

第二章 模糊理論

本章節主要目的是能夠更完整的瞭解模糊理論及其相關的背景建構，不會使人有種摸不著頭緒就直接介紹比較艱深的內容。本章共有十二節，安排如下：第一節，先介紹模糊理論的起源之相關觀念；第二節：明確集合；第三節：集合的基本概念；第四節：模糊集合；第五節：模糊歸屬函數；第六節：介紹各種類型的模糊運算子；第七節：模糊理論的廣義運算子；第八節：解模糊化；第九節：模糊模型；第十節：模糊關係；第十一節：模糊綜合評判；第十二節：模糊關係方程式；第十三節，第二章總結。

2.1 模糊理論的起源

模糊 (Fuzzy) 一詞，是在1965年，由美國加州大學柏克萊分校 (University of California, Berkeley, 簡稱UC Berkeley或UCB) [23]的L.A. Zadeh (扎德) 教授，在「資訊與控制」(Information and Control) 學術期刊上所發表的著名論文—「模糊集合」(Fuzzy Sets) [6] 所提出的。Zadeh教授在探討人類主觀或思考過程中定量化處理的方法時首先提出模糊集合，模糊理論是依照大概的資訊對人類主觀表現的概念作大略的定量化處理。在傳統控制中必須建立精確嚴謹的數學模型來達成控制，但如果要控制複雜的系統必定要花費相當多的時間、人力去建立數學模型，才有可能達到所需的動作。然而我們不可能把整個控制系統的所有變數列出來，只能去控制一些影響系統較大的因素。要去控制這些因素又必須有明確的控制量要被決定，但在實際上，有些情形是無法明確的決定其數值，也就是很難去建立系統的數學模型。基於以上所述的種種問題，使得Zadeh教授提倡模糊理論嘗試以人類的思維方式去簡化問題的複雜度，而且能達到與傳統控制方法相同的目的。

「Fuzzy」此字在字典中的解釋是「毛絨的」，「模糊不清的」，被引申為「模糊的」、「朦朧之意」。Fuzzy有不少譯名：模糊、乏晰、佛似等等，其中以「模糊」與「乏晰」兩個最為通用[9]。

雖然模糊理論的基礎是很嚴謹的數學，但其基本觀念卻是相當生活化。在真實世界中，人類的思維概念、語意表達以及感覺判斷等都存在著模糊的現象，只是人們並沒有發覺。如果能稍加注意，將會發現：原來Fuzzy的觀念無時無刻地存在於日常生活中。什麼是模糊現象呢？一般來說就是不精確、模稜兩可、多重意義、不確定性的意思。例如有人說：「今天天氣很熱」、「那個人很高」、「妳看起來很漂亮」等敘述。但是溫度多高才算很熱呢？身高多少才算很高呢？長的如何才較漂亮呢？每個人對它們的定義都不同，也就是說這些語意或事物的狀態，大都與人的主觀的感覺判斷有密切的關係，因無法清楚地了解他人的感受，只能從其語意做大概的判斷，甚至對於個人而言也會因某種身理或心理的變化而產生判斷的差異。並且有時並不需要那麼精確的知道現在氣溫是25°C還是26°C，也不需要知道正確身高是183cm還是183.1cm，雖然只能從其不明確的言語猜測其意義，但是彼此之間的差距並不大，而能達到彼此溝通的目的。

模糊理論自從被提出之後就一直受到重視，不論是在學術界的理論研究，或是在業界實務的產品應用上，有著相當多的研究成果與產品。例如：日本將Fuzzy理論結合自動控制應用於許多家電產品上，像是Fuzzy洗衣機，Fuzzy冷氣等等；其他在研究的應用上，更是族繁不及備載，例如：模糊邏輯系統的應用（Munakata and Jani, 1994）、控制系統、文字辨識（Chiu and Tseng, 1997）、語音辨識（Wu and Chen, 2001）、診斷程序（Stanly等人, 2003）、時間序列預測（Mendel, 2000）、智慧型機器人（Wu, 1996）、軟體工程、決策系統（Chaneau等人, 1987）、資料補償等[16]。

模糊理論實際上是模糊集合、模糊關係（Fuzzy Relation）、模糊邏輯（Fuzzy Logic）、模糊控制（Fuzzy Control）、模糊量測（Fuzzy Measure）...等理論之泛稱，大陸的學者習慣稱為模糊數學[11-13,15,18]。

2.2 明確集合

模糊集合 (Fuzzy Sets) 是模糊理論基礎，在介紹模糊集合之前，必須先瞭解模糊集合和明確集合 (Crisp Sets) 之間的不同[8,11-13]。

明確集合，就是「有」與「沒有」的概念。以往的集合是屬於二值邏輯 (Binary Logic)，可以明確的分辨元素屬於哪一個集合，稱之為明確集合。所謂明確就是「是」與「否」之間可以做出清楚地判斷，通常以 0 (否) 與 1 (是) 兩個數值作表示。明確的集合如同電子電路學中的數位訊號，不是開就是關。目前一般產品的系統控制也是以明確集合表示的二值邏輯來做判斷，例如傳統式冷氣機，當溫度設定在 26°C 時，溫度感測器測得室溫高於此設定時，就啟動壓縮機；相反的，室溫低於設定值就關閉壓縮機，這就是屬於二值邏輯的判斷。可將溫度區分成兩個明確集合，一個是溫度高於 26°C (以數值 1 表示)，另一個集合則是溫度低於 26°C (以數值 0 表示)，如圖 2-1 所示。

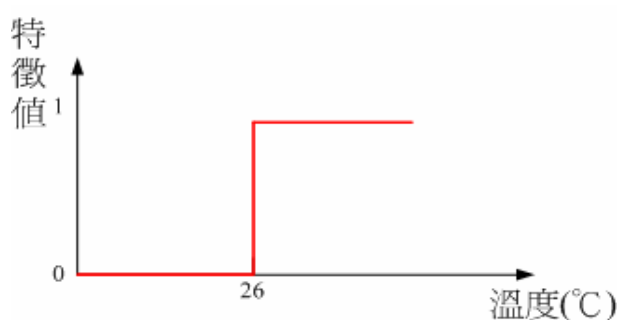


圖 2-1 傳統冷氣機溫度的明確集合

2.3 集合的基本概念

在介紹模糊集合之前，本節先回顧普通集合[1,8,9]，因為模糊集合可視為普通集合之擴展，所以充分瞭解普通集合之觀念之後，將對模糊集合會有更深入的瞭解。

2.3.1 集合

普通集合簡稱為「集合」(Sets)，也稱為明確(Crisp)集合。「Crisp」一詞在字典中的解釋是「脆的」、「清新的」之意，引申為「明確」、「清晰」之意。這是因為每一個普通集合都有明確的邊界之故。例如某學校的「男學生」的集合與「女學生」就可以很清楚地劃分出來。之後本研究對普通集合皆簡稱為「集合」。集合是一種抽象的數學概念，舉凡具有某種特定性質的對象，即可以構成集合。例如：一群人的身高、所有的正整數、骰子點數、年齡分佈...等。通常會以大寫的英文字母前幾個(A, B, C)來當作集合的表示符號。

2.3.2 論域

將討論對象侷限在某一個特定的範圍之內稱之為論域(Universe of Discourse)。在所討論的範圍內，所有被討論的對象全體所成的集合，又稱為全集(Universal Sets)，一般習慣用大寫英文字母後幾個(U, V, W, X)來表示。

2.3.3 元素

一個集合中獨立的個體，稱之為該集合的元素(Element)或是成員(Member)，一般都是以英文小寫字母(a, b, c)來表示該集合中的元素。若論域中某個體 a 為某個集合 A 的元素，即為「 a 屬於 A 」，記為 $a \in A$ ；否則為「 a 不屬於 A 」，記為 $a \notin A$ 。

2.3.4 特徵函數

除使用上述表示法外，亦可使用特徵函數(Characteristic Function)

$\mu_A(a)$ ，來描述元素 a 是否屬於集合 A 。

$$\mu_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

2.3.5 集合表示法

集合表示法 (Methods of Describing Sets) 隨著集合本身及其元素的性質不同，而有各式各樣的表示式。有三種方法可以用來描述集合的表示式：

1. 列舉法 (List Method)

若集合為有限個元素所構成的可數集合 (Countable Sets)，則可用列舉法表示之，亦即列舉屬和該集合的所有元素。例如：

$$\text{骰子的偶數} = \{2, 4, 6\}$$

2. 規則法 (Rule Method)

所謂的規則法就是，根據構成集合的元素，取其所具有的共同特性來描述該集合。例如小於 10 的正實數所組成的集合 A ，可以表示為：

$$A = \{x \mid 0 < x < 10\}$$

3. 特徵函數法 (Characteristic Function Method)

例如：若集合 B 表示介於 0 到 6 之間的奇數，則

$$\begin{aligned} B &= \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \mu_3/x_3 + \dots \\ &= 0/0 + 1/1 + 0/2 + 1/3 + 0/4 + 1/5 + 0/6 \end{aligned}$$

特別要注意的是：式子中的「+」號為連結符號，僅是藉以列舉出所有的元素，並非相加之意；「/」號也不代表慣用的除法，只是分隔符號，分母表示元素值，而分子則為該元素所對應的特徵函數值。此法雖然在普通集合並不常用，但是在 Fuzzy 集合中卻經常使用。

4. 范氏圖 (Venn Diagram)

由英國數學家 John Venn 首先提出的。利用范氏圖可有效理解上述集合的運算，如圖 2-2 與 2-3 所示。這種表示集合可以很直觀形象，所以被廣泛的應用於集合論中。但是描述上缺乏嚴格性，所以使用範圍有一定的限制。

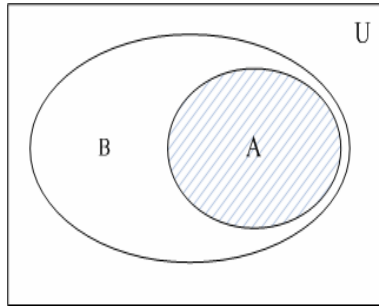


圖 2-2 $A \subset B$ 或 $A \subseteq B$

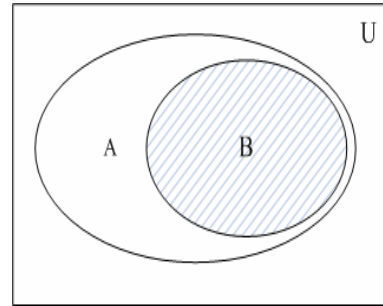


圖 2-3 $B \subset A$ 或 $B \subseteq A$

2.4 模糊集合

模糊理論是由 Zadeh 於 1965 年提出，其定義為：令 U 為被討論的全體對象，叫做論域 (Universe of Discourse)；論域中的每個對象，叫做元素，以 u 表示； U 上的一個模糊子集 A ，是指：對於任意 $x \in U$ ，都指定了一個實數 $f_A(x) \in [0,1]$ ，叫做 x 隸屬於 A 的程度，該映射稱為 A 的隸屬函數 (Membership Function)。當 A 的隸屬函數的值域 = $\{0,1\}$ 時， f_A 變化成一個普通子集的特徵函數， A 變化成一個普通子集。當 A 單獨出現或使用時，稱為模糊集合。

當事物可明確被區分辦別時，例如男、女兩個性別，然而在大多數的事物、語意表達上通常難以做明確的區分辦別，也就是含有模糊、不明確的敘述。而模糊集合，如同人類的思維模式，可以說每一元素是將二值邏輯 (Binary Logic) 擴展為多值邏輯 (Multi-valued Logic)，除了以 0 和 1 來表示所屬程度之外，並推廣至介於 0 與 1 區間的數值來表示。

以上述提過的 Fuzzy 冷氣機為例，利用模糊控制，它的判斷已不只是二值邏輯而是以多值邏輯方式來判斷，將每個溫度給予某程度的值形成某一模糊集合，如表 2-1 所示，溫度 27°C 在溫度「高」集合的所屬程度為 0，在「中」集合的程度為 0.66，在「低」集合的程度則為 0.33，可將表 2-1 改用圖 2-4 表示。模糊控制冷氣機會隨溫度的高低程度控制風速、壓縮機運轉作些微的調整，改善了傳統冷氣機不能維持溫度平穩和浪費電源等缺點。

表 2-1 Fuzzy 冷氣機溫度的模糊集合表

溫度(°C)	高集合	中集合	低集合
23	0	0	1
24	0	0	1
25	0	0	1
26	0	0.33	0.66
27	0	0.66	0.33
28	0	1	0
29	0.33	0.66	0
30	0.66	0.33	0
31	1	0	0
32	1	0	0
33	1	0	0

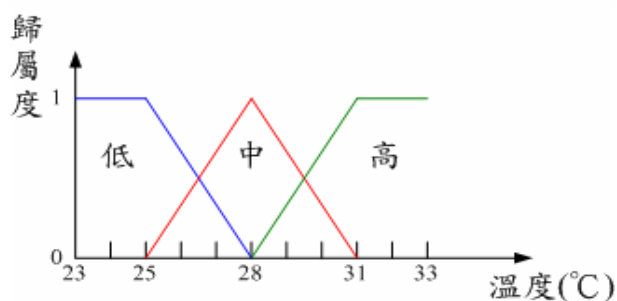


圖 2-4 Fuzzy 冷氣機溫度的模糊集合

2.5 歸屬函數

歸屬函數 (Membership Function) [1,8,9,15,17]，是模糊理論的基本概念，可用以描述模糊集合的性質。透過歸屬函數可對模糊集合進行量化，也才能利用精確的數學方法去分析與處理模糊性資訊。數值介於 0 到 1，用以表示元素歸屬程度的函數，就稱為「歸屬函數」。

