# 第五章、下卷內容與結構

《籌學本原》下卷的內容可大致上可分爲爲天元術、衰分兩大部分。筆者想在本章要針對下卷內容比對與分析，從《籌學本原》整體的體例來看，《籌學本原》是以「問題」、「答曰」、「術曰」形式呈現，如果，有些題有多解時，是以「又術」文字來說明。特別能從下卷呈現一致的體例，看出作者編排此書用心。

## 5－1 天元術

在下卷開宗明義引一段序中：「卷末一門，立天元一算，包羅策書，靡有子遺，明天地之變通，演陰陽之消長，此書一出，允為算法之標準，四方之學者歸焉。」[1]在此我們發現，朴繘的天元術見解很高，朴繘用開方術和天元列式作爲一元方程求根的方法爲解題方式。天元術是用來處理有關一元多次方程式的問題。朴繘掌握天元術的要領，利用天元術來解題的關鍵之處，是依據題意中不同的條件列出「立天元一」，提供學習者更高明的解題技巧。使得我們多少可以體會，在數理解題過程上，用天元一是可以減低不必要的誤解與爭論。

> 啟蒙曰：天元一，以古法演之，明源活法，省功數倍，假立一算，於太極之下，如意求之，得方廉隅，從正負之段，乃演其虛積，相消相長，脫其真積也。

朴繘在《籌學本原》下卷天元術引用段文，由此可知，書中雖然有一些簡單題，或是不需用天元來列方程式，但是朴繘仍是用天元術來解題，因此可以巧妙地避開一些解題瓶頸，朴繘對天元術運用自如，展現他對天元術之天份，難怪不得不令人讚嘆他對天元的功力深厚。[2]

在《籌學本原》天元術天元式的運算除了有加、減、乘、除外，尚有「寄分」一法，專門解決一些不能除盡的問題。天元術在列出「寄左數」與「又數」後，其化簡是採取「相消」的方式。朴繘先以開平圓與開立圓適等例題，來做基本的練習。無論是直田、句股形、開平立圓、立圓積、開方術、一分爲隅加因法、之分取用法、衰分等都用天元一來解題。以下是筆者整理朴繘在天元術之開方術篇

[1] 引自朱世傑，《算學啓蒙》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍彙編》數學卷第一分冊，鄭州：河南教育出版社，1993 年。

[2]參閱川原秀城，〈東算と天元術-十七世紀中期~十八世紀初期の朝鮮數學〉，《朝鮮學報》，第 169 輯 1998 年。

中所運用的公式如下：

## 開平圓

開平圓是已知圓積求外周和內徑的方法。茲分述如下：

一、積求外周法

由【周求積式】即設圓周爲$c$，則圓積＝$\frac{c^2}{12}$。可知：圓周$c=\sqrt{12\times \text{š¢Ï}}$ 。

二、積求內徑法

由【徑求積式】即設圓徑（直徑）爲$d$，則圓積＝$\frac{3}{4}d^2$。可知：內徑

$d=\sqrt{\frac{4\times \text{š¢Ï}}{3}}$ 。

例題：【平積求徑】

已知：平積四尺五十六分尺之五十一

術曰：積通內二百七十五，又二十八之，七千七百，二十二而一，三百五十分母乘之，一萬九千六百，開方一百四十，又分母而一，餘各二十八約之。

又術：三百五十為實，分母為廉，開之。又術：一十四約實廉，實二十五廉四，開之尤捷。又術：分母除三百五十，得六尺四分尺之一，通內二十五，開方五又分母四，開方得二報除。

