒有出現「策略比較」與「改變作法」的事實顯示 GSP 在這一題中有指引的效果：聚焦於幾何思考且提供數據資料的情況下，似乎不需要調整策略與改變作法。

## 六、小結

在本題中，GSP 直接提供結果對於推理過程有幫助，如果能利用逆向解題或假設演繹的方法，從答案反推回前提，將有助於解題。但可能因此造成前提與結論錯置而造成思考混亂，本題的丙生與第二題的乙生都有類似的情況發生，如何幫助學生克服困難，將是數學教育者重要的課題之一。

本題中 GSP 組的表徵方式、策略使用數量與型式上皆呈現組內變異小的情況，在 GSP 的情況中較少見，前三題 GSP 組則呈現組內變異大的特性。由於 GSP 組所產生的表徵數目少(2.5 次，見表 4-4-2)，畫完草圖之後，除甲生有一次其他的表徵之外，兩人表徵問題的方式幾乎是一樣的，因此表徵方式類似的情況下，解題策略使用情況亦將類似，因此組內變異少，第二題的非 GSP 組亦有這個情況發生。

本題和第二題都屬於求解題，但是第二題中 GSP 組內行為變異大，本題則變異小。原因還是在於問題表徵方式，在第二題中，作圖本身就是一個難題，表徵題目中的兩倍關係與五邊等長的方式不同則造成策略上的變異；在本題中，作圖是很容易的，甫熟練 GSP 的丙生約 1 分 40 秒鐘完成繪圖任務，進行拖曳檢驗，兩位使用 GSP 的解題者繪圖時間與方式幾乎一樣，加上表徵數目少，呈現問題的路徑類似，則組內變異小。

在本題中，GSP 能夠清楚表徵問題，提供真實情況的描述，對於解題有利，本題結果和第一題的結果能夠呼應。

## 第五節 使用 GSP 與不使用 GSP 之解題表現比較

本節說明使用與不使用 GSP 對於幾何解題時間、表徵方式、解題策略與反思行爲之差異。研究結果如下：

### 一、解題時間的比較

彙整四位受測者四個問題的解題時間資料，形成下表：

表 4-5-1：GSP 組與非 GSP 組解題時間

	GSP 組		非 GSP 組	
第一題	6:35(甲)	22:16(乙)	57:50(丙)	67:59(丁)
第二題	9:05(甲)	32:37(乙)	8:05(丙)	7:45(丁)
第三題	27:15(甲)	35:29(丁)	20:08(丙)	-
第四題	21:52(乙)	49:52(丙)	88:16(甲)	9:47(丁)
平均	25:38		37:07	
標準差	13:13		31:02	

由表 4-5-1，可知以下結論：

1. 整體說來，使用 GSP 的解題平均時間較不使用 GSP 解題平均時間短 12 分鐘，第一題的結果最爲明顯，係因 GSP 能精確表徵問題且提供視覺操弄以探索問題情境，較快形成關鍵表徵之故；有 3 題非 GSP 的解題時間接近或超過 60 分鐘，是造成非 GSP 組解題時間增加的原因，GSP 組則無此現象，最長的解題時間約爲 45 分鐘；
2. 非 GSP 組的時間變異大，有 3 題時間均在 10 分鐘以下，有 3 題解題時間接近或超過 60 分鐘，關鍵在於解題者形成關鍵表徵的時間；

3. 第二題的結果顯示，甲丙丁三人雖然使用不同工具解題，但解題時間相近，係因三人表徵問題的概念與執行過程接近，這顯示表徵問題方式對於解題時間的影響，有時更勝於解題工具的使用。
4. 甲生在 GSP 的表現時間較短而在非 GSP 環境中表現時間長，有部分原因是工具轉換過程中不適應的所致，同樣情況在其他三人的訪談中亦發生類似意見。

