

第二章 文獻探討

國際教育聯盟 (Education International) 和聯合國教科文組織 (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 簡稱 UNESCO) 在 2001 年 10 月 5 日第八屆「世界教師日」(World Teachers' Day) 共同提出「有高素質的教師才有高品質的教育 (Qualified Teachers for Quality Education) 」的口號。另外, UNESCO (1996) 也指出「終身學習」是進入二十一世紀之鎖鑰, 因此在終身學習的社會理念下, 教師工作的重點不再是只有傳授知識給學習者, 也要幫助他們組織並管理自己的知識, 這使得社會對教師的期待與日俱增 (楊深坑, 2002, p. 79)。然而, 就目前國內的教師證照檢定制度的而言, 當學生教師在修畢師資培育機構的相關課程, 並經教師資格檢定考試而取得合格教師證書之後, 才是真正具備中小學教師的資格。一般而言, 證照的取得可以確立教師是擁有專業人員的身份, 具有一定水準的專業知識和能力。楊深坑指出, 正因為專業人員具備嚴謹的知識和技能, 可以獨立自主判斷並且無須聽令於他人, 就更加必須對自己的專業行動負責, 尤其是專業行動的對象。因此個人認為, 若是要有高品質的教育, 教師除了應該不斷增添和修正自己的專業知識和技能之外, 也要反思自己的教學活動, 以健全自身的專業素質, 而反思教學能力和提升專業知能也應該是教師專業發展的一部分。因此, 本章將探討數學教師的專業發展及其內涵, 並討論幾何概念教與學之相關研究。

第一節 數學教師的專業發展

許秀聰 (2005, p. 11) 指出, 「專業發展」對獻身於教學專業的教師們而言, 是提升其工作效能之關鍵; 而教師對專業發展內涵的重視, 會反映其心理對「固守技術上高標準」之期許。因此, 本節將闡述教師專業發展的意義和特徵, 及其內涵和理論。

一、教師專業發展的意義和特徵

(一) 專業發展的意義

Noddings (1992) 認為，要了解「專業 (profession)」就必須先區分「專業水準 (professionalism)」和「專業化 (professionalization)」。前者是基於建立專業的觀點，提出用來認可某一專業的標準和技術，也就是指該專業人員所應具有的技能 and 行為表現；後者則是指維持專業的立場，指出某一職業所應具有的特徵，也就是成為專業人員的轉變歷程。雖然，兩者皆主張專業人員應具備專業的知識，但是後者較強調其知識獲取和解析的過程。因此，何福田和羅瑞玉認為 (1992；引自饒見維，1996)，當把教師視為一位專業人員時，並非表示教師已經具備專業水準和專業地位，而是指教師應該朝向「專業的教育家」來努力。所以，「教師專業發展」這個名詞所代表的意義是，「教師工作乃是一種專業工作，而教師則是持續發展的個體，可以透過持續的學習與探究歷程來提升其專業水準與專業表現」(饒見維，p. 15)。因此，教師若是想要達到一定的專業水準，就應該要將自己的教學工作專業化。

由於二十世紀是將專業的重心放在以權力 (power) 和優勢 (privilege) 為特色的專業化過程，因而開始利用專業化的指標特徵來描述專業 (Noddings, 1992)。例如在國內，何福田和羅瑞玉 (1992；引自饒見維，1996) 就提出了七項教師專業化指標，包括專業知能、專業訓練、專業組織、專業倫理、專業自主、專業服務和專業成長。饒見維更進一步主張，教師專業化的關鍵不單只是提升其專業知能和專業自主，同時應重視專業組織的功用和專業倫理的維護，而且，也需要有完善的專業成長制度與訓練活動，並據此有系統地提升或協助教師進行專業發展。這也意味著，不能將教師所教的「學科內容」視為其專業表現的領域，教師的「教育行為與教育活動」才是其專業實作的範疇，也就是說，教師應該以「教育」為專業領域而不是其任教「學科」。雖然，目前數學教師的培育工作是由教育家和數學家共同負責，但是這兩者之間缺乏互助合作，因而削弱了數學教師的專業地位。事實上，教學就如同傳道一樣，常常被視為是一種天賦，許多人質疑其專業訓練的必要性，因此，教學長期以來被視為是一種半專業 (semi-profession)，不僅如此，教學工作要從半專業轉變至專業不只困難，也會使教師持續地承受著專業水

準和專業化之間的張力 (Noddings)。

(二) 專業發展的特徵

Noddings (1992) 認為專業有六項特徵，包括選拔和規章、專業知識、利他主義和服務精神、特權和身份階級、協會以及自主權。其中，每一項專業都會作自我控管 (self-regulation)，也就是說，每一專業擁有其自主權以控管自身的培育制度、實施分級制度、規範成員行為，藉以使社會大眾能夠認同此項專業。因此 Sykes (1986；引自 Noddings) 主張，進行專業化的首要步驟就是控管，而這樣的概念就如同教育總諮議報告書 (行政院，1996；引自呂淑莉，2004) 所建議的「建立教師進階制度 (或稱為教師分級制度)」，可以提升教師的專業素質。這種控管的壓力會使得群體成員朝向專業化而努力，而他們最終的目標就是取得專業的地位。另外，專業人士也通常都會參與一些協會團體來維護自己的主張、管理自己的行為以及增加自身的專業知識，不僅如此，團體中的成員也有更佳的機會互相交流，觀察彼此的專業實作或分享心得。事實上，所有各項專業在形式上都帶有公眾服務的觀念，但是對於教學這一項半專業而言，多數人都認為它是一個良心的事業，更應該伴隨著利他精神 (Noddings)。Sichel (1988；引自 Noddings) 就指出，每一項專業都有其道德觀，但是沒有哪一項專業比教學工作承擔著如此沉重的道德責任。因此，進行專業控管並非全然是為利己而設立，而是為了可以促使教師不斷提升其專業素質，實際上，擁有社會大眾的信任才是使教師能夠自主教學的動力基礎，因而教師的專業化也促進了利他精神的實踐 (許秀聰，2005)。

然而，教師專業化的困難在於專業知識內容的界定與描述。無庸置疑教師必須瞭解關於如何進行教學的知識及其任教學科內容的知識，那麼一位中學數學教師是否還需要具備其他領域的知識？很顯然地，數學教師所該具備的專業知識不應只侷限於這兩類 (Noddings, 1992)。Shulman (1986) 就指出，教師在教某一學科時，應具備另一項特定的專業知識，即 PCK。而且，饒見維 (1996) 認為一位專業教師更應具備相當廣泛的教育專業知識，並且能作出最佳的教育行動決策，再依據行動結果調整教學決策；考慮

教學情境的各個層面，以開放的心胸接納他人的意見；在擁有專業自信作出最佳判斷的同時，也願意承認自己的錯誤不固執己見；並且要能主導教育改革。

由於，“學校教育的成敗，繫於教師素質的良窳，教師教學素質的提昇，能促進教師的專業成長與終生學習”（呂淑莉，2004），因此個人認為，在職教師在踏入職場的那一刻起就是另一個學習階段的開始。在面對終身學習社會的到來，數學教師們更應該以身作則，以持續專業發展為終身目標，透過專業的成長和專業素養的提升來肯定自己的專業，並且將自己的專業知識整合於教學構思與教學實作之中，嘗試著將課堂的教學活動以更專業的面貌呈現。

二、教師專業發展的內涵和理論

（一）專業發展的內涵

一般而言，教師的專業發展歷程包括，職前師資培育階段、實習教師的導入階段和在職教師的持續發展階段，並且每一階段的專業發展各有其特色以及發展內涵。而所謂教師專業發展內涵是指，“身為一個教師必須具備的各種內在知能條件（知識、能力、態度等）”（饒見維，1996，p. 151）。而且，這些內在知能會在教師專業發展的歷程中持續不斷地轉變（黃凱旻，2002）。以課堂教學活動的觀點來解釋，意即教師是帶著自己的知識、能力、態度或信念來與教學情境中的成員互動，其互動的結果會帶給教師知識、能力、態度或信念等心理層面的持續轉變與成長，而這些心理層面的發展就是教師的專業發展內涵。不僅如此，教師的專業內涵還可以細分為通用知能、學科知能、教育專業知能和教育專業精神四大類（饒見維，1996）。因此，以教師教學活動內涵來看，在認知面是指教師所應具備的通用知識、通用能力和教育專業知識；情意面是教師對學生的關懷、認真敬業態度和自己的教學理念；而社會面則是教師與教學情境中相關人員保持良好人際互動關係。因此，分析教師的教學活動應包含認知、情意、社會三個層面