「如何找出一個適當的歸屬函數」往往是決定能否成功應用模糊理論於實際問題的關鍵，一般而言並無通用的定理或公式，通常是依據經驗或統計方法來加以確定，很難具有客觀性。許多研究學者在歸屬函數的建立上面下了很多功夫，希望能找到系統化的方法，以便建立出比較客觀的歸屬函數。作法通常如下：先建立粗略的歸屬函數，然後藉由「學習」與不斷的實行經驗，逐步進行修正與調整，使歸屬函數更臻於完善也更加客觀。

在模糊控制的應用範疇，原則上歸屬函數都要具備「凸」(Convex)以及「正規」(Normal)等基本性質。通常，歸屬函數可以分成「數值」(Numerical)以及「函數」(Functional)兩種方式。數值定義方式又稱為離散化歸屬函數，即直接給定有限模糊集合內每一個元素的歸屬度 (Membership Grade) 並以向量形式表達；函數定義方式亦稱為連續化歸屬函數，即以不同形式的函數來描述模糊集合。函數定義的內涵可以是無限模糊集合的元素與其歸屬度之間的關係，也可以是有限模糊集合的元素及其歸屬度之間的關係。往後章節本研究將 Membership Function 簡稱為 MF。

2.5.1 離散化歸屬函數

離散化歸屬函數 (Discretization MF) 與前一章節所提到的列舉法表現的模糊集合的意義是相同的，此種方式通常是把模糊集合歸屬函數的歸屬度以一組數值向量表示出來，向量的大小與論域離散化的程度有關。亦即，將論域分割成有限數量的離散值，例如 *NB* 表示成「負大」(Negative Big) 概

念的模糊集合，可以把論域分成-6 到+6 共 13 個整數段落，並以數值向量表示這個模糊集合，故 NB 可以表示成

$$NB = [1.0, 0.8, 0.4, 0.1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

利用離散化歸屬函數建立的模糊集合，若以圖形方式表示時就如圖 2-5 所示。

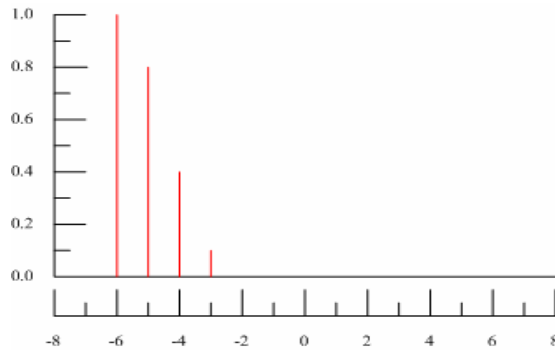


圖 2-5 直線圖形表示離散歸屬函數

離散化歸屬函數的特點是簡單明瞭，易建立出模糊關係矩陣，且可節省記憶體空間及函數換算的時間，但是論域離散化的離散兼具對系統的完整性、精確性及經濟性等因素，往往會造成不可忽略的影響，例如：間距太大則論域空間的分割可能過於粗略，造成向量尺度較小，處理起來比較容易；間距小則兼顧系統的完整性與精確性，造成向量尺度膨脹，處理起來較耗費時間及記憶體空間。

2.5.2 連續化歸屬函數

取連續函數的稠密性，利用連續性歸屬函數（Continuous MF）來描述無限模糊集合的特性，典型常用的有三角形歸屬函數（Triangular MF）、梯形歸屬函數（Trapezoidal MF）、鐘形歸屬函數（Bell MF）、高斯歸屬函數（Gaussian MF）、S 形歸屬函數（S-shaped MF）、Z 形歸屬函數（Z-shaped MF）等。

1. 三角形歸屬函數（如圖 2-6）：

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ if } x < a \\ \frac{x-a}{c-a} & , \text{ if } x \in [a, c] \\ \frac{b-x}{b-c} & , \text{ if } x \in [c, b] \\ 0 & , \text{ if } x > b \end{cases} \quad (2.1)$$

2. 梯形歸屬函數（如圖 2-7）：

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ if } x < a \\ \frac{x-a}{c-a} & , \text{ if } x \in [a, c] \\ 0 & , \text{ if } x \in [c, d] \\ \frac{b-x}{b-d} & , \text{ if } x \in [d, b] \\ 0 & , \text{ if } x > b \end{cases} \quad (2.2)$$

3. 高斯歸屬函數（如圖 2-8）：

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.3)$$

4. 鐘形歸屬函數（如圖 2-9）：

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}} \quad (2.4)$$

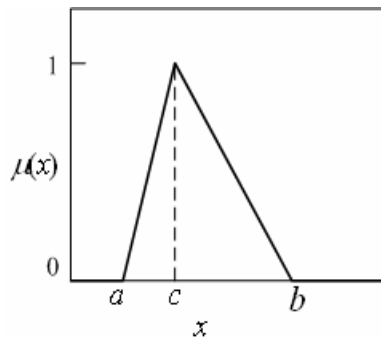


圖 2-6 三角形歸屬函數

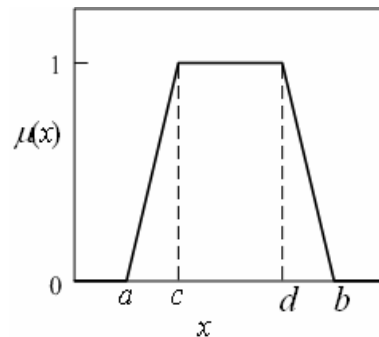


圖 2-7 梯形歸屬函數

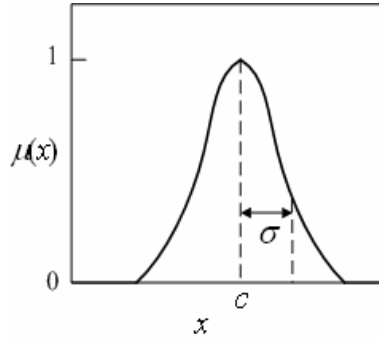


圖 2-8 高斯歸屬函數

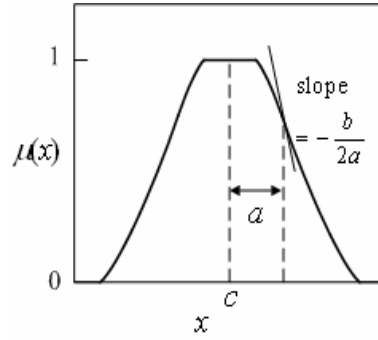


圖 2-9 鐘形歸屬函數

連續型歸屬函數的優點是可微分 (Differentiable)，對於需要利用學習機構 (如類神經網路) 做歸屬函數調整的場合，其功能較離散形歸屬函數好。有些文獻把歸屬函數歸納成 S 函數及 π 函數兩類，大部分的函數都可以透過適當的組合獲得，說明如下：

1. S 函數

S 函數 (S Function) 屬於單調性遞增 (Monotonically Increasing) 型歸屬函數，分別取歸屬度為 0、0.5 及 1 的元素點，以式 (2.5) 做插補 (Interpolation)。若用 1 減去 S 函數乃得到單調性遞減 (Monotonically Decreasing) 行的曲線，稱為 Z 函數 (Z Function)。

$$S(x; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0 & , \text{ if } x \leq \alpha \\ 2 \left(\frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} \right)^2 & , \text{ if } \alpha < x \leq \beta \\ 1 - 2 \left(\frac{x - \gamma}{\gamma - \alpha} \right)^2 & , \text{ if } \beta < x \leq \gamma \\ 1 & , \text{ if } x \geq \gamma \end{cases} \quad (2.5)$$

S 函數如圖 2-10 所示，因為形狀向英文字母的 S，故而得名。當 $x = \beta$ 時， $S(x; \alpha, \beta, \gamma) = 0.5$ ，所以 β 稱為交配點 (Crossover Point)。S 函數

可以表達「 x 是大的」這樣的模糊觀念。相對的 Z 函數可以表達「 x 是小的」的模糊觀念。

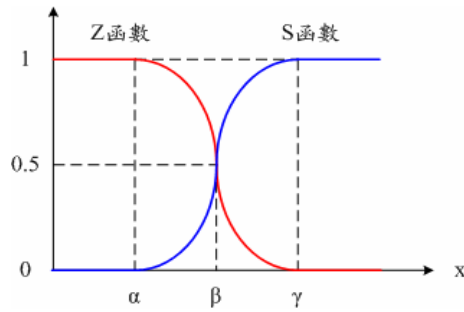


圖 2-10 S 函數與 Z 函數

式 (2.6) 則為 Z 函數之數學式：

$$Z(x; \alpha, \beta, \gamma) = 1 - S(x; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 1, & x \leq \alpha \\ 1 - 2\left(\frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha}\right)^2, & \alpha < x \leq \beta \\ 2\left(\frac{x - \gamma}{\gamma - \alpha}\right)^2, & \beta < x \leq \gamma \\ 0, & x \geq \gamma \end{cases} \quad (2.6)$$

2. Π 函數

Π 函數 (Pi Function) 是一種 S 函數與 Z 函數曲線結合在一起的函數，同時具有遞增與遞減的性質。式 (2.7) 為 Π 函數的數學式：

$$\Pi(x; \beta, r) = \begin{cases} S(x; \gamma - \beta, \gamma - \beta/2, \gamma), & x \leq \gamma \\ 1 - S(x; \gamma + \beta, \gamma + \beta/2, \gamma + \beta), & x \geq \gamma \end{cases} \quad (2.7)$$

其中參數 β 稱為 Π 函數的帶寬 (Bandwidth)。 Π 函數常用來表達「 x 大約是 γ 」的模糊概念。圖 2-11 為 Π 函數圖。

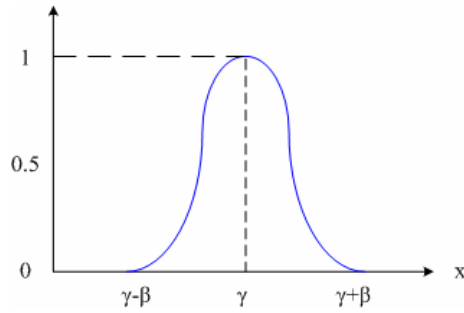


圖 2-11 II 函數

2.6 模糊運算子

模糊運算子[1,8,9,11-13,15,18] (Fuzzy Operators) 為模糊集合概念由傳統集合概念擴充而得，但傳統集合擴充至模糊集合運算時，必須重新加以定義。常用的三種模糊基本集合運算：補集 (Complement)、交集 (Intersection) 及聯集 (Union)。雖然 min 和 max 運算是大家最熟悉的運算方法，卻不是唯一的方法，本節將更廣泛的介紹一些研究者在尋找各種運算子方面所做的努力。首先介紹基本運算，接著介紹幾種常用的模糊集合代數運算子，然後再介紹模糊集合的 T-norms 與 S-norms (或稱為 T-conorms)。

2.6.1 模糊集合的基本運算

在論域中，定義 A 和 B 為模糊集以下是其基本運算：

1. 補集：

當 $\mu_A(x) \in [0,1]$ ，A 的補集 (Complement) \bar{A} 定義如下：

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in U \quad (2.8)$$

圖 2-12 表示模糊集合的歸屬函數 $\mu_A(x)$ 與其補集合的歸屬函數

$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ 示意圖。

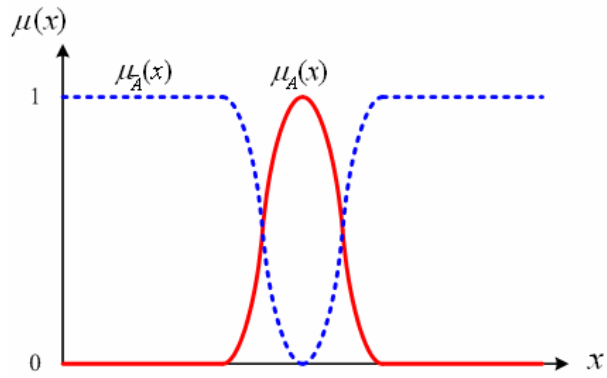


圖 2-12 模糊集合與補集合的歸屬函數關係

2. 交集：

模糊集合 A 與 B 交集 (Intersection)，以 $A \cap B$ 表示，在邏輯運算裡面則以 AND 表示交集運算，其數學表示如式 (2.9)：

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A, \mu_B] \equiv \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \quad \forall x \in U \quad (2.9)$$

在模糊理論中，交集運算又稱為 T-norms，其中 \wedge 表示最小運算 (Min Operation)，有許多表示方式，如式 (2.9) 即是最小值法，圖 2-13 為其示意圖，也可以用代數乘法來表示，如式 (2.10)：

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in U \quad (2.10)$$

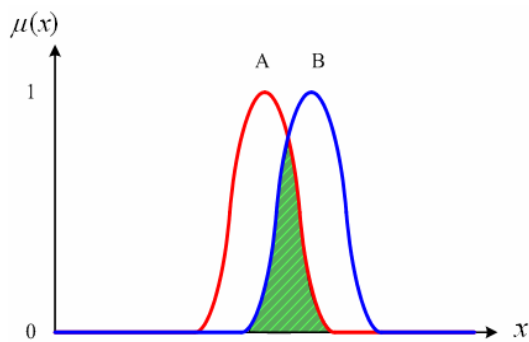


圖 2-13 模糊集合 A 與 B 兩集合的交集關係

3. 聯集：

模糊集合 A 與 B 的聯集 (Union)，以 $A \cup B$ 表示，在邏輯運算裡，則以 OR 表示聯集運算，其數學表示如式 (2.11)：

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A, \mu_B] \equiv \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \quad \forall x \in U \quad (2.11)$$

在模糊理論中，聯集運算又稱為 T-conorms 或 S-norms，其中 \vee 表示最大運算 (Max Operation)，有許多表示方式，如式 (2.11) 即是最大值法，圖 2-14 為其示意圖，也可以用代數加法來表示，如式 (2.12)：