## 二、表徵與表徵轉換的比較

彙整與分析四位受測者四個問題的口語資料之後，統計 GSP 組與非 GSP 組的表徵類型與數量，如表 4-5-2 所示：

表 4-5-2：GSP 組與非 GSP 組表徵類型統計

表徵類型	GSP 組		非 GSP 組	
	數量	百分比	數量	百分比
草圖	28	85%	8	18%
符號關係	0	0%	7	16%
演繹陳述	5	15%	29	66%
總計	33	100%	44	100%

由表 4-5-2 可知以下結論：

- (一) GSP 組的解題者表徵出現的數目較少且多以圖形呈現(約 85%)，精確的圖象表徵使得解題時間短，表徵方式固定使得解題時間變異小；
- (二) 非 GSP 組的解題者表徵出現的數目較多且以演繹陳述呈現較多(約 66%)，圖形表徵居次(約 18%)，表徵方式的多元性使得解題者能夠尋得更適切的表徵而迅速解題，研究顯示不使用 GSP 的解題過程中，解題者花了許多時間在嘗試各種可能的表徵，使得解題時間延遲；表徵方式的多元性為非 GSP 組解題時間變異較大的原因之一；
- (三) GSP 組表徵方式多以圖形呈現，顯示思考方式偏向具象的圖象思考；而非 GSP 組的解題者多以演繹陳述呈現表徵，顯示思考方式偏向抽象的邏輯思考；

彙整與分析四位受測者四個問題的口語資料之後，統計 GSP 組與非 GSP 組的表徵轉換形式與數量，如表 4-5-3 所示：

表 4-5-3：GSP 組與非 GSP 組表徵轉換類型統計

表徵轉換類型	GSP 組		非 GSP 組	
	次數	百分比	次數	百分比
等價變換	9	36%	19	51%
整併	12	48%	7	19%
突變	4	16%	11	30%
總計	25	100%	37	100%

由表 4-5-3 可知以下結論：

- (一) 以 GSP 解題時，表徵轉換方式多以「整併」型居多。和語文陳述的資訊相較之下，解題者能夠以較為彈性的方式連結圖中的資訊，以點與 Larkin 與 Simon(1987)的研究結果相同，解題者能針對題意加以整併；
- (二) 語文資訊的連結通常和上下文有關(Larkin & Simon, 1987)，幾何學中語文知識具有階層性，以演繹邏輯方式進行推理與連結(De Villiers, 1994)，而非 GSP 組的解題者多以演繹陳述呈現表徵方式，因此表徵轉換方式以「等價變換」

型居多，此發現與 De Villiers(1994)的觀點相符，De Villiers(1994)認為幾何學中的語文知識具有階層性且以演繹邏輯的方式進行推理與連結。

### 三、解題策略的比較

本段分成五部分，第一部分比較與分析 GSP 組與非 GSP 組所使用之解題策略之差異，第二至第五部分則比較與分析 GSP 組與非 GSP 組使用啓思策略、符號策略、視覺策略與 GSP 特殊策略的差異。

#### (一) 解題策略的差異

彙整與分析四位受測者四個問題的口語資料之後，統計 GSP 組與非 GSP 組的解題策略，如表 4-5-4 所示：

表 4-5-4：GSP 組與非 GSP 組解題策略類型統計

解題策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	次數	百分比	次數	百分比
啓思策略	57	31%	66	29%
符號策略	7	4%	82	36%
視覺策略	84	45%	77	35%
GSP 特殊策略	38	20%	0	0%
總計	186	100%	225	100%

由表 4-5-4 可知以下結論：

- 1.GSP 組在解題策略的使用上以視覺策略為主，啓思策略為輔，適時搭配使用 GSP 所提供的特殊功能。GSP 環境中某種程度上侷限符號策略的使用，增加幾何思考的面向，GSP 環境提供豐富與精確的視覺資訊，只要適度堅持，解題者通常能組織資訊，進而解題，解題時間不超過 50 分鐘(表 4-5-1)；

2.非 GSP 組在解題策略的使用上以符號、視覺與啓思策略並重；策略與表徵的多元性，使得有些解題者在多重表徵中找尋合適的表徵，能迅速解題，但也有解題者在摸索中之一直找不到頭緒而放棄。