(許秀聰, 2005)。此外, 教師的教學工作時常承擔著許多道德責任, 這表示當我們關注教師課堂活動的各個面向時, 其教學的認知面和情意面是同樣重要 (Cooney, 2001)。

關於教師專業發展的情意面向, Lerman (1990; 引自 Andrew & Hatch, 2000) 提出了教師對數學可能持有的兩種信念: 一種是教師抱持絕對主義的觀點, 認為數學是無法改變的知識; 另一種是教師秉持可否證主義的立場, 認為數學是透過解決問題來學習的一種社會構念。因此 Andrew & Hatch 的研究指出, 教師所持有的數學信念是會影響其教學內容和教學實作, 例如教師如果抱持著「數學概念和證明是可以開放來修正」的信念, 則會傾向展現出多樣化的教學活動; 或是教師認為「數學是生活的必要工具」, 則其教學活動就會明顯偏重在數學知識的應用。Raymond (1997) 的研究結果顯示, 教師所持有的信念可以分為深層信念和表面信念, 而且教師的信念會強烈影響其課堂中的教學實作。其中, 國小教師的數學信念大部分是與其求學時的學習經驗相關, 因而會傾向傳統的深層信念, 但是, 在數學教學和數學學習方面卻是傾向非傳統的表面信念, 像這樣衝突的信念教師常常是不自覺地持有, 致使教師的教學實作與信念的不一致。Thompson (1992) 也表示, 當教師認為數學是具有正確答案而且是不可否認的知識時, 其教學活動就會著重在概念的辨認以及程序性的練習。同時他也認為, 知識是有系統的並且也是確定的, 所以可以依據評鑑標準來判斷其真實性; 而信念則是擁有不同程度的說服力, 常常是不自覺的, 並且沒有絕對的對錯, 所以未有可以作為評鑑依據的準則。因此, 知識在接受評鑑之前可能會被視為是信念, 反之, 信念也可以依據新的理論基礎而被認為是知識。

關於教師專業發展的認知面向, Zaslavsky et al. (2003) 認為教師專業成長的兩個核心知識是「數學知識」和「教學知識」。而 Shulman (1987) 則主張教師的專業知識應該包含 CK、PCK、一般教學知識、課程知識、關於學生的知識、關於教學環境脈絡的知識和關於教育目標以及其他的知識。Tirosh & Graeber (2003) 提到, 教師必須精通關於學生學習的知識、數學知識和教學實作的知識, 才能進行有效的專業發展。Bromme (1994; 引自 Cooney & Wiegel, 2003) 認為, 教師應該具備學校數學、學校數學哲學、

第二章 文獻探討

教學、教學單元教學以及整合不同學科五項專業知識。而美國師資培育機構 The College of William and Mary (Christensen, 1996) 是以培育「通用知能教師 (effective liberally educated teacher)」為目標, 也就是指教師必須是受過良好的教育, 並且在特定教學領域教學和學習的一般原則之相關方面具有豐富的學識。Schwan (2000; 引自 Tirosh & Graeber, 2003) 認為, 教師的專業發展應該關注在學生的學習、教師的數學知識、支援教師教學實務以及符合情境中成員的背景脈絡。許秀聰 (2005) 則是指出, 教師專業認知成長的內涵應該包含學生學習的知識、數學和教學實作, 並且要以學生學習為目標來設計支撐教師的數學教學實作與教學脈絡。

一般而言, 在職數學教師的專業發展活動主要是與數學知識、關於學生學習的知識和教學知識相關, 就如同 Cooney (1994) 所說, 教師應具備「數學功力 (mathematics power)」和「教學功力 (pedagogical power)」, 也就是數學教師在課堂教學活動中, 不僅是教導學生數學知識, 同時也要幫助學生利用所需要的數學知識來解題, 並且運用自身的教學專業知識了解教學的問題與限制並解決之。而 Jaworski (2001) 認為, 透過反思和分析的過程來解決教學問題是可以展現教師的教學功力。因此, 教師教學的專業發展就是指解決教學問題能力的發展, 也就是教學思維的發展 (鄭英豪, 2000)。事實上, 在職教師的工作一直圍繞著「學習」這個概念, 包括學生的學習和教師自己本身的學習, 因此, 教師自己必須先是一個有效的學習者 (teacher-as-learner), 需要不斷地求進步。更進一步來說, 教師應該是一位研究者 (teacher-as-researcher), 這表示教師不能只是被動因應環境的需求或是法令的規定才去進修學習, 反而應該主動去對自己的實作情境加以批判或是提出建議尋求改進, 並且培養和增進自己的反思能力來提升教學品質 (饒見維, 1996)。因此, 教師的專業知能也應包含「反思功力 (reflective power)」(黃乃文, 2005, p. 42)。Wilson & Cooney (2002) 認為, 教師對教學思維的反思必須在教學的脈絡中進行。鄭英豪 (2000) 就指出, 教師必須對自己的教學活動作批判性的反思, 發現問題後重新調整教學思維, 擬定新的教學策略再次進行教學實作, 然後再次反思, 像這樣不斷反思調整的過程是可以促使教師察覺自己的教學問題, 因此, 教師的專業成長是在其教學情境中藉由教學反思和教學實作來相互引動。

目前，多數在職教師會透過各種學習管道不斷地提升自己的教學專業能力，尤其是自身的專業知識，以順應當前課程的教學需求與社會對教師的期待。例如教師可以透過在職進修、參加學校或師資培育機構所舉辦的研習活動以及學科領域的教學觀摩，來充實自己的學科知識和學科教學知識。Zaslavsky et al. (2003) 就指出，在職教師可以在自己的教學環境脈絡中直接學習如何教數學，並且，從透過與學生的互動中間接學習如何教學，以進行教師的專業成長。不僅如此，目前多數的在職教師也能體認到，提升自己的專業知能在教學生涯裡是一個終身學習的過程，而其專業能力多半是透過與自己教學場域中的同事或學生互動而有所提升。例如，李源順 (1998) 的研究結果顯示，教師可以經由與同事的互動進一步考量到學生的學習需求和學習問題，因而改變了自己的課堂教學實作方式或內容；而且，透過與同事和學生的互動也可以引發教師本身對數學教學問題的察覺、解決和反思，進而激發教師的專業成長。因此個人認為，無論是資深或是初任教師均各自擁有許多的教學問題有待解決，因此，每位教師應該可以在自己的教學情境脈絡中，藉由反思自己的教學思維與實作活動或是進一步去了解學生的學習狀況，來充實教學相關的知識內涵，進而引動自己的專業成長。

另外，教師在自己的教學脈絡情境中，為了幫助學生有效學習就應該展現其個人專業教學精神和溝通表達能力，而且，也要能夠與校內同事協調合作，尋求適當資源或管道解決自己的教學問題，並善用自己的領導能力來掌握班級學生的學習狀況。因為，對學生的教學和輔導工作之成敗大都可以歸因於師生關係，而且在教育行政工作和親師溝通上也涉及了教師人際關係的能力，雖然教師的人際關係和溝通表達能力不易訓練，但是，我們仍然應該關注在提升職前教師和在職教師專業發展的社會面向(饒見維, 1996)

(二) 專業發展的理論

Zaslavsky et al. (2003) 提到，教師必須在教學脈絡中去瞭解自己在教學、學習和學科內容的知識和信念上的轉變，並且在自己的專業發展歷程中扮演主動的角色。因此，在教師專業發展計畫中最重要的就是培育教師能夠反思自己的教學實作和學習歷程，透

第二章 文獻探討

過教學反思活動來提升自身的教學思維。事實上，當提及教師必須對自己的教學和學習歷程作反思時，即表示教師在其教學生涯中仍是一位學習者。所以 Lerman (2001) 提出了反思實務的觀點，主張教師應該去思考如何在課堂中展現專業人員所該有的作為，以及身為一位教師如何持續學習教學和了解學生的學習情況。因為，教師若是能夠對自己的教學實作進行反思(reflection on-action), 以及在教學實作的當下進行反思(reflection in-action), 可以有助於教師教學實作知識的成長 (Zaslavsky et al., p. 879)。然而無可避免地，這與「什麼是有效的數學教學？」有密切的關係。Jaworski (2001) 認為，教師能夠利用有效的方式來幫助學生學習數學就是所謂的優秀教師 (good teacher), 而這樣的觀點是指教師必須要考慮到課堂中的學習者是如何學習數學，因此主張教師和師資培育者的專業成長必須在三個層次中進行實作和反思，包括：在數學方面是指，使學習者有效學習數學而準備的數學活動；在教學方面則為，發展教學方法以進行數學教學；而第三層次是指，師資培育者要幫助教師進行前兩層次的專業發展。其中，前兩層次分別與 Cooney (1994) 所提出的數學功力和教學功力相呼應，而第三層次 Jaworski (p. 302) 則稱之為「培育功力 (educative-power)」，同時也希望教師可以察覺到數學解題和教學之間的連結，作為培養數學功力和教學功力的入門方法，進而促進教學專業的成長。