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in U \quad (2.12)$$



圖 2-14 模糊集合 A 與 B 兩集合的聯集關係

2.6.2 模糊集合運算性質

一些模糊集合運算的性質如下列所示：

1. 冪等律 (Law of Idempotence)：

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A \quad (2.13)$$

2. 分配律 (Law of Distributivity)：

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \quad (2.14)$$

3. 交換律 (Law of Commutativity)：

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A \quad (2.15)$$

4. 結合律 (Law of Associativity) :

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\end{aligned}\tag{2.16}$$

5. 吸收律 (Law of Absorption) :

$$A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A\tag{2.17}$$

6. 相等律 (Law of Identity) :

$$\begin{aligned}A \cup U &= U, A \cap \phi = \phi \\ A \cap U &= A, A \cup \phi = A\end{aligned}\tag{2.18}$$

7. 復歸律 (Law of Involution) :

$$\overline{(\overline{A})} = A\tag{2.19}$$

2.6.3 模糊集合的代數運算

模糊集合的代數運算 (Algebraic Operations) 主要包括和運算 (Sum Operations) 與積運算 (Product Operations) 。說明如下：

對於模糊集合 $A_1 \in U_1, \dots, A_n \in U_n, x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n$, 卡氏乘積 (Cartesian Product, $*$) 的定義為：

$$\mu_{A_1 * A_2 * \dots * A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min[\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)]\tag{2.20}$$

常見的和運算包括：

1. 代數和 (Algebraic Sum)

$$\mu_{A+B} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)\tag{2.21}$$

2. 有界和 (Bounded Sum)

$$\mu_{A \oplus B} = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}\tag{2.22}$$

3. 邏輯和 (Logical Sum)

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad (2.23)$$

4. 激烈和 (Drastic Sum)

$$\mu_{A \vee B} = \begin{cases} \mu_A, \mu_B = 0 \\ \mu_B, \mu_A = 0 \\ 1, \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.24)$$

由上面之定義比較可得：

$$\mu_{A \cup B} \subset \mu_{A+B} \subset \mu_{A \oplus B} \subset \mu_{A \vee B}$$

例 2-1

$$A=0.5/3+1/5+0.6/7, \quad B=1/3+0.6/5$$

$$A + B=1/3+0.6/5+0.6/7$$

$$A \vee B=1/3+1/5+0.6/7$$

則

$$A \oplus B=1/3+1/5+0.6/7$$

$$A \cup B=1/3+1/5+0.6/7$$

常見的積運算包括：

1. 邏輯積 (Logical Product)

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad (2.25)$$

2. 代數積 (Algebraic Product)

$$\mu_{A \cdot B} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (2.26)$$

3. 有界積 (Bounded Product)

$$\mu_{A \odot B} = \max \{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\} \quad (2.27)$$

4. 激烈積 (Drastic Product)

$$\mu_{A \wedge B} = \begin{cases} \mu_A, \mu_B = 1 \\ \mu_B, \mu_A = 1 \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.28)$$

由上述的定義可得：

$$\mu_{A \wedge B} \subset \mu_{A \odot B} \subset \mu_{A \cdot B} \subset \mu_{A \cap B}$$

例 2-2

$$A = 0.5/3 + 1/5 + 0.6/7, \quad B = 1/3 + 0.6/5$$

$$A \cap B = 0.5/3 + 0.6/5$$

則 $A \cdot B = 0.5/3 + 0.6/5$

$$A \odot B = 0.5/3 + 0.6/5$$

$$A \wedge B = 0.5/3 + 0.6/5$$

2.7 模糊集合的廣義運算子

前面一節已介紹了幾種具有特色的模糊運算子，當研究和處理實際問題時，還可以依據需要定義新的運算子。因此有學者希望能夠依據一些準則，找到一些可以涵蓋大多數具體運算子特徵的抽象運算子，以便定義的模糊運算子具有普遍性，這就是本節要討論的「廣義運算子」的由來。

不管哪種運算子，都必須保證在 $[0,1]$ 上的運算是封閉的，所以廣義運算子必須遵守 $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ 映射的基本條件。另外，進行模糊集合的交集與聯集這兩個運算時，運算子都是成對出現的，例如：「邏輯和」與「邏輯積」。

2.7.1 T-norms 運算子定義

當運算子 T 為 $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ，則滿足下列條件時，稱 T 為 T-norms，滿足 T-norms 性質的運算稱為積運算。

1. 邊界條件 (Boundary Conditions)

$$T(0,0) = 0; T(\mu_A(x),1) = T(1,\mu_A(x)) = \mu_A(x) \quad \forall x \in X$$

2. 單調性 (Monotonicity)

若 $\mu_A(x) \leq \mu_C(x)$ 且 $\mu_B(x) \leq \mu_D(x)$ 則，

$$T(\mu_A(x),\mu_B(x)) \leq T(\mu_C(x),\mu_D(x))$$

3. 交換性 (Commutativity)

$$T(\mu_A(x),\mu_B(x)) = T(\mu_B(x),\mu_A(x))$$

4. 結合性 (Associativity)

$$T(\mu_A(x),T(\mu_B(x),\mu_C(x))) = T(T(\mu_A(x),\mu_B(x)),\mu_C(x))$$

2.7.2 S-norms 運算子定義

當運算子 S 為 $S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ，則滿足下列條件時，稱 S 為 S-norms，滿足 S-norms 性質的運算稱為和運算。

1. 邊界條件 (Boundary Conditions)

$$S(1,1) = 1; S(\mu_A(x),0) = S(0,\mu_A(x)) = \mu_A(x) \quad \forall x \in X$$

2. 單調性 (Monotonicity)

若 $\mu_A(x) \leq \mu_C(x)$ 且 $\mu_B(x) \leq \mu_D(x)$ 則，

$$S(\mu_A(x),\mu_B(x)) \leq S(\mu_C(x),\mu_D(x))$$

3. 交換性 (Commutativity)

$$S(\mu_A(x),\mu_B(x)) = S(\mu_B(x),\mu_A(x))$$

4. 結合性 (Associativity)

$$S(\mu_A(x),S(\mu_B(x),\mu_C(x))) = S(S(\mu_A(x),\mu_B(x)),\mu_C(x))$$

T-norms 就是廣義的交集運算子，而 S-norms 則是廣義的聯集運算子。如果選擇適合的否定運算子 (Negation Operator) $N(x)$ ，那麼 T-norms 與 S-norms 之間可以類似一般化的狄摩根定理 (DeMorgan's Law)，存在對偶性質，即

$$S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = N(T(N(\mu_A(x)), N(\mu_B(x)))) \quad (2.29)$$

$$T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = N(S(N(\mu_A(x)), N(\mu_B(x)))) \quad (2.30)$$

以下則是常被大家提及的 T-norms 與 S-norms 運算子，為了簡化數學表示式，本研究將 $\mu_A(x)$ 與 $\mu_B(x)$ ，分別用 a 和 b 表示：

1. 激烈和 (Drastic Sum)、激烈積 (Drastic Product)

$$S_0(a, b) = \begin{cases} \max(a, b), & \text{if } \max(a, b) = 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$T_0(a, b) = \begin{cases} \min(a, b), & \text{if } \min(a, b) = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.32)$$

2. 邊界和 (Bounded Sum)、邊界積 (Bounded Product)

$$S_1(a, b) = \min(1, a + b) \quad (2.33)$$

$$T_1(a, b) = \max(0, a + b - 1) \quad (2.34)$$

3. Einstein 和 (Einstein Sum)、Einstein 積 (Einstein Product)

$$S_2(a, b) = \frac{a + b}{1 + ab} \quad (2.35)$$

$$T_2(a, b) = \frac{ab}{2 - (a + b - ab)} \quad (2.36)$$

4. 代數和 (Algebraic Sum)、代數積 (Algebraic Product)

$$S_3(a, b) = a + b - ab \quad (2.37)$$

$$T_3(a, b) = ab \quad (2.38)$$

5. Hamacher 和 (Hamacher Sum)、Hamacher 積 (Hamacher Product)

$$S_4(a, b) = \frac{a + b - 2ab}{1 - ab} \quad (2.39)$$

$$T_4(a, b) = \frac{ab}{a + b + ab} \quad (2.40)$$

6. 邏輯和 (Logical Sum) 、邏輯積 (Logical Product)

$$S_5(a, b) = \max(a, b) \quad (2.41)$$

$$T_5(a, b) = \min(a, b) \quad (2.42)$$

上述的運算子以 Zadeh 提出的運算子 (即 max 與 min) 應用的最早也最普遍，通常廣義運算子不見得會完全具備 Zadeh 運算子的全部特性。但是，在目前最常用的運算子中，卻只有 Zadeh 運算子是完全具備這些特性的，這也是 Zadeh 運算子被廣泛運用的原因之一。

Zadeh 的 min 運算子是所有 T-norms 運算子之中最強的，而 Zadeh 的 max 運算子則是 S-norms 運算子之中最弱的。任何一個 S-norms 運算子都比 T-norms 運算子強，其強弱關係如下：

$$\begin{aligned} T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq T_4 \leq T_5 \\ S_5 \leq S_4 \leq S_3 \leq S_2 \leq S_1 \leq S_0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.8 解模糊化

前面章節所提到的歸屬函數，即是將一個明確的值映射到其對應的歸屬函數圖形所產生出來的一個模糊歸屬度 [8,16]，此步驟稱為模糊化。而解模糊化 (Defuzzification) 的過程與模糊化過程相反，主要是轉換推論所得之模糊化結果，也就是將模糊集合轉換成明確數值。而解模糊化的方法有很多種，一般常見的方法主要是根據權重平均法 (Weighted Average Formula)，如式 (2.44) 所示衍生而成。

$$y(x) = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \mu_i(y)}{\sum_{i=1}^N \alpha_i} \quad (2.44)$$

式中， $\mu_j(y)$ 為輸出集合的歸屬度， α_i 為第 i 個規則的輸出值， N 為規則總數。

1. 重心法 (Center of Area, COA 或 Center of Gravity, COG) :

重心法是計算重疊後，區塊面積的中心點，圖 2-15 的重疊區塊，僅計算一次而不會被重複計算。

$$y(x) = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \mu(y_i)}{\sum_{i=1}^N \mu(y_i)} \quad (2.45)$$

式中， $\mu(y_i)$ 為第 i 個規則輸出集合的歸屬度， y_i 為第 i 個規則的輸出值， N 為規則總數。

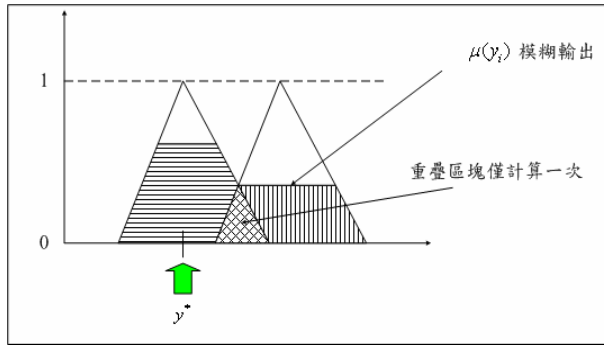


圖 2-15 COA 解模糊化示意圖

2. 總和重心法 (Center of Sums, COS) :

總和中心法分別計算每塊面積後，在計算區塊所有面積的中心點，因此，圖 2-16 的重疊區塊就會被重複計算。

$$y(x) = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{j=1}^N \mu_j(y_i)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu_j(y_i)} \quad (2.46)$$

式中， $\mu_j(y_i)$ 為第 i 個規則輸出集合的歸屬度， y_i 為第 i 個規則的輸出值， N 為規則總數。

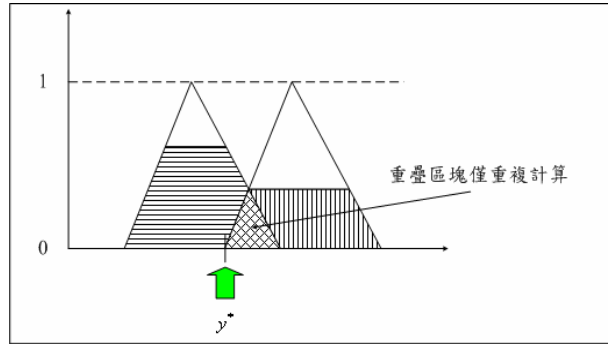


圖 2-16 COS 解模糊化示意圖

3. 最大值平均值法 (Mean of Maximum, MOM) :

表示式如式 (2.47), 圖 2-17 為其示意圖。

$$y(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i \quad (2.47)$$

式中, \tilde{y}_i 為第 i 個規則輸出集合的歸屬函數最大值的對應值。

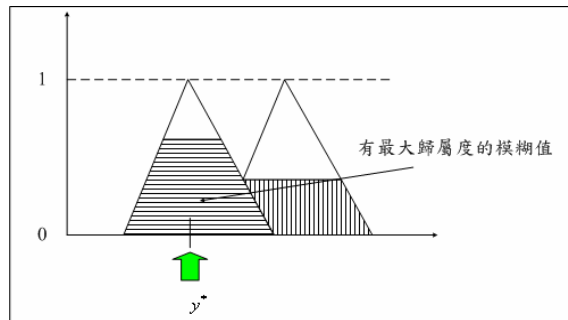


圖 2-17 MOM 解模糊化示意圖

2.9 模糊模型

目前最普遍的模糊模型[1,2,8,16]有三種: Mamdani (Mamdani 和 Assilain, 1975) Model 和 Takagi-Sugeno-Kang (TSK) Model, 以及 Tsukamoto (Tsukamoto, 1979) Model, 此三種模型皆可用於 IF-THEN 規則中, 在推論部分 (前件部) 有相同的架構, 在結論部分 (後件部) 的架構則不相同。Mamdani Model 的結論部