## (二) 啓思策略的差異

彙整與分析四位受測者四個問題的口語資料之後，統計 GSP 組與非 GSP 組的啓思策略，如表 4-5-5 所示：

表 4-5-5：GSP 組與非 GSP 組啓思策略類型統計

啓思策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	次數	百分比	次數	百分比
嘗試錯誤	4	7%	2	4%
猜測	12	21%	10	22%
專家知識	0	0%	2	4%
演繹	37	65%	24	51%
逆推	4	7%	9	19%
總計	57	100%	47	100%

註：GSP 組所產生的 37 次演繹推理活動中有 19 次用演繹法解釋視覺上的發現。

由表 4-5-5 可知以下結論：

1. 非 GSP 組所使用的啓思策略以演繹為主，猜測與逆推為輔，依實際需要使用嘗試錯誤的策略與專家知識，但比重低。啓思策略多元顯示非 GSP 組以發散思考為主；
2. GSP 組啓思策略雖以「演繹」為主，但其中 19 次用於解釋視覺發現，因此總數為 37 次的演繹推理中，只有 18 次是用在發現視覺結果的過程中，「演繹」和「猜測」策略次數的比例為 2:3，這顯示 GSP 組在發現解答的過程中，啓思策略呈現「演繹」與「猜測」並重的情況。

### (三) 符號策略的差異

彙整與分析四位受測者四個問題的口語資料之後，統計 GSP 組與非 GSP 組的符號策略，如表 4-5-6 所示：

表 4-5-6：GSP 組與非 GSP 組符號策略類型統計

符號策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	次數	百分比	次數	百分比
命名	6	86%	20	24%
標記	1	14%	41	50%
運算	0	0%	21	26%
總計	7	100%	82	100%

由表 4-5-6 可知以下結論：

1. GSP 組所使用的符號策略僅有命名的功能；
2. 非 GSP 組所使用的符號策略中不僅有命名與標記功能，還能參與運算與推理，同時具有表徵的功能。

### (四) 視覺策略的差異

彙整與分析四位受測者四個問題的口語資料之後，統計 GSP 組與非 GSP 組的視覺策略，如表 4-5-7 所示：

表 4-5-7：GSP 組與非 GSP 組視覺策略類型統計

視覺策略類型	GSP 組		非 GSP 組	
	次數	百分比	次數	百分比
重新畫圖	4	5%	16	21%
增刪部份圖形	48	57%	31	40%
調整圖形	7	8%	3	4%
變換樣式	25	30%	23	30%
局部重畫	0	0%	4	5%
總計	84	100%	78	100%

由表 4-5-7 可知以下結論：

1. GSP 組與非 GSP 組所使用的視覺策略次數非常接近，兩組使用的視覺策略，均以「增刪圖形」為主，「變換樣式」為輔，
2. 重新或局部重新畫圖的行為在非 GSP 組較常見，係維持視覺簡約性的重要活動，在 GSP 環境較不需要重新畫圖，顯示 GSP 所提供的視覺與視覺操弄的功能性強，較不需要進行根本的重整；
3. 調整圖形的行為在非 GSP 組與 GSP 組都曾出現，顯示調整圖形的策略在幾何解題中有實際存在的需要。GSP 組以拖曳滑鼠調整合適的觀察外形，包括位置與大小；而非 GSP 組僅能夠以旋轉紙張調整觀察幾何物件的相對位置，並無法改變大小，顯示 GSP 能提供更好的視覺功能以應用於幾何解題。

#### (五) GSP 特殊策略的差異

彙整與分析四位受測者四個問題的口語資料之後，統計 GSP 組使用 GSP 所提供的特殊策略，如表 4-5-8 所示：

表 4-5-8：GSP 組特殊策略類型統計

	拖曳檢驗	無聲軌跡 拖曳	測量長度	測量角度	計算	總和
GSP 組	7	13	10	6	3	39

由表 4-5-8 可知以下結論：

1. GSP 組所使用的特殊策略隨題型不同而有差別。求証題中多以拖曳檢驗以驗證命題是否成立，求解題中則以無聲軌跡拖曳確認滿足題意的軌跡；
2. 測量與計算的功能在探索活動中出現，有助於形成猜測與驗證，成為解題的關鍵(第三題)；解題者在尚未探索問題之間，能利用測量與計算的功能預先得知答案，有助於指引思考方向，提供解題捷徑(第四題)。