另外，Jaworski (1992) 也提出了教學三元組：佈置和經營教學環境、對學生學習有高度敏感度以及提供富有挑戰性的數學內容，並且主張這教學三元組可以用來理解教師的數學教學實作。而 Steinbring (1998) 則是提出數學教與學的模組，他主張教師應該提供可以讓學生以自主的方式來操作和建構數學知識的學習環境，並且藉由觀察學生的學習和反思學生建構知識的學習歷程，來調整適合學生學習的環境，也就是說，教師是透過教學來學習如何進行教學。Zaslasky & Leikin (2004) 綜合此兩種模式而提出了三階層模式 (three-layer model)。這個模式包含數學教師 (簡稱 MT)、數學師資培育者 (簡稱 MTE)、培育者的輔導者 (簡稱 MTEE) 三種不同身分的教學或學習之專業發展，而這三者可能同時是學習的促進者或是學習者。例如，MT 所扮演的角色是促進學生學習數學以及學習如何教數學。而且，在模式中有兩種不同類型的角色轉換，一種是必須藉由不同的促進者和學習者之間的直接互動，以分享、諮詢和交換想法來轉換角色，例

如 MT (學習者) ↔ MTE (促進者) 或 MTE (學習者) ↔ MTEE (促進者); 另一種是從某種促進者的角色轉換成另一種促進者的角色, 例如 MTE (促進者) ↔ MTEE (促進者)。

Tzur (2001) 綜合 Dewey, Piaget & Schön 的反思和互動這兩個構念, 認為在與人互動的過程中去反思自己和別人的行為是概念發展的心智根源, 而提出了師資培育專業發展的四焦點模式 (a four-foci model)。若以學生為角色 (學生的數學學習), 認為透過反思學生能察覺到數學意義, 並且可以結合數學和非數學的經驗; 其次, 若以 MT 為角色 (教師的數學教學學習), 認為透過反思教師能夠更加理解數學的意義, 以及如何促進學生的學習; 最後, 若分別以 MTE 和 MTEE 為角色 (學習教老師和學習輔導師資培育者), 認為透過反思可以讓他們更加瞭解師資培育的意義。此模式必須在內層中進行反思以重整概念獲得新的理解, 才能進行層次間的轉換, 並且藉由反思內層的實作和互動抽離出更精練的思維, 而再次涵蓋內層。

綜合上述的相關研究個人認為, 教師在教學之前應該回歸至學習者的立場, 重新去思索數學的意義, 以區別自己學數學和學生學數學之間的落差, 進而構思出最適合學生的教學方式; 而且, 也要在教學中去反思與學生互動的過程, 以作為彈性調整或重新修正自己的教學構思和教學實作的依據。實際上, 從教學前的構思、教學中的實作活動到教學後的反思, 在職教師的專業發展大部分是透過與教學情境中的成員互相學習而成長; 教師時常是藉由學習如何教學而知道自己專業知識的不足, 透過實際的教學實作而發現自己的教學困難或問題, 因而會透過向同事請益或是與學生的教學互動去反思自己的教學構思和實作; 不僅如此, 教師往往也會依據自己的教學經驗去預想學生的學習情形或成效, 而設計出有變通性的教學活動。也就是說, 在職教師必須透過不斷地學習和反思才能提升自身的專業水準, 以同時勝任學習者和學習促進者的雙重角色。

第二節 數學教師的教學專業內涵

想協助教師從課堂教學活動中因思考教學而專業成長，就必須重視教師的知識、信念和實作(Tirosh & Graeber, 2003)。在 *Adding It Up : Helping Children Learn Mathematics* (NRC, 2001 ; 引自 Tirosh & Graeber) 一書中就指出，要精通數學教學就必須對教學實作的核心知識能有概念性的理解；實施流暢的教學程序；具備有關教學構思和解決教學問題的策略能力；在驗證、解釋和反思個人教學實作時能作出合適的推理；以及，在數學、教學、學習和實作方面能有豐富的性向。金鈴和林福來(1998)認為，教師的教學過程通常同時涉及知識和情意兩個層面，因此，可以藉由「營造和帶動教室氣氛(教室氣氛觀)」的情意面，以及「教學方法與技巧(教導觀)」和「瞭解學生程度和學習困難(學習觀)」的知識面，來分析準數學教師的學前教學觀念。張繼元(2005)則指出，一個好的數學教學應該同時兼顧教師專業知識的認知面，以及關於學生學習的道德情意面，也就是說，數學教師應該要有能力教導學生去詢問、分辨、辨證和理解數學概念，同時也要面對數學學習的道德層面問題。然而，教師所展現出的教學認知面(教學概念)和情意關懷面(教學認同)在其教學過程中應是互相影響的，所以，我們可以依據這兩個面向來分析教師的教學實作活動。教師的教學認知和情意是數學教學內涵的一體兩面，也就是說，從不同的層面來分析教師的教學內涵是可以得到不同的觀點。依據本研究的目的，以下將從教學的認知面來探討數學教師的專業內涵。

一、教學概念

Shavelson & Stern (1981)認為，教學是教師為了幫助學生學習和有效達成教學目標而作出合理教學判斷和決策的過程。因此，考量課程的教學目標、瞭解自己所扮演的教學角色和學生的角色、呈現適當的課堂活動、運用合乎邏輯的教學方法和程序以及預想自己的教學成效都屬於教師教學概念的範疇，而且，這樣的教學概念是會形塑教師的教學行為特徵(Thompson, 1992)。陳松靖(2002)認為，教學概念是教師對教學認知的構念，以及能夠運用自己的教學知識，透過教學推理而實踐於教學活動中。而且，教學概念也是支配課前計畫和思維、指使教學活動和行為以及課後反思的基礎。所以，教師

的教學概念是形成其決定如何教時的思維基礎（鄭英豪，2000）。當教師面對特定數學單元的教學時，心中所浮現關於此單元和其他相關單元數學知識的思維，以及構思有效的教學技巧讓學生學得該單元的內容和數學知識，就能反映出他或她的教學概念。而且這樣的教學概念是以知識為基礎，有特定意圖和目標的智力行動，並且必須依據所要教的單元、學習者和學習脈絡而調整（黃凱旻和金鈴，2003）。因此，教學概念泛指教學中的知識面向，也就是數學概念和教學知識的本質（張繼元，2005）。

Leinhardt & Smith（1985；引自 Wilson et al., 1987）認為，教師的教學需要兩類知識，包括課程結構知識（knowledge of lesson structure）和學科內容知識（knowledge of subject matter）。前者是指具有能夠順利進行規畫和執行課程、使章節之間的連結流暢以及能夠清楚解釋教材的認知技能；後者是關於特定主題之多重表徵、基本算數規則、概念之間多重連結的知識。依據認知心理學的觀點，教學的知識基礎是指教師在教學情境中所需要的理解、知識、技能和性向（Wilson et al.）。因此 Brown & Borko（1992）指出，個人的知識和思考是屬於心智的內部，所以，教師的心智內容是指教師的知識系統，而認知過程就是教師的教學構思。事實上，教師的「認知內容」和「認知過程」是互相交織的，因為構思和進行教學實作活動會同時利用到知識和思考能力。其中，教師的知識是有組織地儲存在其心智結構中，而且，教師的知識結構和心智表徵對於其理解、思考及行動是相當重要的，意即教師的知識會影響其教學構思，而構思會左右其教學實作。所以，在教學前縝密地規劃、教學中作出立即性的決策以及教學後反思自己的教學實作，是教師在教學時所需要的認知技能（陳松靖，2002）。Bush（1982；引自 Fennema & Franke, 1992）認為，知識會影響教師的教學構思，也能使其進行彈性的推理、判斷、衡量和反思，不僅如此，教師的教學實作以及教學成效也是與其所擁有的知識息息相關。

從上述的研究可知，數學教師的教學是需要專業知識和認知技能，以引動其教學構思、教學實作和反思。因此，本研究中所指的數學教學概念是：教師針對不同的數學單元，能運用自己的專業知識和教學技能，以及教學脈絡中的各項資訊和支援，構思出適合不同特質學生的教學策略，以進行課堂教學。