分是以模糊集合表示，而 TSK Model 是以函數轉換表示，至於 Tsukamoto 則是用明確的數值表示。

2.9.1 Mamdani Fuzzy Model

Mamdani 模糊模型首先由 Mamdani 在 1974 年所提出，其模型結合了 Zadeh 提出的模糊集合與模糊邏輯，並應用於蒸汽引擎與鍋爐控制上。Mamdani 模糊模型是將每個規則所推論出的結果進行解模糊化，如圖 2-18 利用 T-norms 運算，以最小值計算兩個規則的輸出集合後，再將所有的模糊輸出集合進行解模糊化，其方法可以選擇上一章節敘述之解模糊化方法的其中之一來進行。Mamdani 模型的結論部分是以模糊集合表示。

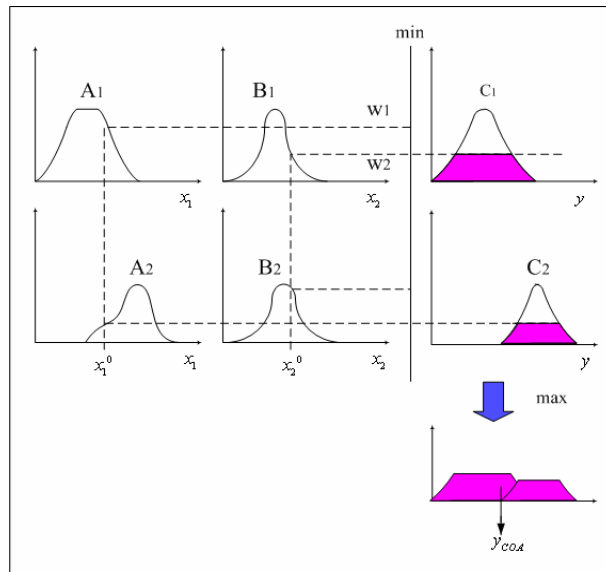


圖 2-18 Mamdani 模糊模型示意圖

現使用一個單輸入單輸出的思維來解釋 Mamdani Fuzzy Model：

$$\begin{cases} R1 \rightarrow \text{IF } X \text{ is small then } Y \text{ is small} \\ R2 \rightarrow \text{IF } X \text{ is medium then } Y \text{ is medium} \\ R3 \rightarrow \text{IF } X \text{ is large then } Y \text{ is large} \end{cases} \quad (2.48)$$

2.9.2 Sugeno Fuzzy Model

Sugeno 模糊模型由 Takagi、Sugeno 與 Kang(Takagi 和 Sugeno, 1985；Sugeno 和 Kang, 1988)共同發展，是由範例資料有系統性地萃取出模糊規則的一種方法，也就是能從「輸入－輸出」範例中系統性地產生所需要的 IF-THEN 規則的前件與後件部分，而且能夠根據範例資料來調整前件部份的架構與參數值，以及後件部的架構與參數值。此模型經常應用在控制系統與其他領域中 (Terano 等)。Sugeno 模糊模型可定義為 (2.49) 式：

$$\text{IF } x_1 \text{ is } A_1 \text{ AND } x_2 \text{ is } B_1 \text{ THEN } y = f(x_1, x_2) \quad (2.49)$$

式中， $y = f(x_1, x_2)$ ，是屬於一般型的任意函數；常用的函數是多項式函數，當 $f(x_1, x_2)$ 為一次多項式函數時，模型稱為一次 Sugeno 模糊模型(First-order Sugeno Fuzzy Model)，如式 (2.50)；若 $f(x_1, x_2)$ 為零次多項式 (即為常數項時)，模型稱為零次 Sugeno 模糊模式 (Zero-order Sugeno Fuzzy Model)，此時，零次 Sugeno 模糊模型也可以視為 Mamdani 模糊模型中的一種特例模型。

$$R^i \text{ IF } x_1 \text{ is } A_1 \text{ AND } x_2 \text{ is } B_1 \text{ THEN } y = a_0^i + a_1^i x_1 + a_2^i x_2 \quad (2.50)$$

TSK 模型則是以函數轉換表示後件部。一次 Sugeno 模糊模型系統如圖 2-19。

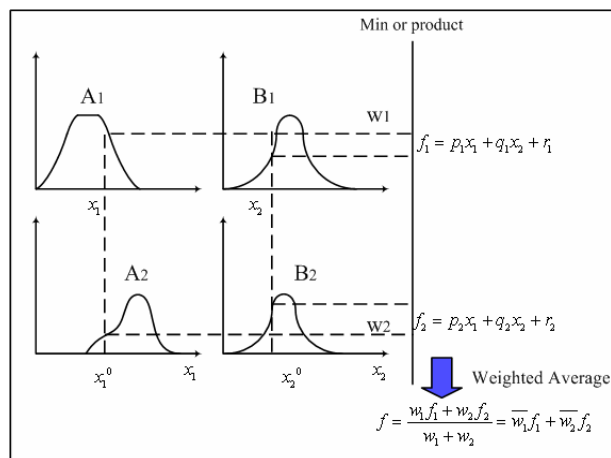


圖 2-19 Sugeno 模糊模型示意圖

2.9.3 Tsukamoto Fuzzy Model

Tsukamoto 模糊模型由 Tsukamoto 在 1974 年所提出，後件部是表示為單一模糊歸屬函數(Monotonical MF)，如圖 2-20。每一條推論的輸出規則是由規則激發強度定義出的明確數值。圖 2-20 中所表示的是兩輸入的規則系統。Tsukamoto 模糊模型聚集每一條規則輸出利用平均重心法來當作解模糊化，所以每條規則推論出的明確輸出。然而 Tsukamoto 模糊模型不如 Mamdani 或 Sugeno 常用來當作模糊模型。

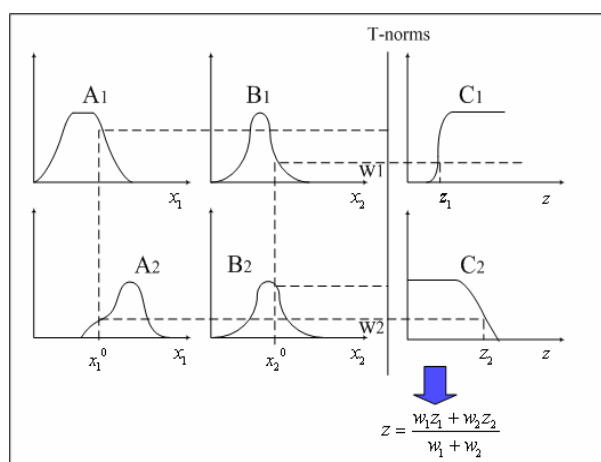


圖 2-20 Tsukamoto 模糊模型示意圖

用一個單輸入單輸出(Single-input Single-output)的思維來解釋 Tsukamoto 模糊模型：

$$\begin{cases} \text{IF } X \text{ is small then } Y \text{ is } C_1 \\ \text{IF } X \text{ is medium then } Y \text{ is } C_2 \\ \text{IF } X \text{ is large then } Y \text{ is } C_3 \end{cases} \quad (2.51)$$

2.10 模糊關係

模糊關係[11-13,15,18,19] (Fuzzy Relation) 是客觀世界存在的普遍現象，描述事物間存在的某種限制。例如：人與人之間的兄弟、同學及情侶等關係；二數之間有大於、等於及小於等關係，諸如此類。關係可以用來描述事務之間絕對存在與否的關聯，以數學的角度來看，關係就是傳統明確集合之卡氏乘積 (Cartesian Product) 的擴充，而模糊關係 (Fuzzy Relation) 則是這種關係的擴充討論，其應用範圍非常廣泛，所以建立明確關係的概念對瞭解模糊關係是有必要的。

2.10.1 傳統集合關係

兩個集合之間的關係稱為二元關係 (Binary Relation)，假如參與討論的集合個數超過兩個，就稱為多元關係 (N-ary Relation)。常用符號 \mathfrak{R} 表示二元關係，在集合 U 與 V 中的任意兩個元素 u 與 v ，對於給定的關係 \mathfrak{R} 只會有兩種情形發生：

1. u 與 v 具有關係 \mathfrak{R} ，亦即 $(u, v) \in \mathfrak{R}$ 。
2. u 與 v 不具有關係 \mathfrak{R} ，亦即 $(u, v) \notin \mathfrak{R}$ 。

這兩種情況必然有一個而且只有一個會成立，存在與否的界線是明確劃分的。本研究利用 2.5 節介紹的歸屬函數來描述此二元關係，具有這種關係的元素歸屬度就是 1，反之為 0。若以集合 U 、 V 與 W 為例，集合的關係 \mathfrak{R} 有下列三種可能性：

1. 自反性：任一元素 $u \in U$ ，具有 $u\mathfrak{R}u$ 的特性。
 2. 對稱性：元素 $u \in U$ 與 $v \in V$ ，若 $u\mathfrak{R}v$ ，則 $v\mathfrak{R}u$ 。
 3. 傳遞性： $u \in U$ 、 $v \in V$ 與 $w \in W$ ，若 $u\mathfrak{R}v$ 且 $v\mathfrak{R}w$ ，則 $u\mathfrak{R}w$ 成立。
- 若滿足上列三種性質，稱關係 \mathfrak{R} 為集合 U 、 V 與 W 的等價關係。

2.10.2 模糊集合關係

明確關係只能描述事務之間是否存在某種關係，但實際世界卻存在許多很難用有或無劃分清楚地關係。故需要推廣明確關係，引入模糊關係（Fuzzy Relation）的概念。使用歸屬函數來描述模糊集合，亦可說明模糊關係。模糊關係是卡氏乘積的一個模糊子集合，定義如下：

卡氏乘積（Cartesian Product） $U \times V$ 的一個模糊子集合 \mathfrak{R} 稱為由 U 到 V 的一個模糊二元關係（Fuzzy Binary Relation）。可以使用在 $[0,1]$ 區間取值的歸屬函數 $\mu_{\mathfrak{R}}$ 描述其特性。亦即，歸屬函數可以表示成式 (2.52) 閉區間的對應。另外， \mathfrak{R} 可以用式 (2.53) 的一組有敘述對表示，其中 (u,v) 是 $U \times V$ 的元素，而 $\mu_{\mathfrak{R}}(u,v)$ 為 \mathfrak{R} 的歸屬函數。當 $\mu_{\mathfrak{R}}$ 只取 0 或 1 二值時，模糊關係 \mathfrak{R} 就退化成傳統的明確關係。

$$\mu_{\mathfrak{R}} : U \times V \rightarrow [0,1] \quad (2.52)$$

$$\mathfrak{R} = \left\{ \left((u,v), \mu_{\mathfrak{R}}(u,v) \mid (u,v) \in U \times V \right) \right\} \quad (2.53)$$

2.10.3 模糊關係的合成

處理不同直積空間關係之間的問題是時常會碰到的，例如：假設已經知道“溫度—壓力”關係及“壓力—濕度”關係的特性，希望得到“溫度—濕度”關係的特性。對於不同直積空間的模糊關係，可以透過下面介紹的合成運算 [11,13,17]（Composition）彼此結合在一起，產生新的模糊關係。許多學者提出不同的合成運算方法，它們各有不同的結果與運算特性，其中以 max-min 這是最著名也是最常用的合成方法。

採用不同的模型，將運算出不同的結果。至於採用何種模型較為恰當，則需顧及適合的時機。以 $B = X \circ R$ 為例，將幾種常用模型的運算法則與使用特徵分別敘述。在下面式子中， M 表示模型，括號內的符號表示合成運算方

式。

1. $M(\wedge, \vee)$ 型

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= \bigvee_{k=1}^l (a_{ik} \wedge r_{kj}) \\
 &= \max \left\{ \min(a_{i1}, r_{1j}), \min(a_{i2}, r_{2j}), \dots, \min(a_{il}, r_{lj}) \right\} \\
 &= \max_{k=1}^l \left\{ \min \{ a_{ik}, r_{kj} \} \right\} \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

此一模型又稱為主因素突出型，即是取大與取小的運算方式，模型的合成運算中主要考慮到起主導作用的因素，因此將喪失許多次要因素的信息，本模型不宜應用於因素太多或太少的情況。

2. $M(\cdot, \vee)$ 型

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= \bigvee_{k=1}^l (a_{ik} \cdot r_{kj}) \\
 &= \max \left\{ a_{i1}r_{1j}, a_{i2}r_{2j}, \dots, a_{il}r_{lj} \right\} \\
 &= \max_{k=1}^l \left\{ a_{ik} \cdot r_{kj} \right\} \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

此一模型相成的運算不致於喪失太多因素的信息，然而取大的運算將喪失部分因素的信息，但本模型乘與加運算比較能反應出單因素重要的程度，仍屬主因素突出性質的運算，亦不宜應用於因素太多或太少的情況。

3. $M(\cdot, \oplus)$ 型

此處 \oplus 的定義為 $\alpha \oplus \beta = \min(1, \alpha + \beta)$

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= \min \left\{ 1, \sum_{k=1}^l a_{ik} \cdot r_{kj} \right\} \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

此一模型的特徵不同於前兩種，它是加權平均型的綜合運算，應用此模型時需要全面性的顧及各因素的影響程度，因素的信息亦會造成喪失，但情況較不嚴重，本模型不宜應用於因素太少的情況。

4. $M(\wedge, \oplus)$ 型

$$b_{ij} = \min \left\{ 1, \sum_{k=1}^l a_{ik} \wedge r_{kj} \right\} \quad (2.57)$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

此一模型具有主因素突出型的特徵，模型的取小的合成運算中，將失去部分因素的信息而影響運算結果，模型亦具有加權平均型綜合運算的特徵，將使較大的運算值喪失部分信息，故本模型不宜應用於因素太少的情況。

5. $M(\cdot, +)$ 型

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} \cdot r_{kj} \quad (2.58)$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