#### 四、反思行爲的比較

彙整與分析四位受測者四個問題的口語資料之後，統計 GSP 組與非 GSP 組的反思行爲的類型與次數，有以下三點結論(參見表 4-5-9)：

- (一) 反思行爲的數目和解題時間有關，解題時間長，反思行爲出現的次數亦較高，非 GSP 組的解題時間長(參見 4-5-1)，所產生反思行爲的數目亦較多；
- (二) 「質疑」型的反思行爲在兩組之間均佔有重要比例且以 GSP 組為重，產生不確定性是解題過程中的常態(Zaslavsky, 2005)；
- (三) 非 GSP 組產生的反思行爲類型以「結果預見」、「回顧」與「質疑」較多，顯示非 GSP 組在解題過程中，具有解題策略與表徵方式的多元性，因此需要對於策略有較多的回顧與預先評估，尤其在幾何與代數符號思考之間的轉換過程中；
- (四) 由於 GSP 環境中侷限符號的使用，反而能聚焦於幾何思考，不需要進行幾何與代數符號策略的轉換與比較，因此 GSP 組的反思行爲中並沒有出現「策略比較」；

(五) 不論是 GSP 組或是非 GSP 組，三個覺知類型的反思行為約佔總反思行為的 20%，顯示這類型偏向個人特質的反思行為不因情境不同而有所差異。

表 4-5-9：：GSP 組與非 GSP 組反思行為類型統計

反思行為類型	GSP 組		非 GSP 組	
	次數	百分比	次數	百分比
個人覺知	1	1%	2	2%
任務覺知	10	14%	13	11%
策略覺知	3	4%	8	7%
結果預見	9	12%	27	23%
策略比較	0	0%	6	5%
質疑	26	36%	17	15%
回顧	7	10%	19	16%
發生偵錯事件	8	11%	10	9%
嘗試另類解法	1	1%	0	0%
重新改變作法	8	11%	15	12%
總計	73	100%	117	100%

## 五、小結

GSP 環境中，解題者絕大部分均以圖象表徵問題，透過操作 GSP 所提供的視覺功能以理解幾何圖形所蘊含的資訊，如：透過拖曳將圖形放大或旋轉以符合視覺習慣，透過增加或隱藏部分幾何物件、變換幾何物件的顏色或框線的深淺以重新組織解釋的框架，受測者利用視覺操弄的方式以理解問題和 Roth & Bowen(2003)的論述相同。有別於語文資訊，圖象資訊中的元素可以任意連結，GSP 組的解題者需要整併豐富而精確的視覺資訊，做為解題之用，因此表徵轉換方式以整併為主；在侷限符號的使用下，解題者反而能聚焦於幾何操弄與思考，過程中以猜測與演繹的啓

思策略為主，配合視覺策略操弄圖形，視情況使用 GSP 所提供之特殊策略，如：拖曳、測量與計算的策略，先提供視覺發現與解釋，再以演繹推理提供解釋。反思行為少，解題時間約在 30 分鐘左右完成(表 4-5-1)。

非 GSP 環境中，解題者呈現多元的表徵方式，表徵方式多以演繹陳述方式呈現，解題過程中呈現符號、視覺與各種啟思策略交互使用的情況，表徵轉換以等價變換型居多，突變型的次數居次，突變型的表徵轉換意謂解題過程中需要大幅度調整策略或解題思維，在非 GSP 組中需要對於策略的適切性進行評估，因此反思行為較多。表徵與策略的多元性，使得某些解題者得以尋找合適表徵而迅速解題，但也有解題者耗費心力摸索，卻找不到合適表徵方式而放棄解題，因此解題時間出現較大的變異性。