二、教學概念的內涵

(一) 認知內容

理論上，教師的教學活動應是先確認單元的學習目標和學生的起點行為，再選擇合適的教學活動，最後再評量學生的學習結果。實際上，教師主要關注的是如何進行教學活動 (Shavelson & Stern, 1981)。Ball & Bass (2000) 就指出，數學教師的教學核心活動應該包含理解學生所了解的內容、數學概念表徵的選擇和使用、教科書的評估和修正、構思各種課程活動以及帶領學生討論。如果學生的學習是連結新資訊和現有的知識系統而以自己理解的方式來學習數學，那麼教師的教學活動就應該促進這一類連結 (Brown & Borko, 1992)。因此，當教師是以理解學生的學習為首要考量時，他們的教學過程就必須以學生為重心 (Artzt & Armour-Thomas, 1999)。而且，教師的教學應該要教導學生以關係式 (relational) 或連通式 (connected) 的理解來學習數學概念，而不是僅提供機械式 (instrumental) 的理解 (Jaworski & Gellert, 2003)。所以，為了促進學生的理解教師應該具備的知識包括 CK、PCK 和課程知識 (Shulman, 1986)。其中的數學課程知識方面，范良火 (2003) 認為對大多數的數學教師而言，核心的教學材料是指教科書。所以，課程知識是指教師對課堂中所要討論的主題內容或教材的理解 (Shulman)。廣泛來說，課程也包含了參考書和其他材料，所以，教師的課程知識也是關於教學材料和教學資源的知識。在教學上，教科書對教師教學的影響取決於教師對該教科書實際擁有的知識程度；而且，教師時常會透過自身的教學經驗和反思，以及與同事之間的日常交流來發展關於課程方面的知識 (范良火, 2003)。

一般而言，教學活動是從教師或學生對教材內容的理解開始，而且教師在設計教學活動和回應學生所提的問題時，必須要很清晰地表達自己對數學的理解，所以也同時會受到數學知識的影響。不僅如此，數學知識豐富的教師可以將各教學主題作連結，以及將數學觀念作概念性的解釋 (Brown & Borko, 1992)。因此教師的 CK 是指教師心智中

的知識總量和組織，它包含將學科內容中的基本概念和原理與事實知識作整合，以及確認學科內容的真偽和有效性（Shulman, 1986）。然而在實際教學情境中，教師若只是依據學科知識來判斷學生的回應是否正確，是無法幫助學生建構知識，應該還要去了解在特定單元內容中，學生的共同概念和思考方式，以及在理解學生推理過程的同時，也要去推測學生的錯誤來源（Even & Tirosh, 1995）。所以 Wilson et al. (1987) 認為，當教師利用自己的知識去瞭解學生的需求和行為，並且判斷和引導學生的學習方法時，這表示教師所需要的知識並不是只有 CK，應該還要加入其他類型的知識，例如關於學生、脈絡和教學的知識，進而重組成 PCK。所以，PCK 是學科內容知識和教學知識的混合，用來理解特定主題或問題是如何組成，以適應不同興趣和能力的學習者（Shulman, 1987）。Ball & Bass (2000) 更進一步指出，PCK 是將數學、學習者、學習和教學的知識網綁在一起的特殊知識，可以幫助教師預想學生可能會產生的學習錯誤，並且擁有不同教學方法或解釋來解決這些學習困難。也就是說，教師除了必須了解學生是如何獲取知識和發展自我形象 (self-image) 之外，也要會將複雜的學科內容轉換成學生可以理解的形式、能夠利用真實世界的情境和問題來呈現數學內容、以及可以運用具體和圖形化的表徵物來模擬數學觀念，使得學生看到新舊知識之間的關係（Fennema & Franke, 1992）。

雖然，教師是利用 PCK 來設計課程與安排課堂討論，而且也會依據自己的 CK，以理解學生反應和判斷課程目標（Ma, 1999）。但是，PCK 並不能總是可以使教師擁有相當的彈性來處理複雜的教學活動。因為教師必須思考學生的數學想法、分析教科書的表徵方式以及考慮不同數學表徵之間的相對價值。因此，教師還需要一種在教學上是有用的而且是準備好的數學理解，也就是教學有用的數學理解（pedagogically useful mathematical understanding，簡稱 PUMU）。這表示教師不只是需要擁有數學知識，也必須在教學中調整自己的數學知識，所以，這種具有教學功能的數學知識似乎是有效教學的核心知識之一（Ball & Bass, 2000）。另外，Ma 利用知識包裹（knowledge package）來描繪教師的 CK，包裹中包含關鍵概念、發展概念的程序以及概念環節（concept knot），也就是說，在知識包裹中，程序性和概念性知識是互相交織的，教師如果擁有概念性知

識且意圖促進學生概念性理解，那麼他們也不會忽略了程序性的知識。Ma 更進一步指出，當教師的 CK 是由發展良好且互相連結的知識包裹所組成時，就會形成一個受學科結構所堅固支撐的網絡，也就是指教師對數學可以具有廣度、深度、連結且徹底的概念性理解。其中，所謂具有深度的了解意思是指可以連結到學科中強而有力的概念；有廣度的了解就是可以與其他類似的觀念作連結；而透徹是能貫穿理解所有的主題內容，而將對學科的深度和廣度理解編織在一起。因此，數學教師不只要能作正確計算以及瞭解算數規則的理論基礎，也要能察覺數學概念的結構和數學的基本態度以進行教學，也就是要具有對基本數學的深層理解 (profound understanding of fundamental mathematics, 簡稱 PUFM)。

以教學實作的觀點來看，教師的教學活動是需要彈性和適應 (Ball & Bass, 2000)。而且教師會依據教學脈絡來安排自己的知識包裹，不僅如此，學科主題之間的連結也會隨著教學流程而改變 (Ma, 1999)。也就是說，教師是會將自己的數學知識解壓縮 (decompression) 成較不精鍊的形式，才能看出學生是如何思考數學知識；將學生的學習任務分解 (decompose)，以確保每個學生都有學習機會；鬆綁 (unpack) 自己高度壓縮的學習理解，才能瞭解學生不依尋常理所提出的觀點和錯誤 (Ball & Bass)。而 Ma 認為，擁有 PUFM 的教師會有意圖要去將數學概念和程序之間作連結，使學生學到整體的知識；也可以從各個角度去體會一個數學觀念和不同的解題方法，使學生對於數學能夠具有彈性的理解；而且教師會表現出其對數學的態度，會傾向於重述和強化數學基本觀念，在鼓勵學生進行解題的同時，也會引導學生去處理真實的數學問題；此外，教師不會受限於所要教授的數學知識，而是對數學課程達到基本的理解，並且可以隨時創造機會來審視學生先前所學的重要概念以及學生之後所要學的內容。

由於教師的教學是與學生的學習相關，所以，教師要依據數學教材內容和學生特質選擇合適的表徵策略，在自己和學生的理解之間搭起溝通的橋樑。因此 Shulman (1987) 指出，教師應該要將學科內容轉變成教學上有力的形式，並且能夠適應不同能力和學習背景的學生，而這樣的過程就是教學推理 (pedagogical reasoning)。所以，教學推理是

成功教學的核心，但卻是教學中最困難的面向之一（Brown & Broko, 1992）。Wilson et al. (1987) 認為，教學推理是從「理解（comprehension）」數學觀念和觀念之間的關係開始，藉由檢視教學教材和選擇適合的表徵方式以「轉換（transformation）」教學內容，再進行「教學（instruction）」，同時也在教學中和教學後進行「評量（evaluation）」並透過「反思（reflection）」的過程來評估自己的教學，因而得到關於教學內容和師生參與的「新理解（new comprehension）」。Shulman 更進一步指出，透過這六個步驟的教學推理，教師可以藉由教學省思而使它成為一個一再循環的過程。

綜上所述，個人認為教師的教學認知內容應該包含 CK、PCK、學生知識和課程知識，而這四類知識也是教學上的主要專業知識。其中，教師的專業知識會影響其對課程內容的轉換，也會影響其教科書的使用和解釋概念或原則所使用的表徵方式。而且，一位專業知識和教學經驗豐富的教師，當發現教科書中的內容編排無法符合自身的理解時，不只會改變教材內容的編排，也會發現令學生誤解或是不適合的主題內容。不僅如此，教師也會以自己的專業知識去查探學生的迷思概念、有效處理一般的班級問題以及正確解釋學生所表達出來的想法。事實上，對於課程中的特定單元，教師會使用表徵來進行教學，而且，專業知識豐富的教師時常會利用表徵來喚起學生的基本數學概念，也會利用表徵來連結不同單元中的相關主題內容。教師在幫助學生發展理解的同時，也會關心學生是如何理解教師的教學內容，也就是說，一位專業的數學教師不應只是對於數學概念擁有其個人的理解，為了促進學生的學習他或她就必須了解學生對概念的各種理解方式。