此一模型為傳統的矩陣運算相仿，模型的合成運算中，將不會失去部份因素的信息而影響運算結果，然此模型的無法突出主要因素的影響，本模型的應用不限於因素的多寡情況。

2.11 模糊綜合評判

在科學研究、工程設計或是日常生活當中，人們常常會對各種事物或現象做出不同的評價（Evaluation），例如各種商品質量的評價、對課程教學的評鑑及對疾病的診斷與治療等等，需要做出比較公正（Fair）且客觀（Objective）的評判。由於很多事物或現象受到多種因素的影響，且評價過程中涉及一些模糊因素，這就需採用綜合各種有關因素進行總的評判，對有關的因素做綜合考慮，稱之為模糊綜合評判。目前已廣泛的被應用在各種領域中。本節將介紹模糊綜合評判[11-13,15,18]的基本概念、方法及要點。

2.11.1 傳統綜合評判方法

傳統綜合評判方法，一般而言都是採用總分法（Sum Method）或是加權平均法（Weighted Averages Method），總分法的表示如式（2.59）：

$$S = \sum_{i=1}^m S_i \quad (2.59)$$

其中 S 就是對該事物的評判標準。總分法是把每個因素都視為是同等重要的，這顯然不完全符合客觀實際的。較為合理的作法是採用加權平均法，所謂的加權平均，是對每一個因素按其重要程度分配一相對應的權重值（Weighting），表示式如式（2.60）：

$$E = \sum_{i=1}^m w_i \cdot S_i \quad (2.60)$$

其中 w_i 為各項之對應權重值， E 則為加權平均後的總分，作為評判標準的綜合評判方法。且 w_i 必須滿足歸一（Normalizing）條件及非負（Nonnegative）條件

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1, w_i > 0 \quad (2.61)$$

雖然加權平均法比總分法能給出更合理的評判結果。但是在許多問題

中，相對應於每一因素，並不能簡單地均由一個分數來加以評判。例如：評價電視機的銷售好壞，影響評判的因素有外觀、功能、價格及服務等，按同樣的評判因素，不同的人會得出不同的評判結果，評判結果不再是一個確定的數值。為了得到合理的評判結果，應採用模糊綜合評判法。

2.11.2 模糊綜合評判方法

模糊綜合評判方法，主要分成兩個步驟：

- 1.先按每個因素單獨評判
- 2.再按所有因素評判

至於模糊綜合評判的基本方法如下：

- 1.建立因素集
- 2.建立權重集
- 3.建立評價集
- 4.單因素模糊評判
- 5.模糊綜合評判
- 6.評判指標處理

本研究舉例說明各個步驟的作法。

例 2-3

某知名廠牌製作某一款衣服，為瞭解市場對該產品的好壞評價，需對該產品做綜合評判。

1. 建立因素集

評分的因素有五項，花色 (Colors)、樣式 (Styles)、耐久度 (Longwearing)、價格 (Cost) 及舒適度 (Comfortable)。

因素集 $U = \{\text{Colors, Styles, Longwearing, Cost, Comfortable}\}$

2. 建立權重集

因評判者在評判時，對各因素的著眼點不盡相同，所以結果也會不一樣。女性挑衣服會注重花色與樣式，男性則比較著重耐久度和舒適度，可得到兩組權重集如下：

男生

$$A_1 = \left\{ \frac{0.1}{\text{Colors}}, \frac{0.1}{\text{Styles}}, \frac{0.3}{\text{Longwearing}}, \frac{0.15}{\text{Cost}}, \frac{0.35}{\text{Comfortable}} \right\}$$

$$\text{即 } A_1 = \{0.1, 0.1, 0.3, 0.15, 0.35\}$$

女生

$$A_2 = \left\{ \frac{0.3}{\text{Colors}}, \frac{0.35}{\text{Styles}}, \frac{0.1}{\text{Longwearing}}, \frac{0.1}{\text{Cost}}, \frac{0.05}{\text{Comfortable}} \right\}$$

$$\text{即 } A_2 = \{0.3, 0.35, 0.1, 0.1, 0.05\}$$

3. 建立評價集

評判目的是瞭解顧客會衣服的歡迎程度，總評判的結果，應該是各個喜好等級，分成四個等級，完美（Perfect）、好（Good）、不好（Bad）及糟糕（Terrible），故評價集可以表示為：

$$V = \{\text{Perfect, Good, Bad, Terrible}\}$$

4. 單因素模糊評判

請顧客單獨對每一單因素，對此服裝做出評價，得出模糊向量分別為：

$$R_1 = [0.2, 0.5, 0.3, 0.0]$$

$$R_2 = [0.1, 0.3, 0.5, 0.1]$$

$$R_3 = [0.0, 0.4, 0.5, 0.1]$$

$$R_4 = [0.0, 0.1, 0.6, 0.3]$$

$$R_5 = [0.5, 0.3, 0.2, 0.0]$$

得到該服裝的評判矩陣 R 為

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.0 & 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix}$$

5. 模糊綜合評判

評判對象的模糊綜合評判之結果是模糊集， $B = A \circ R$ ，此處的

「 \circ 」為 max-min 的合成運算，即

$$B = [0.1, 0.1, 0.3, 0.15, 0.35] \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.0 & 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$= [0.35, 0.3, 0.3, 0.15]$$

第一個 0.35 的算法如下，其餘以此類推

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \min(0.1, 0.2) \\ \min(0.1, 0.1) \\ \min(0.3, 0.0) \\ \min(0.15, 0.0) \\ \min(0.35, 0.5) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.35 \end{array} \right\} = 0.35$$

6. 評判標準處理

由於評判結果各因素值之和超過 1，所以必須做歸一化處理，所以評判結果改為：

$$\begin{aligned} & \left[\frac{0.35}{1.1}, \frac{0.3}{1.1}, \frac{0.3}{1.1}, \frac{0.15}{1.1} \right] \\ & = [0.32, 0.27, 0.27, 0.14] \end{aligned}$$

這一評判結果是 32% 的男生給這衣服的評價是「完美」，27% 的男生給這衣服的評價是「好」，27% 的男生給這衣服的評價是「不好」，14% 的男生給這衣服的評價是「糟糕」。

如果代入另外一組女生的權重值，則可得另外一組結果如下：

$$\begin{aligned} B &= [0.3, 0.35, 0.1, 0.1, 0.05] \circ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.0 & 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \\ &= [0.2, 0.3, 0.35, 0.1] \end{aligned}$$

此處亦進行歸一化的處理，所得綜合評判結果為：

$$\begin{aligned} & \left[\frac{0.2}{0.95}, \frac{0.3}{0.95}, \frac{0.35}{0.95}, \frac{0.1}{0.95} \right] \\ & = [0.21, 0.315, 0.37, 0.105] \end{aligned}$$

根據評判結果得知，21% 的女生給這衣服的評價是「完美」，31.5% 的女生給這衣服的評價是「好」，37% 的女生給這衣服的評價是「不好」，10.5% 的女生給這衣服的評價是「糟糕」。

2.12 模糊關係方程式

設 X 是模糊關係 (Fuzzy Relation) 「若...，則...」， B 表示結果，則模糊關係方程式[1,4,11-13,15,18-20](Fuzzy Relation Equation, 簡稱為 FRE) 表示式如下：

$$X \circ R = B \quad (2.62)$$

將式 (2.62) 所描述的關係式視為由結果追溯原因，即做逆運算時，這樣的問題具有普遍存在的實際意義，例如一些專家、中醫及工人等，經驗 (Experience) 和技術 (Technology) 常常歸類為對各種因素有其一套優秀的權重分配方案，這些是難以言傳的，而這些經驗和技術由十分寶貴。如將這些知識擷取並且用電腦模擬出來，讓機器來替代這些專家人員的工作，那就可以實現具有人工智慧的專家諮詢系統。當探討模糊關係方程式的逆運算時，變成是一種逆向思考的數學描述。專家思維中將各種因素評估結果與權重分配相結合，就如同模糊關係方程式的逆運算。這種逆向思考的數學描述，亦有助於了解人的認識活動機制。經由解模糊關係方程式，藉由已知的各種因素評估與整體分析結果，推論出專家思維中的權重分配。模糊關係方程式的研究，在模糊推論 (Fuzzy Inference)、模糊控制 (Fuzzy Control)、模糊評價 (Fuzzy Appraisal)、醫療診斷 (Medical Diagnosis) 等方面有著廣泛的應用背景。

式 (2.62) 的關係式稱為模糊關係方程式 (Fuzzy Relation Equation)，亦稱為模糊關係矩陣 (Fuzzy Relation Matrix)，而滿足此模糊關係方程式的模糊關係則稱為「模糊關係方程式的解」。 X 、 R 與 B 三個矩陣裡的每一個元素，都在區間 $[0, 1]$ 之間。矩陣之維度為 X 是 $m \times n$ ， R 是 $n \times k$ ， B 是 $m \times n$ 。當其中兩個矩陣已知，而另一個未知 (Unknown) 時，此為本研究欲探討的解模糊關係方程式，將有如下表 2-2 的三種情形。

表 2-2 模糊關係矩陣之關係

已知	未知	備註
X 與 R	B	瑣碎
R 與 B	X	Type I
X 與 B	R	Type II

為何已知矩陣 X 與 R 會稱為瑣碎 (Trivial) 呢？原因是可利用 2.10 節所提到的模糊關係的合成運算 (Composition Operation) 輕易的求得矩陣 B ，故不加以討論。另根據模糊矩陣合成運算的性質，I 型模糊方程與 II 型模糊方程完全是可以互相轉換的，只要對 II 型做逆運算 (Inverse)，可得

$$\begin{aligned} (X \circ R)^{-1} &= B^{-1} \\ R^{-1} \circ X^{-1} &= B^{-1} \end{aligned} \quad (2.63)$$

這樣就和 I 型矩陣 R 與 B 已知互相作對應，即可求得 II 型未知的矩陣 R 。此處所指的逆運算並非線性代數中矩陣的逆運算動作，至於詳細運算方法，請見[1]中的第五章與第六章之介紹。

接下來介紹如何去解模糊關係方程式的問題。在以下的章節所用的矩陣維度 X 是 $1 \times m$ ， R 是 $m \times n$ ， B 是 $1 \times n$ 。且把式 (2.62) 改寫成下面形式：

$$[x_1, x_2, \dots, x_m] \circ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} = [b_1, b_2, \dots, b_n] \quad (2.64)$$

為了方便比較各種方法，本研究的範例都會用同樣的數據表示，以方便分析與探討。範例中矩陣的數值如下：

$$R = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.9 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.6 \\ 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad B = [0.7 \quad 0.4 \quad 0.4 \quad 0.3 \quad 0.6]$$

2.12.1 徐曹羅李簡化法

這種方法是由汪培庄教授綜合了徐文立、羅承忠、曹志強及李必祥[18]四個學者的研究而提出來的。此法改善了 Tsukamoto 解法的缺點，計算起來較簡單。為方便瞭解以例題講解方式進行說明。

例 2-4

用徐曹羅李簡化法來解模糊關係方程式，矩陣 R 與 B 值如 2.11 節所示，下面為求解過程。

解：

步驟一、標準化排列：將矩陣 B ，按照 $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ 的次序更換矩陣 B 裡的元素順序，而矩陣 R 的各行也做相對應的更換，得到標準化排列。可得到新的矩陣 \tilde{R} 與 \tilde{B} 如下：

$$0.7 \geq 0.6 \geq 0.4 \geq 0.4 \geq 0.3$$

$$\tilde{B} = [0.7 \ 0.6 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.3], \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.5 & 0.7 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.4 & 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

矩陣 R 與 B 同時做位置的變動，不改變方程式的解。當 $b_i = b_j$ 時，兩者可任意排先後順序。

步驟二、上銑：對每一行，用 b_j 上銑矩陣 \tilde{R} 的第 j 行，定義如式 (2.65)

$$\begin{cases} r_{ij} = b_j, & \text{if } r_{ij} > b_j \\ r_{ij} = \phi, & \text{if } r_{ij} \leq b_j \end{cases} \quad (2.65)$$

得到新的矩陣 R'

$$R' = \begin{bmatrix} \phi & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \\ \phi & \phi & \phi & \phi & 0.3 \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ 0.7 & \phi & 0.4 & 0.4 & \phi \end{bmatrix}$$

步驟三、下確界：對上銑後所得矩陣 R' ，各列求出下確界，記於右端，同時也稱為解的上界。如果整列都是空集合，則下確界定為 1。可以得到

$$R' = \begin{bmatrix} \phi & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \\ \phi & \phi & \phi & \phi & 0.3 \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi \\ 0.7 & \phi & 0.4 & 0.4 & \phi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

步驟四、平銑：將上銑出來的矩陣 R' 改為平銑矩陣，即對每一行，用 b_j 平銑矩陣 \tilde{R} 的第 j 行，定義如式 (2.66)

$$\begin{cases} r_{ij} = b_j, & \text{if } r_{ij} \geq b_j \\ r_{ij} = \phi, & \text{if } r_{ij} < b_j \end{cases} \quad (2.66)$$

可得到新矩陣 R'' ，右端的下確界值仍保留，空集 ϕ 可以省略

$$R'' = \begin{bmatrix} & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \\ & & 0.4 & & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & & \\ 0.7 & & 0.4 & 0.4 & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

步驟五、划元：將步驟四所得的新矩陣 R'' 中，逐列划去該列中大於右端下確界的元素。則可以得到新矩陣 R'''

$$R''' = \begin{bmatrix} & \cancel{0.6} & \cancel{0.4} & \cancel{0.4} & 0.3 \\ & & \cancel{0.4} & & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & & \\ \cancel{0.7} & & 0.4 & 0.4 & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$R''' = \begin{bmatrix} & & & 0.3 \\ & & & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & \\ & & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 1 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