## 第六節 表徵方式、解題策略與反思行爲之交互作用

本節主要分成兩部分，分別介紹不使用 GSP 與使用 GSP 進行解題時，解題者對問題表徵方式、解題策略與反思行爲之間的交互作用。

### 一、非 GSP 組解題者對問題表徵方式、解題策略與反思行爲之間的交互作用

非 GSP 組的解題過程中，符號扮演重要的角色，解題者表徵問題的方式是多元的，包括了利用符號組成的代數關係式、圖形或演繹陳述等方式。其中符號扮演特殊的角色，除了出現在代數關係式中，符號也出現在非 GSP 解題者的圖形與演繹陳述當中。當解題者利用代數符號來表徵問題情境時，往往會引發利用代數符號進行運算的解題策略，這個現象在 GSP 解題者身上幾乎未曾發生，推論可能的原因為利用符號命名能簡化情境，進而減少在運算時的認知負荷，輔助幾何思考。這顯示除非解題者採取符號命名與表徵的方式，才可能進一步的採用運算或相關數學定理等解題策略。

在本研究中非 GSP 組 8 個例子中有 4 個例子顯示解題者大部分的解題時間內使用符號操弄的策略，但效果卻因題目而異，如：丁生在第一題中試圖直接以符號表徵等角關係，在 44 分鐘之後宣告放棄，卻在第四題中在代數符號輔助下利用畢氏定理與三角學知識解題，在 10 分鐘左右完成解題活動。這顯示代數符號操作的解題策略並非適用於所有的幾何問題，解題者必須擁有何時能使用與不該使用符號操作的策略知識(Weber, 2001)。

反思行爲常發生在解題受阻時(Mason *et al.*, 1982)，本研究結果支持此論點，除此之外，非 GSP 組的解題過程中，符號操作與重新畫圖的過程中均產生較多的反思行爲。

在符號操作過程中，需監控運算過程與校正結果，並進行評估，反思行為發生的次數較多，特別是過程複雜或是超出解題者能力所能負擔時，解題者須調整符號操作策略，加入新符號以增加運算的效能或是根本放棄符號操作策略而針對幾何性質進行思考，因此，在此期間產生較明顯的策略評估與比較的反思行為。以第一題丁生的解題過程為例，丁生試圖直接以符號表徵等角關係，在符號操作的過程中，因過程複雜與結果不夠簡潔而產生多次質疑(口語資料：141028, 141043, 141065, 141070)，丁生多次試圖改變表徵方式，以符號表徵題目中相似或旋轉關係，但仍遇到瓶頸，最後經過評估之後決定徹底改變思考方向(口語資料：141073, 141075)，從幾何方向思考問題，才成功解題。

重新畫圖之前需要進行各種評估，重新畫圖的過程中需要檢查與校正，避免轉換產生錯誤，反思行為次數亦多。非 GSP 組的解題過程中，能利用符號命名能簡化情境，減少認知負荷，輔助幾何思考，因此以圖形表徵問題時，亦能出現相當多輔助符號；當解題進行經過一段時間之後，圖形負載過多相互干擾的資訊以致於無法清晰辨識與提取資訊時，則需要重新畫圖，重新畫圖之前，需進行各種評估，如：針對圖形的簡約性進行評估，該圖是否超出解題者可辨識的底線？如果超出解題者的底線，則必須考慮哪些訊息需要被保留下來？哪些訊息需要刪除？在重新畫圖的過程中需要檢查與校正，避免轉換產生錯誤，因此反思行為次數較多。以第三題丙生的解題過程為例，丙生出現 11 次的反思行為，其中 6 次和重新畫圖有關，係針對複雜圖形所產生的評論以及重新畫圖時所發生的偵錯事件所產生的。