（二）認知過程與課堂實作

Shavelson (1986；引自 Brown & Broko, 1992) 指出，教師教學前的構思和教學中的思考在教學的過程之中是相互影響的，因此教師的認知過程是指，教師如何將儲存在教學基模（teaching schemata）中的知識轉譯成教學計畫或程序以進行課堂教學。Shavelson (1973；引自 Clark & Peterson, 1986) 認為任何教學行為都是一個教學決策的

結果，教師會依據所取得的資訊而作出這樣複雜的認知過程。由於，教學是教師在其教學脈絡中根據個人的教學信念與認知，將之轉換為教學行為的活動，所以，教師的教學構思也可以視為是一種在教學脈絡中解決教學問題的思維，包含了察覺問題、形成策略、實踐策略和反思教學。而且，教師的教學思維是在教師的教學概念和教師對其教學現場的認知基礎上進行，所以，教學思維也可以看作是以信念和知識為基礎的解題思維（鄭英豪，2000）。

事實上，個體的思考是會受到外在環境事件或是內在其他因素的刺激，而以現有的經驗和知識為經，以眼前資訊為緯，從而思考所欲達成的目標（巫銘昌，2001）。以教師的教學思考而言，Wilson et al. (1987) 指出，當教師對教學內容進行構思時，會使用 CK、PCK、其他內容知識、課程知識、學習者的知識、教育目標的知識和一般教學知識。Feiman-Nemser & Buchmann (1986；引自 Brown & Broko, 1992) 則是認為，教師的教學構思主要是以學生的需求作為考量的依據，而不是僅以教師或學科的需求來構想。Brown & Broko 更進一步指出，由於教學構思中最重要的就是要去思考教師自己的教學意圖和學生的學習，所以，教學構思是以教學、學生和學科內容為基礎的策略性知識。此外，當遇到新的教學情境時，教師需要重新考慮課程內容、學生、學習和教學，並且，依據自己的能力和各種不同的知識來作推理以構思如何進行教學（Ball & Bass, 2000）。

Shavelson & Stern (1981) 指出，教師是在一個不確定且複雜的環境中進行教學構思、判斷和實行自己的教學活動。所以，教學構思的功能不只是可以協助教師分配教學時間，也可以使教師得到精神上的回饋，以及減少課堂中的不確定性（Clark & Peterson, 1986）。所以 Bush (1982；引自 Fennema & Franke, 1992) 認為，在教學前，教師會去構思要教些什麼內容、該如何進行教學、如何去組織班級、要使用何種教學程序以及如何依據不同特質的學生而改變自己的教學實作；在教學中則會修正自己的教學計畫、會思考回應學生的方式以及調整教學步調，藉以評估自己的教學是否有依教學前的計畫執行；在教學後，則是根據自己所蒐集到的資訊來反思自己的教學活動，在這過程中，教

師的教學構思主要是在教學前進行。事實上，教師在教學構思的過程中最重要的就是要作出教學決策 (decision-making)，而且，教師在教學前所選擇的教學決策會受到教學目標、教學信念、學生的學習情形、教學任務本質和教學情境限制的影響，如圖 2-1 所示 (Borko, Cone, Russo & Shavelson, 1979)。

Borko et al. (1979) 認為，教師在教學前會利用關於學生的一般能力或成就、課堂參與度、自我心像、課堂行為和學習習慣等相關資訊，推論或評估學生的學習情形，以判斷合適的教學決策；由於教師的教育目標和信念與其教學風格相關，因而教師的信念會影響其教學決策；再者，以認知或情意為教學目標的課程，其各自的教學任務本質也會不同，因此，會限制了教學策略和教材內容的選擇，進而影響教師的教學決策。Borko et al. 更進一步指出，這個模式是想傳達「教學是整合教師所有的知識和技能至教學決策中，使其能適應任何教學情境」。而且，每位教師的理想教學決策是因人而異的，雖然教師對資訊掌握有限，但是對學生的預想以及掌握相關資訊卻是必要的，他們必須依照自己的教學信念和教學需求去仔細衡量「決定如何做」(Borko et al.)。

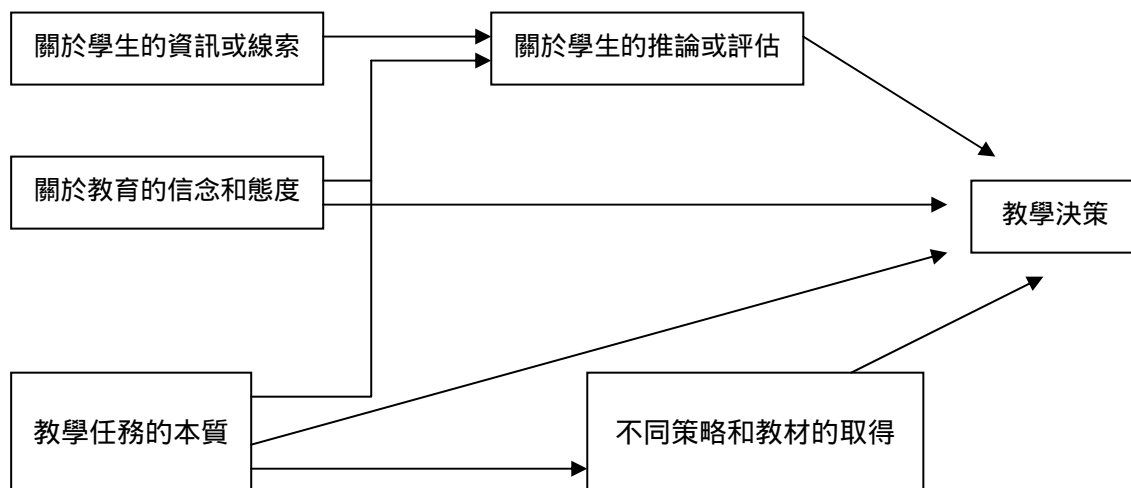


圖 2-1 : (教學前) 教學決策模式

(Borko, Cone, Russo & Shavelson, 1979, p. 139)

Clark & Peterson (1986) 認為教師的教學思考包括教學目標、學科內容、教學過程

第二章 文獻探討

和學習者。雖然教學中的構思較少發生，但是會讓教師在教學中進行構思的最主要原因就是「教學程序的進行並未符合教學前的規劃」，例如學生偶發的行為問題或是教師判斷教材內容是有誤的（Shavelson & Stern, 1981）。Clark & Yinger（1979）指出，教師在教學中的構思是持續地在評估學習情境，處理情境中的各項訊息，構思接下來的教學活動，並且觀察教學行為對學生的影響。然而，這樣的思考主要是關心教學活動的流暢性，所以，他們大都不願去更改預擬的教學策略，因為教師在教學前是依據以往的教學經驗和學習內容來構思教學策略，而且臨場更改未必能達到最佳的成效，也會對學生的學習產生不確定性（Shavelson & Stern）。另外，教學後的思考會呈現一些導引思維的指標（例如診斷教學），而使得教師會專注於分析自己教學問題的內涵並調整教學策略（鄭英豪，2000）。

以教學實作的觀點而言，無論是教學前、教學中和教學後的構思，教師的思考是會影響課堂中的學習事件、師生之間的溝通內容以及學生的學習內容（Wilson & Cooney, 2002）。因此，Clark & Peterson（1986）綜合關於教師思考和行為的相關文獻而提出「教學思考與行動模式」，來描述教師的構思過程和教師的教學實作兩者之間的關係（如圖 2-2）。它顯示出教師的課堂行為會影響學生的課堂行為，進而影響學生的學習成就，反之，學生的學習成就也會影響教師的行為，進而影響學生的課堂行為。教師的思考過程包含教師教學前和教學後的思考、教師教學中的思考和決策以及教師的知識和信念。前兩項的區別在於思考品質的不同，而且教學是一個循環的過程，所以教學前和教學後的思考是很難去區分。此外，教師的知識和信念會影響教師的計畫以及教學中的思考和決策。教師也會由於課堂互動中的思維以及教學前的計畫而發展知識和信念。教師的思考會左右行動，而行動也會影響思考，所以，若是想要完整的了解教學過程就應該同時檢視這兩個領域。不僅如此，教師的行動通常受限於物理環境和外在的影響（例如校長、課程），或是由於一個難得的機會而可以展現自己特殊的教學實作活動；相同地，教師的思考過程也可能受限於課程計畫已經擬定而缺乏彈性，或是給予教師機會來彈性設計自己的課程，而這些都是屬於「限制和機會」的範疇中。