步驟六、判別：有解的充分必要條件是，步驟五所得矩陣的每一行都有未被划去的非空集合元素。所以此例是滿足的，故必定有解。

步驟七、求解：於步驟三中所得的下確界就是模糊關係方程式的最大解 (0.3,0.3,1,0.4)。再來求極小解，從矩陣 R''' 的每一行中，選定一個非空，且未被划去的元素。對這些被選的元素逐列取上確界，定義空集 ϕ 的上確界為 0，可以得到擬極小解，並記於左端。此例可從矩陣中判斷出有四組 (2×2) 擬極小解，0.4 與 0.3 這兩行被圈出來之行，都有重複的元素，這表示可以有選擇的動作

$$\begin{bmatrix} & & & \textcircled{0.3} \\ & & & \textcircled{0.3} \\ 0.7 & 0.6 & \textcircled{0.4} & \\ & & \textcircled{0.4} & 0.4 \end{bmatrix}$$

選擇後的四組解也分別如下所示：

$$\begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 0.3 \\ & & & \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & \\ & & 0.4 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 0.3 \\ & & & \\ 0.7 & 0.6 & & \\ & & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 0.3 \\ & & & \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & \\ & & 0.4 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 0.3 \\ & & & \\ 0.7 & 0.6 & & \\ & & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

步驟八、篩選：於步驟七所得之解之所以稱為擬極小解，因為它們不一定是極小解，它們相互之間還可能存在重合或是優劣的模糊關係，需進一步的進行篩選。如果只有一組擬極小解，則不需進行此步驟。最後得到本題有兩

組極小解為 $[0.3 \ 0 \ 0.7 \ 0.4]$ 與 $[0 \ 0.3 \ 0.7 \ 0.4]$ 。

2.12.2 表格法

透過大陸書籍中所介紹的表格法[12]，亦可用於解模糊關係方程式；解題前需將模糊關係方程式進行轉置，表示成如式(2.67)的形式

$$R^T \circ X^T = B^T \quad (2.67)$$

例 2-5

用表格法來解模糊關係方程式，矩陣 R 與 B 值如 2.11 節所示，以下為求解過程。

解：

步驟一、確定方程式有解。當 $R \neq \phi$ 時，稱模糊關係方程式「有解」，反之稱為「無解」。故本題有解。

步驟二、求最大解。對於任意 $x, y \in [0, 1]$ ，定義運算 α 為

$$x \alpha y \begin{cases} x = y, & \text{if } x > y \\ x = 1, & \text{if } x \leq y \end{cases} \quad (2.68)$$

對於此題模糊關係方程式的矩陣 R 與 B ，定義矩陣 $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ ，其中

$$c_j = \bigwedge_{i=1}^m (r_{ij} \alpha b_i) \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.69)$$

矩陣 C 很可能為此模糊關係方程式的極大解，故稱為「擬極大解」。對於有解的模糊關係方程式，擬極大解即為極大解。矩陣 R 與 B 轉置後成為

$$R^T = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.7 & 0.8 \\ 0.5 & 0.4 & 0.4 & 0.9 \\ 0.7 & 0.3 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.5 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

除可用式(2.69)計算擬極大解外，還可以採用下表 2-3 的表格法解，其建

立規則如下：

- (1) 將矩陣 R 與 B 的元素按照位置填入表 2-3 中的左區和中區；
- (2) 定義的 α 運算，將結果填入右區表中相對應的位置；
- (3) 取表格右區第 i 行的最小值作為矩陣 C 的第 i 個元素。

表 2-3 計算擬極大解的表格法

左區				中區	右區			
r_{11}	r_{12}	\cdots	r_{1n}	b_1	$r_{11}\alpha b_1$	$r_{12}\alpha b_1$	\cdots	$r_{1n}\alpha b_1$
r_{21}	r_{22}	\cdots	r_{2n}	b_2	$r_{21}\alpha b_2$	$r_{22}\alpha b_2$	\cdots	$r_{2n}\alpha b_2$
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
r_{m1}	r_{m2}	\cdots	r_{mn}	b_m	$r_{m1}\alpha b_m$	$r_{m2}\alpha b_m$	\cdots	$r_{mn}\alpha b_m$

將矩陣 R^T 與 B^T 值代入表中，可得到擬極大解，圈起來處為每一行中的最小值所在，至於第三、四行中只要選出最小值，位置可以隨便圈選。

0.3	0.2	0.7	0.8	0.7	1	1	1	0.7
0.5	0.4	0.4	0.9	0.4	0.4	1	1	0.4
0.7	0.3	0.2	0.7	0.4	0.4	1	①	④
0.9	0.6	0.1	0.2	0.3	③	③	1	1
0.8	0.5	0.6	0.4	0.6	0.6	1	1	1

得出擬極大解 $C = (0.3 \ 0.3 \ 1 \ 0.4)^T$ ，再計算 $R^T \circ C$ ，得結果與 B^T 一致，所以 C 是模糊關係方程式的極大解。

步驟三、求判別矩陣。當矩陣 $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ 為極大解時，則定義矩陣

$R^0 = (r_{ij}^0)_{m \times n}$ 稱為模糊關係方程式的判別矩陣，其中 r_{ij}^0 定義如式 (2.70)

$$r_{ij}^0 = \begin{cases} b_i, & \text{if } r_{ij} \wedge c_j \geq b_i \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (2.70)$$

方程式 $R^0 \circ X = B$ 稱為模糊關係方程式的「判別方程」。若將式 (2.70) 用表 2-4 的表格法表示，其建立規則如下：

- (1) 將矩陣 R 與 B 的元素按照位置填入表 2-4 中的左下區和中區，矩陣 C 寫到左上區；
- (2) 對矩陣 R 中的每一個元素進行運算，將結果填入表格又區相對的位置；
- (3) 表格右區為判別矩陣。

表 2-4 計算判別矩陣的表格法

左區				中區	右區			
c_{11}	c_{12}	\cdots	c_{1n}					
r_{11}	r_{12}	\cdots	r_{1n}	b_1	r_{11}^0	r_{12}^0	\cdots	r_{1n}^0
r_{21}	r_{22}	\cdots	r_{2n}	b_2	r_{21}^0	r_{22}^0	\cdots	r_{2n}^0
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
r_{m1}	r_{m2}	\cdots	r_{mn}	b_m	r_{m2}^0	r_{m2}^0	\cdots	r_{mn}^0

模糊關係方程式有解的充要條件是判別矩陣 R^0 的每一列均有非零元素。將上一步驟所得到之矩陣 C ，與式 (2.70) 的建立法則，可得出

0.3	0.3	1	0.4					
0.3	0.2	0.7	0.8	0.7	0	0	0.7	0
0.5	0.4	0.4	0.9	0.4	0	0	0.4	0.4
0.7	0.3	0.2	0.7	0.4	0	0	0	0.4
0.9	0.6	0.1	0.2	0.3	0.3	0.3	0	0
0.8	0.5	0.6	0.4	0.6	0	0	0.6	0

步驟四、由判別矩陣 R^0 建構「過渡矩陣」 R' ：將 R^0 中每一列任取一個非零元素，而將其他元素位置歸零。從表中求出四組 (2×2) 過渡矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

步驟五、由過渡矩陣 R' 建構「擬極小解」 X' ： X' 的第 i 個分量為 R' 第 i 行的最大值。

步驟六、重複步驟四、五，直到求出所有不同的過渡矩陣與擬極小解為止。

因此得出四組擬極小解

$$X_1 = [0.3 \ 0 \ 0.7 \ 0.4]^T$$

$$X_2 = [0.3 \ 0 \ 0.7 \ 0.4]^T$$

$$X_3 = [0 \ 0.3 \ 0.7 \ 0.4]^T$$

$$X_4 = [0 \ 0.3 \ 0.7 \ 0.4]^T$$

步驟七、對步驟六所求的擬極小解進行篩選，除去重複的矩陣和包含於其他擬極小解的矩陣，最後所得到的便是模糊關係方程式的極小解。所以得出本題有兩組極小解為 $[0.3 \ 0 \ 0.7 \ 0.4]^T$ 與 $[0 \ 0.3 \ 0.7 \ 0.4]^T$ 。

2.12.3 George J.Klir 所提之方法

這種方法是在原文書[1]的第六章提到解模糊關係方程式之方法，其比較詳細的原理、定義不在此詳細說明。此方法定義 \hat{p} 為極大解（Maximum Solution）， \check{p} 為極小解（Minimal Solution），其模糊關係方程式解的範圍如圖 2-21 所示。解模糊關係方程式，極大解只有一組（Unique），但是極小解

可能不只一組，所以就形成下面的點陣格（Lattice），點陣格之間的數值都可能是此模糊關係方程式的解。

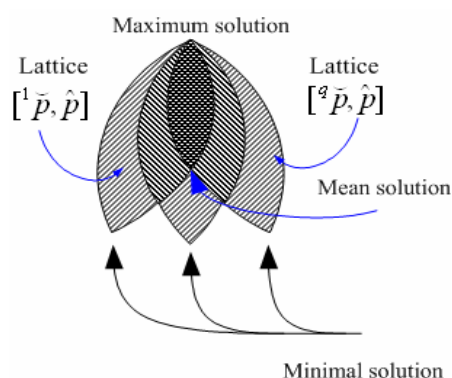


圖 2-21 模糊關係方程式解的範圍

例 2-6

用 George J.Klir 所提之方法來解模糊關係方程式，矩陣 R 與 B 值如 2.11 節所示，以下為求解過程。

解：

步驟一、求極大解。定義最大解 $\hat{X} = [\hat{x}_i]$ ，其中 \hat{x}_i 定義如下：

$$\hat{x}_i = \min_{j=1}^n \sigma(r_{ij}, b_j) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.71)$$

$$\sigma(r_{ij}, b_j) = \begin{cases} b_j, & \text{if } r_{ij} > b_j \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.72)$$

因此根據已知的矩陣 R 與 B 值，代入並計算出極大解 \hat{X}

$$\hat{x}_1 = \min(1, 0.4, 0.4, 0.3, 0.6) = 0.3$$

$$\hat{x}_2 = \min(1, 1, 1, 0.3, 1) = 0.3$$

$$\hat{x}_3 = \min(1, 1, 1, 1, 1) = 1$$

$$\hat{x}_4 = \min(0.7, 0.4, 0.4, 1, 1) = 0.4$$

$$\hat{X} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4] = [0.3 \quad 0.3 \quad 1 \quad 0.4]$$

如果 \hat{X} 不滿足模糊關係方程式，則此模糊關係方程式無解。

步驟二、排列。在求極小解前，需先將矩陣 B 裡的元素由大排列 (Permute) 到小，所以矩陣 R 也必須做相對應的變換。可以得到排列過後的新矩陣 \tilde{B} 與 \tilde{R}

$$\tilde{B} = [0.7 \ 0.6 \ 0.4 \ 0.4 \ 0.3], \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 & 0.5 & 0.7 & 0.9 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.8 & 0.4 & 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

步驟三、減少階數。當 $\hat{x}_i = 0$ ，對於某些 i 值，可以消除 (Eliminate) 矩陣 \tilde{R} 第 i 列；當 $b_j = 0$ ，對於某些 j 值，可以消除矩陣 \tilde{R} 的第 j 行，此步驟稱為減少階數 (Decreasing Order)。本題 \hat{x}_i 與 b_j 並無為零的元素，所以無法減少階數。

步驟四、計算集合。在步驟一得到 \hat{X} 之後，利用此數值計算集合 $J_j(\hat{X})$ ，定義如下：

$$J_j(\hat{X}) = \{i = 1, 2, \dots, m \mid \min(\hat{x}_i, r_{ij}) = b_j\} \quad (2.73)$$

並定義它的卡氏乘積 (Cartesian Product) 為

$$J(\hat{X}) = \times_{j=1}^n J_j(\hat{X}) \quad (2.74)$$

代入先前得到的 \hat{X} ，與已知的矩陣 \tilde{R} 與 \tilde{B} 值後，可得

$$\begin{aligned} J_1(\hat{X}) &= \{i = 1, 2, \dots, m \mid \min(\hat{x}_i, r_{i1}) = b_1\} \\ &= \{\min(\hat{x}_1, r_{11}) = b_1, \min(\hat{x}_2, r_{21}) = b_1, \min(\hat{x}_3, r_{31}) = b_1, \min(\hat{x}_4, r_{41}) = b_1\} \\ &= \{\min(0.3, 0.7) = 0.3 \neq b_1, \min(0.3, 0.2) = 0.2 \neq b_1, \\ &\quad \min(1, 0.7) = 0.7 = b_1, \min(0.4, 0.8) = 0.4 \neq b_1\} \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2(\hat{X}) &= \{i = 1, 2, \dots, m \mid \min(\hat{x}_i, r_{i2}) = b_2\} \\ &= \{\min(\hat{x}_1, r_{12}) = b_2, \min(\hat{x}_2, r_{22}) = b_2, \min(\hat{x}_3, r_{32}) = b_2, \min(\hat{x}_4, r_{42}) = b_2\} \\ &= \{\min(0.3, 0.8) = 0.3 \neq b_2, \min(0.3, 0.5) = 0.3 \neq b_2, \\ &\quad \min(1, 0.6) = 0.6 = b_2, \min(0.4, 0.4) = 0.4 \neq b_2\} \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3(\hat{X}) &= \{i = 1, 2, \dots, m \mid \min(\hat{x}_i, r_{i3}) = b_3\} \\
&= \{\min(0.3, 0.5) = 0.3 \neq b_3, \min(0.3, 0.4) = 0.3 \neq b_3, \\
&\quad \min(1, 0.4) = 0.4 = b_3, \min(0.4, 0.3) = 0.3 \neq b_3\} \\
&= \{3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4(\hat{X}) &= \{i = 1, 2, \dots, m \mid \min(\hat{x}_i, r_{i4}) = b_4\} \\
&= \{\min(0.3, 0.7) = 0.3 \neq b_4, \min(0.3, 0.3) = 0.3 \neq b_4, \\
&\quad \min(1, 0.2) = 0.2 \neq b_4, \min(0.4, 0.7) = 0.4 = b_4\} \\
&= \{4\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_5(\hat{X}) &= \{i = 1, 2, \dots, m \mid \min(\hat{x}_i, r_{i5}) = b_5\} \\
&= \{\min(0.3, 0.9) = 0.3 = b_5, \min(0.3, 0.6) = 0.3 = b_5, \\
&\quad \min(1, 0.1) = 0.1 \neq b_5, \min(0.4, 0.2) = 0.2 \neq b_5\} \\
&= \{1, 2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(\hat{X}) &= J_1(\hat{X}) \times J_2(\hat{X}) \times J_3(\hat{X}) \times J_4(\hat{X}) \times J_5(\hat{X}) \\
&= \{3\} \times \{3\} \times \{3\} \times \{4\} \times \{1, 2\} \\
&= \{(3, 3, 3, 4, 1), (3, 3, 3, 4, 2)\}
\end{aligned}$$