即：圓積＝275/56， 4×圓積 / 圓周率＝4×275/56÷22/7＝25/4，開方＝5/2。

## 開立圓

開立圓是已知立圓積求外周和內徑的方法。茲分述如下：

一、積求外周法

由【周求積式】設立圓周爲$c$，則立圓積＝$\frac{c^3}{48}$。可知：立圓周

$c=\sqrt[3]{48\times \text{—§š¢Ï}}$ 。

二、積求內徑法

由【徑求積式】設立圓徑（直徑）爲$d$，則立圓積＝$\frac{9}{16}d^3$。

可知：立圓徑$d=\sqrt[3]{\frac{16\times \text{—§š¢Ï}}{9}}$

## 5－1－1 開方術

本卷開方術，共有七節，分別爲平方、立方、三乘方、四乘方、五六七乘方、諸乘互維圖、廣諸乘方。大致上是以《算法統宗》（程大位著，1592 年）以及《同文算指》（李之藻著，1613 年）爲底本而編寫成的。書中清楚的表明，所謂平方、立方、三乘方、四乘方、五乘方、六乘方、七乘方爲開方式構造，是利用增乘開方法來說明「實」、「方法」、「廉法」、「隅法」的乘數，「廉法」可分爲長廉、平廉、方廉、或是分上廉、中廉、下廉，爲二項式展開之各項係數値。「實」爲常數項，「廉、法」爲除了最高次項以外中間項之係數，最高次項係數稱爲「隅」隅法也稱「下法」，例如：三乘方二項次展開式中，隅法代表 x 四次方係數 1，下廉代表 x 三次方係數 4，上廉代表 x 二次方係數 6，方法代表一次方係數 4，實代表常數項 1。開三乘方即開四次方根、開四乘方即開五次方根、開五乘方即開六次方根、開六乘方即開七次方根、開七乘方即開四次方根，依此類推。開頭說：「**凡方廉隅名目當準同文算指**」，[3]意思指本卷中的方、廉、隅名目都和《同文算指》相同。又在次商用通率圖時說：「**此方廉隅之名，與前開方術所引啟蒙法，異而理一，觀者詳之。**」[4]

現引述中國賈憲的立成釋鎖法與增乘開方法：[5]

> 賈憲立成釋鎖，平方法曰：置積為實，別置一算，名曰下法。於實數之下，自末位，常超一位，約實置首，盡而止實，上商置第一位，得數下法之上，亦置上商為方法，以方法命上商，除實二乘方法為廉法，一退下法，再退續商，第二位得數於廉法，之次，照上商置隅，以方廉二法，皆命上商，除實二乘隅法，併入廉法，一退下法，再退，商置第三位，得數下法之上，照上商置隅，以廉隅二法，皆命上商，除實盡得平方一面之數，積有分子者，以分母乘，其全入內子，又以分母再二次自乘之，積圓者，以圓法十二乘之，

---

[3] 參閱朴繘，《籌學本原》，金容雲編《韓國科學技術史資料大系-數學篇 3》韓國驪江出版社，頁 279。

[4] 參閱同上，頁 290。

[5] 《詳解九章算法》是以賈憲《黃帝九章算經細草》爲藍本撰寫而成。賈憲的生平不詳，生活於十一世紀上半葉，曾任左班殿直，撰有《黃帝九章算法細草》和《算法古集》二卷。北宋王洙（997-1057）曾說到：「近世司天算，楚衍爲首。既老昏，有弟子賈憲、朱吉著名。憲今爲左班殿値、吉隸太史。憲運算亦妙，有書傳於世，而憲吉駁憲棄其餘分，於法未盡。」根據王洙所言，賈憲是天文學家楚衍的學生。在楊輝的《詳解九章算法纂類》勾股章，清楚記錄了以下四種開方法：「賈憲立成釋鎖平方法」、「增乘開平方法」、「賈憲立成釋鎖立方法」、「增乘開立[5]方法」。[5]其中「釋鎖」是宋元數學家對開方或是解數字方程式的稱呼，亦稱「鎖積」或「鎖方」而；「立成」是唐以後天文學家推導各式數據時所使用的算表通稱。因此，「立成釋鎖平方法」和「立成釋鎖立方法」可看成是運用某種算表來進行開平方和開立方的運算，而所使用算表很可能就是指賈憲所作的「開方作法本源」圖，「立成釋鎖」便是利用「開方作法本源」來進行任何高次冪開方法。參考王文珮，《楊輝算書探微》，(國立台灣師範大學學系教學碩士班碩士論文，2002 年 8 月)

> 開平方求積，如分母自乘而一。…增乘開平方法曰，第一位上商得數，以乘下法，為平方命，上商除實，上商得數，以乘下法，入平方一退為廉。第二位再商得數，以乘下法，為隅命，上商除實，訖以上商得數，乘下法入隅，皆名曰，廉一退下法，再退以求第三位商數。第三位如第二位用法求之。[67]

朴𦡄不僅使用了新的開平方和開立方的增乘開方法，還使用了開任意高次冪的高次開方法。正像開平方和開立方要利用公式一樣，

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

高次開方法要利用公式：

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

………………………………………………………………..