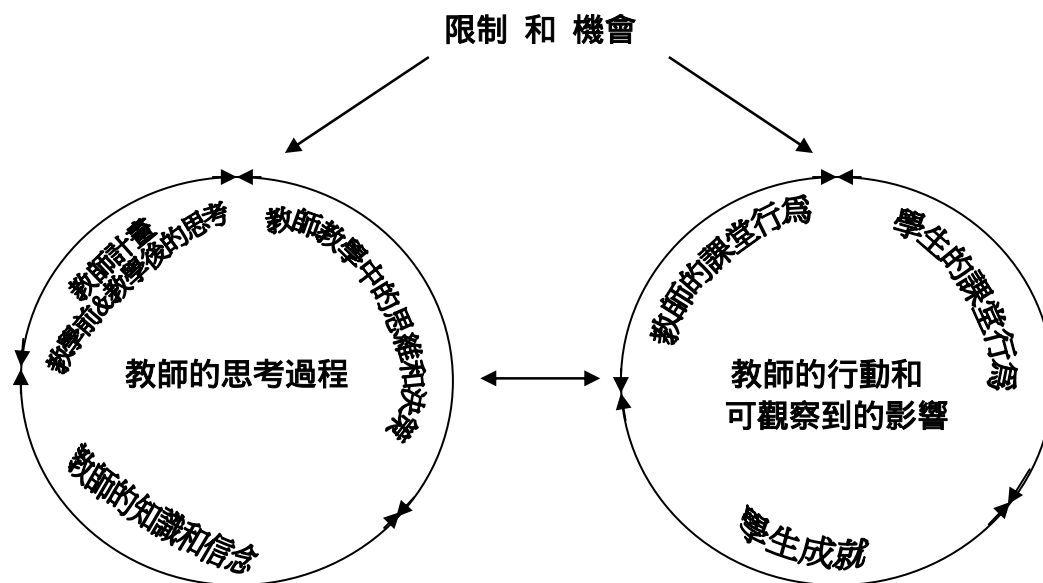


圖 2-2：教師思考和行動的模式

(Clark & Peterson, 1986, p. 257)

綜合上述研究，個人認為教師的教學構思是以專業知識為經，以學生學習需求和課程要求為緯，而在自己的心智中繪出一張可以帶領特定脈絡中的學生來學習數學概念的教學藍圖。對在職教師而言，課堂的教學活動大都著重於學生參與程度和教學氣氛的掌控，因此在教學前，他們會依據個人的教學經驗和學生的學習習慣，構思出適合不同特質學生的教學策略；在教學活動進行中，會依據學生的學習步調和反應來思考自己的教學是否流暢，或是略為調整教學前就已構思好的教學策略；在教學完成之後，會透過學生的學習成效來思考教學的優缺點，以作為下一單元教學前構思的依據。雖然，教師的教學構思是左右著教學活動的進行，但是，教學環境中的各種限制或是學生學習上的偶發狀況，也會促使教師在教學的當下略作調整，因而導致教師的教學實作與教學前的預想有落差。

第三節 數學-幾何概念的教與學

張靜譽（1982）指出，「幾何」就是「多少」的意思，是透過測量來研究空間的一

門數學。換句話說，關於物體形狀、大小與相互位置關係的數學就稱為幾何學，並且可以將其區分成憑經驗與直觀判斷的「經驗直觀幾何」，以及依據定義與公設而進行邏輯推演的「理論演繹幾何」(馮允禮，1979)。因此，幾何就是探討空間關係和邏輯推理的數學(左台益和梁勇能，2001)。幾何以前也稱之為「形學」，最早的幾何知識是與尺規運用有關，而這些知識是與圖形概念有密切的關係，具有明確的外顯表徵方式，可以引導人們在幾何物件之間作推理(周筱亭和黃敏晃，2006)。Usiskin(1987)指出，幾何課程主要包含四個維度：研究圖形的視覺化、繪圖和結構；研究實際物體的世界；作為表徵非視覺數學概念的工具；以及，研究以數學為基礎的知識系統。很顯然地，前三個維度就需要空間推理(spatial reasoning)，也就是說空間能力(spatial ability)對於學生的數學概念建構和使用是相當重要的(Clements & Battista, 1992)。事實上，學童空間概念的建立是來自於數學學習活動，從具體情境中逐漸將空間覺察能力加以抽象化，並且隨著時間和經驗的累積，逐漸發展成為空間推理能力，由此可知，空間能力會影響學童幾何概念的學習(Nickson, 2000；李震甌譯，2004)¹。因此，以下將分別探討學生的空間能力和 van Hiele 幾何思考層次理論，以及教師的幾何教學取向。

一、學生的幾何思考

(一) 空間能力

Suydam(1983)指出，學習幾何課程就是要發展邏輯思考的能力、發展關於真實世界的空間直覺、學得研讀其他數學所需要的知識以及學習去閱讀和解釋數學推論。因此，多數幾何課程主要是提供一個可以讓學生發展邏輯思考的環境(Henderson, 1988)。一般而言，學校的幾何課程是要學生去學習形式化的空間物件、關係和轉換，以及數學公設系統，所以，在幾何課程中都會重視學生的空間推理。而所謂的空間推理是包含了一系列的認知過程，藉由這些認知過程可以建構和操作空間中的物件、關係和轉換的心

¹ 為尊重原作者，僅在第一次引用此篇文獻時列出翻譯者，之後引用時則只列原作者。以下本文中之其他翻譯著作均同。

智表徵 (Clements & Battista, 1992)。學校數學課程與評鑑標準 (NCTM, 1989) 指出，對於數學課程的重視需要從事實和程序記憶改變為強調概念理解、多重表徵和連結。Skemp (1987；引自 Wheatley, 1990) 認為，當數學課程逐漸從重視程序改變為強調關係時，空間感 (spatial sense) 也就逐漸重要。其中，課程標準中所指的空間感就是空間視覺化 (spatial visualization)、空間推理、空間察覺 (spatial perception) 以及心智運轉的視覺心像 (visual imagery to mental rotations)，簡單來說空間感就是心像 (imagery) (Wheatley, 1990) 而建構和操作心像的能力即可視為一種空間能力(左台益和梁勇能, 2001)。

Clements (1979；引自 Clements & Battista, 1992) 指出，個體若是擁有發展良好的空間能力就能夠從不同的觀點，利用操作視覺心像來想像物件的空間排序。Bishop (1983) 認為，學生的幾何學習與兩項空間能力有關，包括：具有解釋圖形資訊、理解視覺表徵和字彙的能力；以及，涉及視覺表徵和心像的操作與轉換，並且將抽象關係轉譯成視覺表徵的視覺處理能力。而 Linn & Petersen (1985；引自梁勇能, 2000) 認為，空間能力是指表徵、轉換、產生和回憶關於符號且非語言性的資訊之技能，並且將空間能力區分為空間知覺、心理旋轉和空間視覺化。其中，空間視覺化最重要的就是要持續地操作刺激物的心像，而且學生在學習幾何和解題時，會利用空間思考來表徵或操作相關的資訊 (Clements & Battista, 1992)。由於，學習幾何是需要具有在視覺上能夠辨別出不同複雜程度材料的能力，並且要能夠去找出隱藏的、翻轉的圖形來解決相當明確的問題 (Farrell, 1987)，因此，空間能力和視覺心像在數學思考上扮演極重要的角色 (Wheatley, 1990)。Clements & Battista 指出，有許多學生是利用視覺思考來表徵和運思幾何概念，尤其是，小學階段幾何觀念的學習相當強烈地依賴視覺表徵，這是因為孩童仍相當地依賴視覺心像。

由於有很多的幾何概念很明顯都是具有視覺上的特色，所以空間能力與學生的幾何學習成就息息相關 (Clements & Battista, 1992)。因此，在進行幾何相關概念的教學時，教師應該了解學生的學習偏好，例如他們是偏向以邏輯符號來思考數學觀念或是利用視