步驟五、計算 $K(\beta, i)$ 。其中 $\beta \in J(\hat{X})$ ， $K(\beta, i)$ 定義如下：

$$K(\beta, i) = \{k = 1, 2, \dots, n \mid \beta_k = i\} \quad (2.75)$$

本題可得出 $\beta = \{(3, 3, 3, 4, 1), (3, 3, 3, 4, 2)\}$ ，表 2-5 為 $K(\beta, i)$ 的說明表

表 2-5 $K(\beta, i)$ 的說明表

$K(\beta, i)$	i			
	1	2	3	4
$\beta = 3 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 1$	$\{5\}$	ϕ	$\{1, 2, 3\}$	$\{4\}$
$\quad \quad \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 2$	ϕ	$\{5\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{4\}$

此表閱讀方式是當 i 為某值時，出現在 β 的哪個位置的數值剛好等於 i 值，在表的右下角記錄其位置的集合，如果沒有符合 i 值的，則記為空集合 ϕ 。

步驟六、計算 $g(\beta)$ 。 $g(\beta)$ 定義如下：

$$g(\beta) = \{g_i(\beta) \mid i = 1, 2, \dots, m\} \quad (2.76)$$

$$g_i(\beta) = \begin{cases} \max_{j \in K(\beta, i)} b_j, & \text{if } K(\beta, i) \neq \phi \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (2.77)$$

當求出來的 $g(\beta)$ 有很多組，則必須從中篩選，取出最小的、沒有重疊的矩陣出來。將上一步驟得到之 β 代入此例，可得

$$g((3, 3, 3, 4, 1)) = (g_1(3, 3, 3, 4, 1), g_2(3, 3, 3, 4, 1), g_3(3, 3, 3, 4, 1), g_4(3, 3, 3, 4, 1))$$

$$\begin{aligned} g_1(3, 3, 3, 4, 1) &= \begin{cases} \max_{j \in K((3, 3, 3, 4, 1), 1)} b_j, & \text{if } K((3, 3, 3, 4, 1), 1) \neq \phi \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \\ &= \max_{j \in K((3, 3, 3, 4, 1), 1)} b_j \\ &= \max_{j \in K((3, 3, 3, 4, 1), 1)} (b_5) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(3, 3, 3, 4, 1) &= \begin{cases} \max_{j \in K((3, 3, 3, 4, 1), 2)} b_j, & \text{if } K((3, 3, 3, 4, 1), 2) \neq \phi \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3(3, 3, 3, 4, 1) &= \begin{cases} \max_{j \in K((3, 3, 3, 4, 1), 3)} b_j, & \text{if } K((3, 3, 3, 4, 1), 3) \neq \phi \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \\ &= \max_{j \in K((3, 3, 3, 4, 1), 3)} b_j \\ &= \max_{j \in K((3, 3, 3, 4, 1), 3)} (b_1, b_2, b_3) \\ &= \max(0.7, 0.6, 0.4) \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4(3, 3, 3, 4, 1) &= \begin{cases} \max_{j \in K((3, 3, 3, 4, 1), 4)} b_j, & \text{if } K((3, 3, 3, 4, 1), 4) \neq \phi \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases} \\ &= \max_{j \in K((3, 3, 3, 4, 1), 4)} b_j \\ &= \max_{j \in K((3, 3, 3, 4, 1), 4)} (b_4) \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

得到 $g((3, 3, 3, 4, 1)) = (0.3, 0, 0.7, 0.4)$ ，利用相同的步驟，可以求出另外一組解

$$g((3, 3, 3, 4, 2)) = (0, 0.3, 0.7, 0.4)。$$

步驟七、擴展。如果在步驟三有做了消除 (Eliminate) 矩陣中某一列的動作，則最後需把做消除的第 i 列，在求出來的極小解中第 i 個元素位置補上 0。因為此題沒有做消除矩陣的步驟，所以步驟六所得之兩組解即為極小解，令極小值為 \tilde{X} ，可得

$$\tilde{X} = [0.3 \quad 0 \quad 0.7 \quad 0.4]$$

$$\tilde{X} = [0 \quad 0.3 \quad 0.7 \quad 0.4]$$

2.12.4 曾煥雯教授所提之方法

此方法為曾煥雯教授之博士論文[19]，是根據徐羅曹李法改良的解模糊關係方程式之方法，亦為本論文參考之主要依據。圖 2-22 所示為解模糊關係方程式之極大與極小值之示意圖，極大值通解即所有極大解的最小值；極小值通解即所有極小解的最大值。

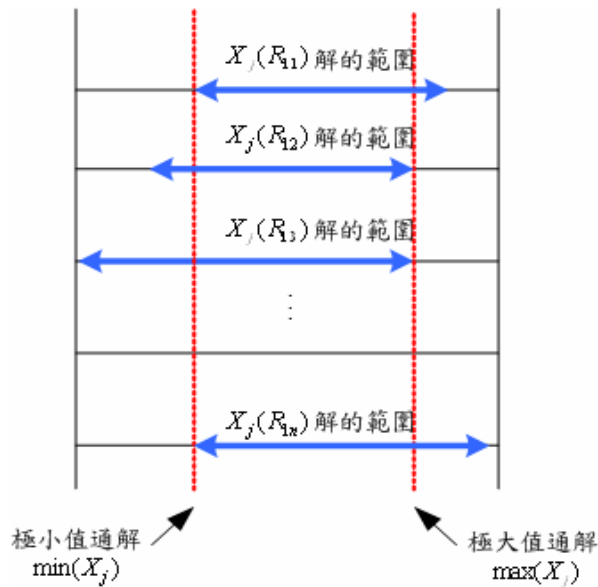


圖 2-22 極大值與極小值通解範圍

例 2-7

利用該法來解模糊關係方程式，矩陣 R 與 B 值如 2.11 節所示，求解過程如下。

解：

步驟一、定義變數解範圍。定義兩個變數 \overline{M}_{ij} 與 \overline{m}_{ij} ，其中 \overline{M}_{ij} 與 \overline{m}_{ij} 為求極大解與極小解的可能解，定義如下：

$$\begin{cases} \overline{M}_{ij} = b_i, \overline{m}_{ij} = b_i, & \text{if } r_{ij} > b_i \\ \overline{M}_{ij} = 1, \overline{m}_{ij} = b_i, & \text{if } r_{ij} = b_i \\ \overline{M}_{ij} = 1, \overline{m}_{ij} = 0, & \text{if } r_{ij} < b_i \end{cases} \quad (2.78)$$

步驟二、定義判別矩陣。 \overline{M} 為求極大解的判別矩陣， \overline{m} 為求極小解的判別矩陣， \overline{M} 與 \overline{m} 分別為 \overline{M}_{ij} 與 \overline{m}_{ij} 的所有變數集合，由步驟二所得之 \overline{M}_{ij} 與 \overline{m}_{ij} ，可以計算出 \overline{M} 與 \overline{m}

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0.7 \\ 0.4 & 1 & 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 1 & 1 \\ 0.6 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

步驟三、求極大解。極大解的通解是判別矩陣 \overline{M} 中每一行的最小值。定義如下：

$$\hat{X}_j = \min(\overline{M}_j), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.79)$$

可求得極大解 \hat{X}

$$\hat{X} = (0.3, 0.3, 1, 0.4)$$

步驟四、修正判別矩陣 \overline{m} 。檢查 \overline{m} 中各元素值，如大於同行的 \hat{X}_j 之值時，則該元素喪失決定最小解的自由度 (The Degree of Freedom)，須設為零。定

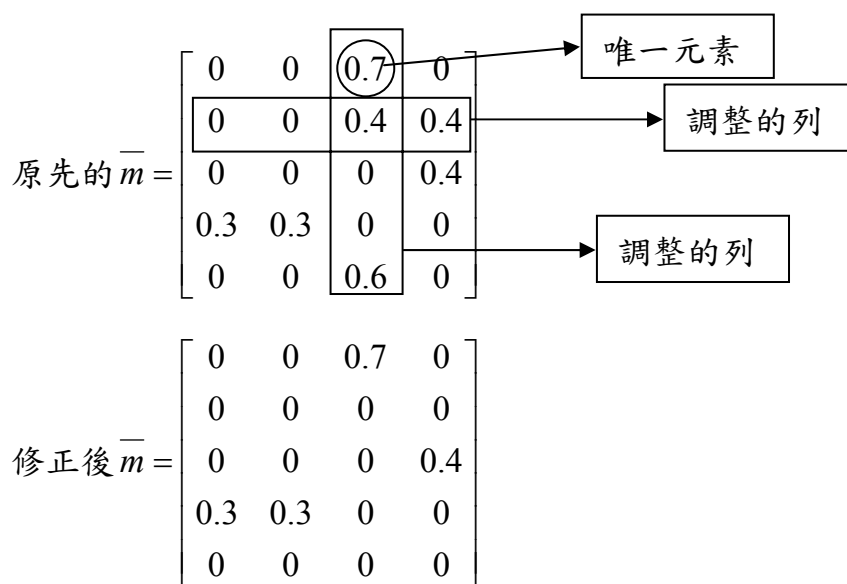
義如下：

$$\overline{m}_{ij} = 0, \text{ if } \overline{m}_{ij} > \hat{X}_j \quad (2.80)$$

經此修正過後，可得到新的判別矩陣 \overline{m}

$$\overline{m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

步驟五、判別唯一狀態與調整判別矩陣。於多變數的求解時，如同多組的單變數共同求解，因此判別矩陣 \overline{m} 中的每一列僅有一個自由度（The Degree of Freedom）。若於同列之中僅有一個元素不為零，則它是極小解所對應的元素的唯一解，為此「唯一」的元素佔有；至於同行中其他不為零的元素值都不再具有決定通解的機會，將它們的值都設為零，這一行即是調整的行（Modified Column）；而這些因同行喪失自由度元素的同列中不為零的所有元素，也隨著喪失自由度，調整它們的值為零，這些列即是調整的列（Modified Row）。逐行檢查並進行修正。以下為上述文字的示意



步驟六、判斷並存狀態與列出解的組合。檢查此時的 \bar{m} 矩陣，若於同列之中存在兩個或兩個以上的元素不為零時，由於同列之中僅有一個自由度，所以它們將共用一個自由度，稱此為「並存」(Coexistences)狀態。若有並存狀態時，則需將各種組合列出，最後得到之解即為極小解。本範例可得並存狀態於第四列中出現

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{並存狀態}$$

最後列出所有解的組合，可得極小解為

$$\tilde{X} = [0.3 \ 0 \ 0.7 \ 0.4]$$

$$\tilde{X} = [0 \ 0.3 \ 0.7 \ 0.4]$$

2.12.5 駱樂與王文俊教授所提之方法

依王文俊教授博士班學生駱樂之期刊論文[4]，亦為解模糊關係方程式之方法。本法是根據 2.12.3 節介紹之方法改良的演算法，該方法的介紹如下。

例 2-8

用駱樂與王文俊教授之方法來解模糊關係方程式，矩陣 R 與 B 值如下所示，以下為求解過程。

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}, B = [0.5 \ 0.5 \ 0.4 \ 0]$$

解：

步驟一、檢查解是否存在。確定方程式有解。當 $R \neq \emptyset$ 時，稱模糊關係方程式「有解」，反之稱為「無解」。與 2.12.2 節之步驟一雷同。

步驟二、排序並求極大值。將矩陣 B 之元素做由大到小的排列，矩陣 R 也做相對應的位置變換。極大解求法與 2.12.3 節之步驟一雷同，差別只在於 2.12.3 節並沒有要求先做排序動作再解最大解，其實位置變換不影響結果。推測其目的是要把 2.12.3 節之步驟二合併到步驟一而已。得極大解 \hat{X} 為

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \min(1, 0.5, 1, 1) = 0.5 \\ \hat{x}_2 &= \min(1, 0.5, 1, 1) = 0.5 \\ \hat{x}_3 &= \min(1, 1, 0.4, 0) = 0 \\ \hat{x}_4 &= \min(1, 1, 1, 0) = 0 \\ \hat{X} &= [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4] = [0.5 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0]\end{aligned}$$

步驟三、建立矩陣樣式。矩陣 M 稱為矩陣樣式 (Matrix Pattern)，矩陣 M 的建立方式定義如下：

$$M = [m_{ij}], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.81)$$

$$m_{ij} \triangleq (\hat{x}_i, r_{ij}) \quad (2.82)$$

根據上兩式，可得出本題的矩陣樣式 M

$$M = \begin{bmatrix} (0.5, 0.5) & (0.5, 0.7) & (0.5, 0) & (0.5, 0) \\ (0.5, 0.4) & (0.5, 0.6) & (0.5, 0.4) & (0.5, 0) \\ (0, 0.2) & (0, 0.4) & (0, 0.5) & (0, 0.6) \\ (0, 0.1) & (0, 0.2) & (0, 0) & (0, 0.8) \end{bmatrix}$$