將上述非 GSP 環境中解題者表徵問題的方式、過程策略與反思行為互動關係之兩種模式，呈現如圖 4-6-1 所示：

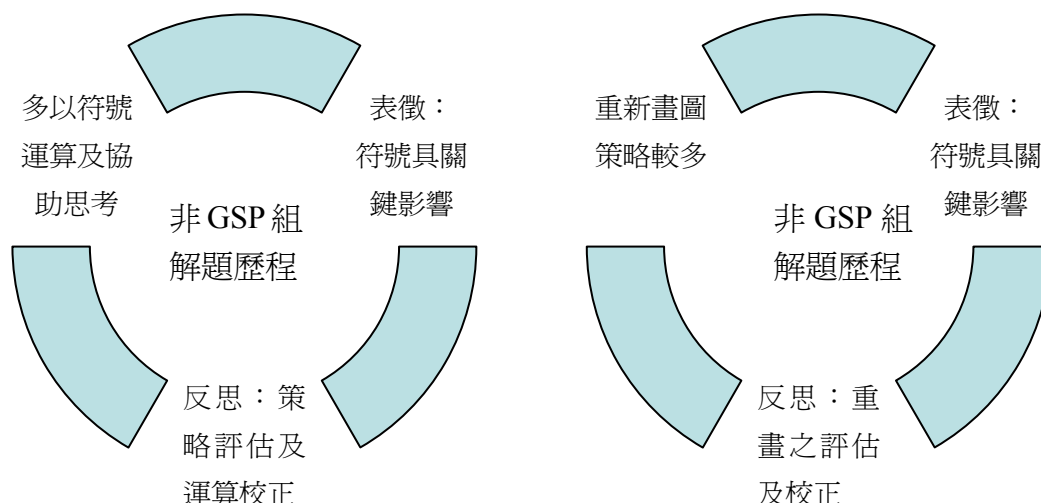


圖 4-6-1：非 GSP 組解題過程中表徵方式、過程策略與反思行為的相互關係

## 二、GSP 組解題者對問題表徵方式、解題策略與反思行為之間的交互作用

不論使用 GSP 與否，當解題者閱讀完題目與理解題意之後，第一個步驟通常是根據題意繪出圖形以便進一步表徵問題。GSP 組解題過程中，畫完草圖之後，解題者常以拖曳方式調整圖形的視角與大小，從快速產生的數個例子中，挑選較清楚(避免交點或交線重疊)、較符合視覺習慣(三角形的底部通常是水平的)的圖形來表徵問題，微調過後的圖形較少徹底重畫；而 GSP 所提供清晰的圖象表徵具有視覺簡約性(Lowe, 1994)，易於辨識與解譯；精確的圖象表徵貼近題意的真實情況，易於猜測及發現幾何性質；GSP 所提供隱藏、更換顏色與粗細的功能，易於調整解譯圖形的參考框架且新舊資訊不易相互干擾，能避免判讀錯誤，降低認知負荷，提供解題之協助。

雖然 GSP 環境中提供命名的功能，但侷限代數符號的使用，符號僅有命名的功能，不具表徵功能亦不參與運算；GSP 提供精確的作圖功能，因此在畫完草圖之後，直接針對圖形進行視覺操弄；在本研究的 8 個例子之中，有 4 個這類的例子(第一題乙生、第二題乙生及第三題甲生與丁生)。

GSP 組解題過程中，回應探索活動與判斷子圖是否對於解題時則產生較多的反思行為。

GSP 提供測量、計算與拖曳功能有助於解題的探索活動，解題者敏銳解讀 GSP 測量、計算與拖曳的結果將產生較多的反思行爲，並藉此開展解題活動。以丙生第四題爲例，丙生能夠能掌握拖曳過程中的不變性(口語資料：431055)，透過對於拖曳與測量結果的反思，思考條件是否充足(口語資料：431060)，測量結果如何和已知條件進行連結(口語資料：431068, 431079, 431081)。解讀拖曳與測量的結果是一連串反思行爲的開端，但受限於解題者的知識結構與解題過程中的注意力，並非每位解題者對於相同訊息均有相同的反應，在本例中，丙生的反思行爲並沒有使得解題有所進展，但某些例子中，反思行爲的結果將使得解題有所進展，影響後續的表徵方式與策略執行。