覺化的圖像來學習，而且，教師應該要提供可以讓學生發展空間想像力的教學活動。如果教師沒有企圖發展學生的空間知覺和視覺心像，那麼學生可能只是形式上吸收教師所教導的幾何知識，而不是利用理解來學習幾何概念。就目前多數七年級學生的幾何的學習而言，他們的學習模式仍是停留在小學的思考方式，也就是在學習幾何圖形的性質時，仍是會依賴視覺上的表徵。所以，教師可以藉由將圖形性質視覺化的過程，來帶動學生空間知覺的發展，為其在抽象思考層次中的空間能力奠定基礎。

(二) van Hiele 幾何思考層次理論

van Hiele 的幾何思考層次理論是由 van Hiele & van Hiele-Geldof 夫婦在 1957 年根據完形心理學的結構論和皮亞傑的認知發展理論，提出學生在幾何概念學習上的五個層次（左台益和梁勇能，2001）。van Hiele 幾何思考發展理論主要是「學生的幾何思考是從像完形（gestalt-like）的視覺層次開始，逐步進展到較複雜的描述、分析、抽象及證明層次（Clements & Battista, 1992）」，因此，以下綜合 Mayberry(1983)、Crowley(1987)、Henderson(1988)、Fuys, Geddes & Tisxhler(1988)、Clements & Battista(1992) 以及周筱亭和黃敏晃(2006)的研究來描述各層次的內容和每一個層次的發展特徵。

層次 1：視覺期（visualization）

學生是透過視覺來觀察實物，依據圖形外觀來分辨、命名和比較圖形，也可以透過移動、旋轉和翻轉的方式，以直觀辨識某類圖形。此時，學童是使用非標準的數學語言（例如稱正方形是正正方方的樣子），也會使用標準的數學語言來描述圖形的形狀，但是並不理解這些數學語言的定義（例如不理解用四個邊等長、四個角都是直角來定義一個正方形）也就是說，學生並非利用圖形的性質而是運用視覺上的考量來推理；而且，在此階段中主要是學習某些幾何字彙、可以分辨某些特定的圖形以及可以複製給定的簡單圖形。

層次 2：分析期 (analysis)

此層次的學生具有豐富的視覺辨識經驗，藉由圖形的組成要素和屬性作幾何概念的推理來建立概念的性質；也會開始尋找出某一類圖形的共同性質，並且能夠利用學習經驗（例如摺紙或測量）來發現圖形類別的性質或規則。此層次中的學生會開始分析幾何概念，了解圖形性質的文字敘述，但是仍無法解釋圖形幾何性質之間的關係，也不了解圖形的定義。

層次 3：抽象或非形式演繹期 (abstraction / informal deduction)

學生能有邏輯地整理概念的性質、抽象定義的形式，而且在判斷概念的性質時可以區分充分和必要條件；他們可以建立單一圖形和兩圖形之間性質的關係，了解圖形分類和定義，以進行非形式化的推理；也能夠掌握各種圖形的構成要素，進一步探索圖形的內在屬性關係，以及不同類圖形之間的包含關係，但是，不需要描述所有的屬性之後才能確認某一類的圖形。學生能夠將所獲得的經驗結果與演繹技巧作連結，但是並不了解演繹的重要性或公設的角色，看不出邏輯順序也不知從何開始著手證明。

層次 4：形式演繹期 (formal deduction)

學生能夠利用名詞、公設和基本邏輯定義和理論，在數學脈絡中作形式化的推理；可以在一個公設系統中建立理論而不只是記憶圖形之間的各種性質，並且能夠證明與理解一個定理可以有很多不同證明的方法；也能理解一個定理的充分或必要條件的內在關係，並發現正逆命題之間的差異性。

層次 5：嚴密性或公設性 (rigor/axiomatic)

可以在不同的公設系統中建立定理，並分析或比較這些定理的特性；也可以理解抽

象的幾何推理，甚至可以自創出一套幾何公設系統。

Clements & Battista (1992) 認為，應該在層次 1 之前還有一個層次，稱之為前辨識期 (pre-recognition)。在此層次中，學生對幾何圖形的認識可能只注意到圖形的部分視覺特徵，他們無法辨識出相同的圖形和同一類別中的圖形，但是可以區分曲線和直線圖形，例如學生可以區分出三角形和圓形，但是分辨不出正方形和三角形，這是因為缺乏必要的視覺心像。

(三) van Hiele 幾何思考層次理論的特色

Clements & Battista (1992)、Fuys et al. (1988) 和 Nickson (2000) 的研究皆指出，van Hiele 理論有四個特色。首先，學生的幾何學習是一個不連續的過程，也就是指在學習曲線上會有跳躍，而顯示出不同思考的層次。這就表示，當學生遇到他未曾見過的幾何問題時，經常是處於相鄰的兩個思考層次之間，甚至會回到最低的層次，所以學習者必須擁有前一個層次的概念與策略，才能有效進行下一層次的學習活動。其次，此幾何思考層次是有順序、階層的，個體要從一個層次進步到另一層次，就必須先精熟較低層次的學習。而促使個體進步的因素中，教師的教學影響往往比成熟的因素更重要。再者，在某一層次所隱含的概念在下一層次中會變得更具體更明確。換句話說，對某一層次的理解加以內化就成為概念，然後這些概念將成為下一個層次的自然外顯行為。最後，每一個層次都有自己的語言，這些語言包含符號的用法與其關係，因為語言來自真實世界中的經驗和活動，因此對於幾何思考層次就顯得相當的重要。

Usiskin (1982; 引自 Henderson, 1988) 在探討 van Hiele 層次的這五項特性時認為，學生必須依據「固定的順序 (fixed sequence)」來學習；每一層次思考的「毗鄰 (adjacency)」物件是不同的，也就是說，在此一層次的理解會比上一層次的理解更明確；每一層次都有不同的邏輯符號，所以符號之間的關聯「特質 (distinction)」是很明顯的；當教師和學生在不同的層次、運用不同的邏輯符號推理時，對於概念的理解就會有所限制，這就

是層次之間的「區分 (separation)」；學生必須通過五個階段才有完整的理解，也就是逐漸「進展 (attainment)」而轉換至較高的層次。

Henderson (1988) 指出，教師如果只擁有教學專業知識，但是不知道學生的思考層次，那麼在教師的教學和學生的學習之間就會產生鴻溝。由於，國中學生的幾何發展是依賴教材內容和教師的教學活動，因此，教師在教學前構思幾何單元的教學時，應該考量課程與學生思考層次之間的落差，而將 van Hiele 的理論置於教學實作中來了解學生的幾何思考和行為，並藉由創造一個合適的教學實作情境，以有利於學生達成較高的思考層次。

二、教師的幾何教學取向

(一) van Hiele 的教學階段取向

Henderson (1988) 指出，學生幾何思考層次的成長主要是依賴教師的教學過程，而且，要達到較高的思考層次並不是經由教師的直接告知，而是透過一個合適的練習活動。所以 van Hiele (1999) 指出，促進層次間成長的教學必須依循五階段的活動順序。先從探索 (inquiry) 的階段開始，使學生探索和發現幾何概念的結構；在導向 (direct orientation) 階段中，教師可以逐漸呈現幾何結構的特性；在表述 (explicitation) 階段，教師必須介紹專用術語，並且鼓勵學生利用這些術語來做幾何的溝通和寫作；接著的自由發展 (free orientation) 階段，教師可以讓學生自行用不同方式來完成學習的任務，並且使學生更熟練已經學得的概念；在最後的整合 (integration) 階段中，教師則是營造機會讓學生將所學的知識整合在一起。在這些階段中教師的角色包括：策劃學習任務、引導學生注意圖形的幾何性質，介紹專業術語並鼓勵學生使用之，以及鼓勵學生利用口語描述來表達關於圖形的思考。

Fuys et al. (1988) 指出，這樣的教學活動是將 van Hiele 的思考層次具體化，意即學生在這樣的教學取向下學習，是可以展現出他們的幾何思考層次。也就是說 van Hiele 的教學取向在學生幾何思考層次的發展中是不斷地持續在循環，教師可以利用這五階段的教學來幫助學生在某一層次中進行思考，或是從較低的思考層次轉換至較高的層次中。以教學實作的觀點來解釋，如果要幫助學生發展幾何思考的層次，教師就必須提供連貫的教學實作活動，從探索的階段開始，利用不同的學習任務逐漸建立幾何概念和相關數學術語，最後，藉由一個總結活動幫助學生將所學習到的整合至他們已知的知識中。例如在七年級正方形對角線性質的教學中，教師可以先讓學生藉由繪圖去探索圖形中對角線的關係，接著教師可以引導學生利用摺紙來找出正方形對角線的性質，再讓學生利用垂直或是平分這樣的數學語言來描述所觀察到的現象，更進一步教師可以藉由各種的練習題，讓學生利用自己的方法來熟練此性質，而最終學生可以整合正方形其對角線的關係。所以個人認為，van Hiele 的每一個教學階段對七年級學生幾何思考的發展過程是緊緊相繫的，尤其是教師在導向、自由發展和整合階段的教學中，是幫助國中學生的幾何學習從入門到精熟而最終至融會貫通的最主要教學階段。