步驟四、標記。定義當滿足式 (2.83) 時，在 m_{ij} 的位置下方標記 (Mark)，成為 \underline{m}_{ij}

$$\min(\hat{x}_i, r_{ij}) = b_j \quad (2.83)$$

將步驟三的矩陣 M 進行標記過後，可得到新矩陣 M'

$$M' = \begin{bmatrix} \underline{(0.5, 0.5)} & \underline{(0.5, 0.7)} & (0.5, 0) & \underline{(0.5, 0)} \\ \underline{(0.5, 0.4)} & \underline{(0.5, 0.6)} & \underline{(0.5, 0.4)} & \underline{(0.5, 0)} \\ (0, 0.2) & (0, 0.4) & (0, 0.5) & \underline{(0, 0.6)} \\ (0, 0.1) & (0, 0.2) & (0, 0) & \underline{(0, 0.8)} \end{bmatrix}$$

步驟五、如果 j_1 是被標記的 \underline{m}_{ij} 中之最小的 j 值，那麼定義 \underline{x}_{i_1} 是在被標記之 $\underline{m}_{i_1 j_1}$

中之最小的元素。依據定義，可得本題的 $j_1 = 1$

$$\underline{x}_1 = \min(0.5, 0.5) = 0.5, i_1 = 1$$

步驟六、刪除矩陣 M' 中的第 i_1 列與第 j_1 行，並且刪除包含到其他被標註的 $\underline{m}_{i_1 j}$

這一行的所元素，此處 $j \neq j_1$ 。根據刪除過後，可得到下面的矩陣 M'

$$M' = \begin{bmatrix} \overline{(0.5, 0.5)} & \overline{(0.5, 0.7)} & \overline{(0.5, 0)} & \overline{(0.5, 0)} \\ \overline{(0.5, 0.4)} & \overline{(0.5, 0.6)} & \overline{(0.5, 0.4)} & \overline{(0.5, 0)} \\ (0, 0.2) & (0, 0.4) & (0, 0.5) & (0, 0.6) \\ (0, 0.1) & (0, 0.2) & (0, 0) & \underline{(0, 0.8)} \end{bmatrix}$$

步驟七、重複步驟五、六。在所有剩餘且被標記的 \underline{m}_{ij} 中，定義 j_2 是目前被標

記的 \underline{m}_{ij} 中之最小的 j 值，那麼定義 \underline{x}_{i_2} 是在被標記之 $\underline{m}_{i_2 j_2}$ 中之最小的元素。刪

除矩陣 M' 中的第 i_2 列與第 j_2 行，並且刪除包含到其他被標註的 $\underline{m}_{i_2 j}$ 這一行的

所元素，此處 $j \neq j_2$ 。重複此步驟，直到所有被標記的 \underline{m}_{ij} 都被刪除。可得本

題的 $j_2 = 3$

$$\underline{x}_2 = \min(0.5, 0.4) = 0.4, i_2 = 2$$

$$M' = \begin{bmatrix} \overline{(0.5, 0.5)} & \overline{(0.5, 0.7)} & \overline{(0.5, 0)} & \overline{(0.5, 0)} \\ \overline{(0.5, 0.4)} & \overline{(0.5, 0.6)} & \overline{(0.5, 0.4)} & \overline{(0.5, 0)} \\ (0, 0.2) & (0, 0.4) & (0, 0.5) & (0, 0.6) \\ (0, 0.1) & (0, 0.2) & (0, 0) & \underline{(0, 0.8)} \end{bmatrix}$$

步驟八、若已經沒有標記的 \underline{m}_{ij} 時，則剩下還未定義的 \underline{x}_i 值都設為零。可得

$$\underline{x}_3 = 0, \underline{x}_4 = 0$$

最後求出本題之極小解為

$$\tilde{X} = [\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4] = [0.5 \quad 0.4 \quad 0 \quad 0]$$

例 2-9

依駱樂與王文俊教授之方法來解模糊關係方程式，考量前節所提「並存」現象，重新將範例演算一次，矩陣 R 與 B 值如 2.11 節所示。定義與說明已經在例 2-8 中說明過，以下求解過程將不再詳述。

解：

步驟一、此方程式有解。

步驟二、得到極大解 \hat{X} 為

$$\hat{x}_1 = \min(1, 0.6, 0.4, 0.4, 0.3) = 0.3$$

$$\hat{x}_2 = \min(1, 1, 1, 1, 0.3) = 0.3$$

$$\hat{x}_3 = \min(1, 1, 1, 1, 1) = 1$$

$$\hat{x}_4 = \min(0.7, 1, 0.4, 0.4, 1) = 0.4$$

$$\hat{X} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4] = (0.3, 0.3, 1, 0.4)$$

步驟三、得出本題的矩陣樣式 M

$$M = \begin{bmatrix} (0.3, 0.3) & (0.3, 0.8) & (0.3, 0.5) & (0.3, 0.7) & (0.3, 0.9) \\ (0.3, 0.2) & (0.3, 0.5) & (0.3, 0.4) & (0.3, 0.3) & (0.3, 0.6) \\ (1, 0.7) & (1, 0.6) & (1, 0.4) & (1, 0.2) & (1, 0.1) \\ (0.4, 0.8) & (0.4, 0.4) & (0.4, 0.9) & (0.4, 0.7) & (0.4, 0.2) \end{bmatrix}$$

步驟四、將步驟三的矩陣 M 進行標記過後，可得到新矩陣 M'

$$M' = \begin{bmatrix} (0.3, 0.3) & (0.3, 0.8) & (0.3, 0.5) & (0.3, 0.7) & \underline{(0.3, 0.9)} \\ (0.3, 0.2) & (0.3, 0.5) & \underline{(0.3, 0.4)} & (0.3, 0.3) & \underline{(0.3, 0.6)} \\ \underline{(1, 0.7)} & \underline{(1, 0.6)} & \underline{(1, 0.4)} & (1, 0.2) & (1, 0.1) \\ (0.4, 0.8) & (0.4, 0.4) & \underline{(0.4, 0.9)} & \underline{(0.4, 0.7)} & (0.4, 0.2) \end{bmatrix}$$

步驟五、本題的 $j_1 = 1$

$$x_3 = \min(1, 0.7) = 0.7, i_1 = 3$$

從第三列第一行開始刪除，並刪除第一行與第三列上的其他元素

$$M' = \begin{bmatrix} (0.3|0.3) & (0.3|0.8) & (0.3|0.5) & (0.3,0.7) & \underline{(0.3,0.9)} \\ (0.3,0.2) & (0.3|0.5) & \underline{(0.3,0.4)} & (0.3,0.3) & \underline{(0.3,0.6)} \\ \underline{(1,0.7)} & \underline{(1,0.6)} & \underline{(1,0.4)} & (1,0.2) & (1,0.1) \\ (0.4|0.8) & (0.4|0.4) & \underline{(0.4,0.9)} & \underline{(0.4,0.7)} & (0.4,0.2) \end{bmatrix}$$

步驟六、從剩餘之 $\underline{m_{ij}}$ 中，找出 $j_2 = 4$

$$x_4 = \min(0.4, 0.7) = 0.4, i_2 = 4$$

$$M' = \begin{bmatrix} (0.3|0.3) & (0.3|0.8) & (0.3|0.5) & (0.3|0.7) & \underline{(0.3,0.9)} \\ (0.3,0.2) & (0.3|0.5) & \underline{(0.3,0.4)} & (0.3,0.3) & \underline{(0.3,0.6)} \\ \underline{(1,0.7)} & \underline{(1,0.6)} & \underline{(1,0.4)} & (1,0.2) & (1,0.1) \\ \underline{(0.4,0.8)} & \underline{(0.4,0.4)} & \underline{(0.4,0.9)} & \underline{(0.4,0.7)} & (0.4,0.2) \end{bmatrix}$$

步驟七、此時存在兩個未被消除的 $\underline{m_{ij}}$ ， $j_3 = 5$ ，但是其演算法中並無提及這類情形的解決方式，如果挑選第一列，則第二列元素被消去之後，只會得到一組解，就少了另外一組答案。故此演算法仍有欠周詳，且只能解某些案例的矩陣，如果當第一行有兩個以上被標記之 $\underline{m_{ij}}$ 時，步驟五即無法開始進行，故此題之正確解應有兩組解

$$\tilde{X} = [0.3 \quad 0 \quad 0.7 \quad 0.4]$$

$$\tilde{X} = [0 \quad 0.3 \quad 0.7 \quad 0.4]$$

2.12.6 鏈解法

大陸學者所提方法中，還有一種改進的解法，可以在求擬極小解時將瑣碎的解除掉，式 (2.84) 為其定義，稱為模糊集合鏈[12]：

$$\underset{i=1}{*}^n A_i = A_1 * A_2 * \dots * A_n, \quad A_i \neq \phi \quad (2.84)$$

A_i 稱為鏈的「項」。當 $i \neq j$ ，使得 $A_i \subseteq A_j$ 時，可以將 A_j 從鏈中消去。另外定義式 (2.85) 為兩個模糊集合鏈的並行運算為

$$\bigcup_{i=1}^m * A_i \cup \bigcup_{j=1}^n * B_j = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n (* A_i \cup * B_j) \quad (2.85)$$

當化簡到不可在化簡時，則稱此鏈為「既約鏈」。

例 2-10

利用鏈解法解模糊關係方程式，步驟如下。

解：

步驟一至步驟三，請參考 2.12.2 節之步驟一至步驟三，求法一樣，並寫出其模糊集合鏈。可得到下面的判別矩陣

$$R^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0.7/u_3 \\ 0.4/u_3 * 0.4/u_4 \\ 0.4/u_4 \\ 0.3/u_1 * 0.3/u_2 \\ 0.6/u_3 \end{matrix}$$

步驟四、對 R^0 各列的模糊集合鏈取並行運算。可得

$$\begin{aligned} \text{Chain} &= (0.7/u_3) \cup (0.4/u_3 * 0.4/u_4) \cup (0.4/u_4) \\ &\quad \cup (0.3/u_1 * 0.3/u_2) \cup (0.6/u_3) \\ &= [(0.7/u_3 \cup 0.4/u_3) * (0.7/u_3 \cup 0.4/u_4)] \\ &\quad \cup (0.4/u_4 \cup 0.6/u_3) \cup (0.3/u_1 * 0.3/u_2) \end{aligned}$$

步驟五、繼續整理並簡化到成為「既約鏈」。可得

$$\begin{aligned} \text{Chain} &= [(0.7/u_3 \cup 0.4/u_3) * (0.7/u_3 \cup 0.4/u_4)] \\ &\quad \cup (0.4/u_4 \cup 0.6/u_3) \cup (0.3/u_1 * 0.3/u_2) \\ &= [(0.7/u_3) * (0.7/u_3 \cup 0.4/u_4)] \\ &\quad \cup (0.6/u_3 \cup 0.4/u_4) \cup (0.3/u_1 * 0.3/u_2) \\ &= [(0.7/u_3) \cup (0.6/u_3 \cup 0.4/u_4)] \cup \\ &\quad [(0.7/u_3 \cup 0.4/u_4) \cup (0.6/u_3 \cup 0.4/u_4)] \\ &\quad \cup (0.3/u_1 * 0.3/u_2) \\ &= (0.7/u_3 \cup 0.4/u_4) \cup (0.7/u_3 \cup 0.4/u_4) \\ &\quad \cup (0.3/u_1 * 0.3/u_2) \\ &= (0.7/u_3 \cup 0.4/u_4) \cup (0.3/u_1 * 0.3/u_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (0.7/u_3 \cup 0.4/u_4 \cup 0.3/u_1) * \\
&\quad (0.7/u_3 \cup 0.4/u_4 \cup 0.3/u_2) \\
&= (0.3/u_1 + 0.7/u_3 + 0.4/u_4) * \\
&\quad (0.3/u_2 + 0.7/u_3 + 0.4/u_4)
\end{aligned}$$

此時已經得到既約鏈，所以可以知道有兩組極小解為

$$\tilde{X} = [0.3 \quad 0 \quad 0.7 \quad 0.4]$$

$$\tilde{X} = [0 \quad 0.3 \quad 0.7 \quad 0.4]$$

經由以上六個小節的介紹解模糊關係方程式方法之後，應該對解模糊關係方程式有更深入的瞭解了。本研究在此將六種方法的特點整理成表格，方便比較與觀察，詳見表 2-6。

表 2-6 各種解模糊關係方程式方法之特點

特點/ 方法	徐曹羅 李簡化 法	表 格 法	George J.Klir所 提之方法	曾煥雯教授 所提之方法	駱樂與王文俊 教授所提之方 法	鏈 解 法
矩陣需 要排列	是	否	是	否	是	否
矩陣需 要轉置	否	是	否	是	否	是
瑣碎解 產生	是	是	否	否	否	否
容易理 解	中	中	難	易	易	難
容易程 式化	否	否	否	是	是	否
計算量	大	大	大	小	小	大

資料來源：本研究整理

2.13 第二章總結

本章於 2.1 節至 2.9 節先將模糊的起源以及一些基本定義詳細介紹，並將文獻上沒有介紹與遺漏之處整理並歸納。例如模糊模型這一節則是根據很多文獻中截長補短而完整的介紹三種模糊模型。2.10 節至 2.12 節則介紹模糊關係、綜合評判與模糊關係方程式之間的關係。並於 2.12 節將所有找到文獻有介紹之解模糊關係方程式方法詳細介紹，此為本研究之主要貢獻之一。因為並無其他文獻做過此類的探討與分析。有本章介紹的先備知識後，對往後要進行研究也可以當作參考。