在 GSP 環境中如果已經鎖定目標圖形時，如：第三題中的平行六邊形，如解題行爲則以操弄目標圖形爲主，解題者在目標圖形與其子圖間嘗試各種可能的組合，並試圖在子圖形與答案之間建立概念連結(Duval,1998)，因此反思行爲著重在子圖形與答案之間是否能夠有效連結的問題，有時更化約成「有效」與「無效」的選擇。當子圖判定有效且能提出演繹解釋時，則解題有所進展；若子圖判定無效，則需重新進行操弄圖形，尋找另一個有效的子圖。

研究者從訪談中發現多數解題者根據知識系統對於子圖形的有效性進行判斷，在某些例子中，解題者利用視覺直觀判斷子圖形的有效性；從知識系統進行判斷者有助於後續的解釋與證明，從視覺直觀判斷者往往需要找更多的解釋，才能說服自己與研究者，因此重要解題特徵呈現與非 GSP 組倒置的情況。

將上述 GSP 環境中解題者表徵問題的方式、過程策略與反思行爲互動關係之兩種模式，呈現如圖 4-6-2 所示：

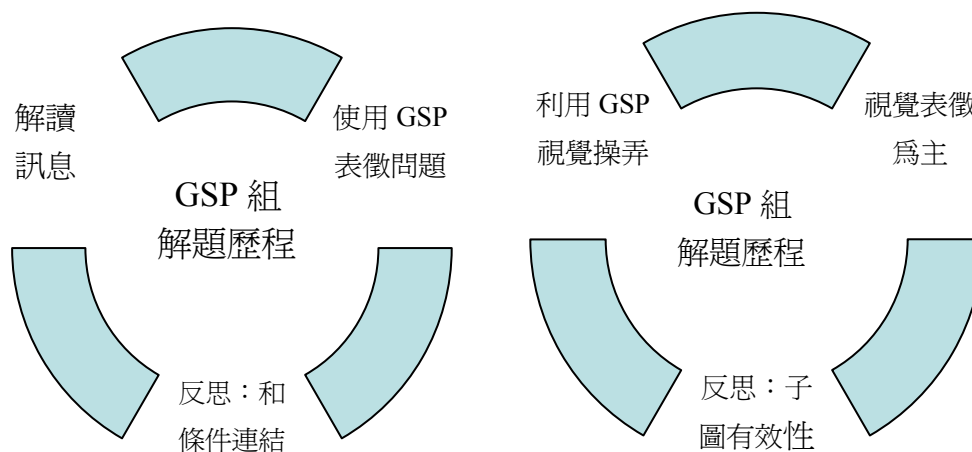


圖 4-6-2：GSP 組解題過程中表徵方式、過程策略與反思行為的相互關係

### 三、小結

反思行為是解題過程中針對表徵及策略的適切性進行評估，本研究即是在兩種解題情境中，針對不同表徵方式與執行策略所產生的各種評估活動進行更深入的探討。

非 GSP 的解題情境中，反思行為多發生在符號運算與重新畫圖行為之際。由於符號在非 GSP 解題情境中扮演重要角色，以符號思考或運算時，需評估符號使用的適切性、監控符號運算過程及校正演算結果，在解題受阻時，更需考慮是否應將符號策略調整至幾何思考，因此反思行為增多；非 GSP 的解題情境中，符號與標記能輔助思考，但過多的記號將有礙於辨識與提取資訊，則需要重新畫圖，重新畫圖之前要審視圖中所負載解題資訊的適切性，重新畫圖之後需檢查與校正轉換過程中有無抄錄的錯誤，因此反思行為增多。

GSP 的解題情境中，反思行為多發生在解讀 GSP 所提供的各種訊息與進行視覺操弄之際。解讀訊息與視覺操弄的能力和解題者個人知識系統有關，並非每個解題者均有類似的反思行為，視覺操弄的過程著重在子圖形與答案之間是否能夠生有效的連結，有時更簡化成「有效」與「無效」的決斷，和 GSP 組相較之下，非 GSP 組的反思行為較為單純。