(二) 操弄或操作取向

Henderson (1988) 指出，教師必須了解幾何的內容和過程，而且要能夠回應學生的學習需求，據此調整自己的教學以幫助學生獲得幾何上的深層理解。因此，有效的幾何教學是可以藉由教師對學生學習情況的了解來提供合適的教學活動，也就是說，教師在進行幾何單元的教學時，除了必須考慮幾何知識的本質，更應該去思考學生的認知發展因素。由於空間能力與學生幾何學習會交互影響，所以為了增進學生的幾何學習，教師可以利用合適的空間視覺與操作活動來進行幾何教學 (左台益和梁勇能, 2001)。而 Williams (2002) 認為，課堂中的教學活動要有意義就必須以學生原有的知識為基礎來設計活動，並且要能與日常生活相連結，使學生發現學習是有意義且有趣的。一般而言，當教師認為學生從操作的過程中可以學得更好時，通常會進行活動導向的教學，而教學過程中大都涉及可以用來操作的教材或其他具體物 (Suydam, 1983)。Prigge (1978) 分

析教師利用紙筆學習、平面操作物以及立體操作物三種幾何教學方式，其研究結果發現，學生比較偏好以立體操作物來學習，因為當教師透過立體物來呈現幾何概念時學生比較容易理解具體物件背後所傳達的幾何概念。事實上，各種操弄物體的經驗都會幫助學生建立一個訊息儲存庫 (repertoire)，以協助他們解釋未來所面臨的新經驗 (Nickson, 2000)。所以，Fuys et al. (1988) 的研究指出，使用操作物的幾何教學是可以幫助學生學習幾何概念。

Piaget (1952 ; 引自 Moyer, 2001) 主張，孩童並未具有心智成熟度來領會以文字或符號所呈現的抽象數學概念，而是需要具體物和繪圖的經驗來使學習發生。Nickson (2000) 則指出，學童是藉由操弄不同教具的經驗來發展圖形知識，這類經驗能幫助他們了解圖形特性和定義，然而，若是缺乏這方面的經驗，將阻礙學童的幾何思考發展。因此，所謂的學習數學就是發展學生的內在觀念表徵，而學生自己對於幾何觀念的內在表徵則與觀念的外在表徵或操作有關 (Moyer, 2001)。van Hiele (1999) 指出，教師可以利用摺紙、繪圖的活動來豐富學生的視覺結構儲存庫，也可以藉此發展學生圖形的知識和性質，所以幾何是從操弄或操作活動開始學習的。因此 Clements & Battista (1992) 認為，學生必須操作具體物來自行了解幾何圖形。而且這樣的視覺感受不只是讓學生覺得有趣，也可以幫助學生學習定義和作推論以及洞悉不同幾何概念之間的關係。Nickson (2000) 也認為，空間的研究相當強調肢體活動的重要性，肢體活動有利於學生發展其視覺化技巧，而教具的運用有助於其空間概念的發展，事實上，數學的規則潛藏於圖形當中，學童是需要大人 (即教師) 適當的引導，才能從中擷取抽象的數學概念。所以，操作物可以作為一項心智上的工具，使教師可以將抽象的幾何概念轉換成一種具像的形式，進而連結學習者的新知識與現有知識。因此，教師需要引導學生來來回回地轉換數學物件和抽象概念間的表徵，讓學生可以「看到」新舊幾何知識之間的關係 (Moyer)。

Moyer (2001) 認為，教師會考量到操作活動的使用意圖和教學時間而使用不同的操作物。而且，教師在課堂中是扮演著「利用表徵提升學生思考」的重要角色。即使教師擁有適當的操作策略，但是，他們對於學生是如何學習數學的信念可能會影響他們如

何及為何使用操作物教學。Moyer & Jones (2004) 也主張，教師對於操作物的使用觀點是與其自身對數學和教學的假設和經驗有關，而且，當教師藉由表徵物並且能夠在不同的表徵物（包含操作、視覺心像和抽象符號）之間進行彈性思考時，是可以幫助學生發展深層的數學理解，因此，操作在數學課堂中被視為是理所當然的。這是因為，使用操作物可以幫助學生獲得有意義的經驗以促進數學理解，而且操作物是用來具體表徵抽象的數學觀念（Moyer）。事實上，教師使用操作物來教學就是希望讓學生去嘗試、檢驗和反思自己的想法，並且作修正，也就是說，光是操作並不能保證產生有意義的學習（Raphael & Wahlstrom, 1989）。所以，教師會引導學生反思自己的操作活動，並將操作模型與非形式化的概念作連結（Clements & Battista, 1992）。

一般而言，教師進行操作活動的教學可以使學生產生正面的數學學習成效，而且，學生和教師都認為操作教材有助於學生視覺化和理解幾何概念（Corwin, 1978；引自Suydam, 1983）。Sowell (1989) 的研究結果顯示，使用操作比例不高的學生比較無法產生有意義的學習，但是，如果教師透過長期使用具體操作教材來教學，學生的數學成就會提高，對數學的態度也會改善。Prigge (1978) 研究結果也指出，低成就的學生利用立體物的學習成效會優於僅利用紙筆來學習，因此，研究傾向支持教師對低成就的學生使用立體操作物來進行幾何教學。Moyer (2001) 指出，操作物是具有視覺上和觸覺上的訴求，但是操作物本身是不具有任何意義的，學生視其為一種工具，藉由操作的經驗來獲得洞察力，而且學生必須一再地反思自己的操作活動，不僅如此，使用操作活動的教學成果優於未使用者。然而，有些研究顯示（例如 Raphael & Wahlstrom, 1989；Sowell, 1989）學生的學習成就是與教師使用操作物的教學經驗相關，有經驗的教師較能有效選擇教具（instructional aids），同時，有經驗的教師會比較重視教具的運用。

Suydam (1985) 認為，當兩個人在不同的幾何思考層次中進行推理之時，可能無法彼此互相理解，因為他們使用不同的語言符號和關係，而教師和學生可能就是處在這樣不同層次中，因而有溝通上的困難。所以，教師應該依據學生的幾何思考層次來教學（van Hiele, 1999）。Nickson (2000) 指出，van Hiele 的層次觀點有助於追蹤學童在幾何圖形

及空間思考上的發展，也能協助教師了解學童在進階至較高思考層次之前，或許會發生略有退步至較低層次的現象。不僅如此，教師也要區辨出學童在空間上的前置概念，才能從中延伸或幫助他們釐清迷思概念，為健全的概念建立基礎。以七年級的四邊形單元而言，其內容是多半是希望學生可以藉由性質以及數學語言來分析圖形或圖形組成要素之間的關係。例如利用平行四邊形的性質來判斷正方形是否也屬於平行四邊形的一種。但是，學生的幾何學習方式多半是停留在視覺和操作上的思考，而且對於幾何語言的使用尚未熟稔。但是，主動建構概念是學生有意義學習中不可或缺的一部分（Nickson, 2000）。因此對於教師而言，如何在幾何單元的教學中，透過操作活動讓學生主動探究幾何概念，以發現圖形的定義、性質和圖形之間的關係，應是個相當重要的問題。不可否認，教師自身的教學經驗和專業知識以及對學生學習情況的掌握，應會支配其操作活動的設計與執行，但是教師若是位於學生的思考層次來構思教具的使用方式或是操作活動的進行，不只可以引動學生的學習動機，也可以有效促進學生幾何思考的發展，進而提升自己的教學成效。

（三）幾何教學概念

Moyer（2001）認為，學生自己對於數學觀念的內在表徵是與其外在表徵或操作有關聯，因此，所謂的學習數學就是學生數學觀念內在表徵的發展。而 Wheatley（1990）指出，個體的心像是從觀察、閱讀或反思來建構，因而會受到既知內涵的影響。所以，個人認為在幾何單元的教學構思與實作中，教師應該幫助學生連結幾何學習的心智活動與表徵物或操作物，同時，藉由觀察或操作來建立幾何圖形的視覺心像，以進行非形式化的幾何推理。而這也就是本研究中所指的幾何教學概念。