其中每一個橫行都表示著 $(a+b)^n$ 展開公式中的係數。如最後一行就表示 $(a+b)^6$ 的展開式中的係數 $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$。

朴𦡄在開平方、開立方中所引入的方法－隨乘隨加的增乘方法。例如求開六次方時所用到的 6 次冪展開式的係數，首先是列出五層，每層都是 1。其次「以隅算一，自下增入前位至首位而止。」「復以隅算如前升增，遞低一位求之」，就是由下而上每低一位而止。最後結果再加上隅和積，剛好是 $(a+b)^6$ 展開式中的係數 1、6、15、20、15、6、1。顯而易見，用這種「增乘開方法」可以求得任意高次展開式的係數，因而也就可以用這些係數來進行任意高次冪的開方。不難推想：「增乘開方法」不僅可以用來求出係數，而且也可以用來直接進行開任意高次冪的開方。

《籌學本原》「開方術」開三乘方中，是引《同文算指》通編卷八之廣諸乘方法第十七，為開諸乘方之法則：[8]

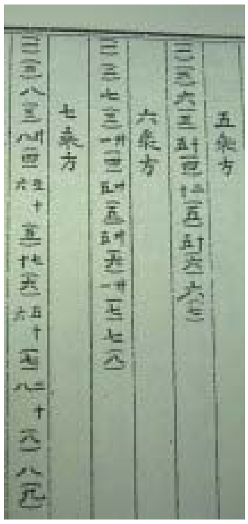
[6]見楊輝，《詳解九章算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第一分冊(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1022。

[7] 現存楊輝的著作中，除了《詳解九章算法》（1261）是為了註解《九章算術》的算書以外，其餘尚有《日用算法》及《楊輝算法》二本，皆以解決民生問題所發展的實用民生數學及初等算學為主要的題材。其中《日用算法》（1262）僅殘存跋、序及日用斤秤數題。《楊輝算法》共分為三個部分：《乘除通變本末》（1274）、《田畝比類乘除捷法》（1275）以及《續古摘奇算法》（1275）。《乘除通變本末》共三卷。

[8] 《同文算指》是介紹歐洲筆算的第一部著作，該書是根據克拉維斯(Christopher Clavius，1537－1612，明末中譯名『丁先生』) 所著的《實用算術概論》（Epitome arithmeticae practicae，1583）、《算法統宗》等書，由利瑪竇與李之藻編譯而成。一書分為《前編》、《通編》、《別編》三部分。

> 凡積數若干，以平方面開之，適得自乘之數者，為開平方；其立方乃開平再乘積也，四面皆方中積滿布；三乘方，長立方也，如以二自乘起者，得兩立方也，以三自乘起者，得三立方之類，但以平面一邊之數為準；四乘方，平面立方也，如長立方得兩方數，則進作四立方。如長立方得三方數，則進作九立方。又如長立方係九方數，則進作八十一立方。之類倣此，以至無窮俱係平面；五乘方，大立方也，如係二自乘起者，有四立方，則進併八立方為大方。如係五自乘起者，有二十五立方，則進併一百二十五方為大方之類；自此推之，六乘方，視三乘形；七乘方，視四乘形；八乘方，視五乘形；餘乘倣此，可至無窮。[9]

《籌學本原》下卷詳列平方、立方、三乘方、四乘方係數的過程，至於，五乘方、六乘方、七乘方，依此方式，列出其係數，如六乘方的係數爲「（一）一、（二）七、（三）二十一、（四）三十五、（五）三十五、（六）二十一、（七）七、（八）一」。就是現代符號表示的二項式定理：




$$(a+x)^7 = a^7 + 7a^6x + 21a^5x^2 + 35a^4x^3 + 35a^3x^4 + 21a^2x^5 + 7ax^6 + x^7$$

其中「實」是（一）的常數項值，「方法」是指（二）的 x 項的係數值，「廉法」是指（三）～（七）的係數，「隅法」是指（八）（第八項）的係數值。

【圖片 15】:《籌學本原》的乘方之係數，書中最高到七乘方（即 8 次方）

又如，七乘方的係數爲「（一）一、（二）八、（三）二十八、（四）五十六、（五）七十、（六）五十六、（七）二十八、（八）八、（九）」。就是現代符號表示的二項式定理：

$$(a+x)^8 = a^8 + 8a^7x + 28a^6x^2 + 56a^5x^3 + 70a^4x^4 + 56a^3x^5 + 28a^2x^6 + 8ax^7 + x^8$$

其中「實」是（一）的常數項值，「方法」是指（二）的 x 項的係數值，「廉法」

參考陳敏皓，《同文算指》之研究，（國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2002 年）

[9] 參見《同文算指》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第四分冊(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 4-255；金容雲，《韓國科學技術史資料大系-數學篇 3》韓國驪江出版社，頁 281。

是指（三）～（八）的係數，「隅法」是指（九）（第九項）的係數值，所以，可以利用「開方作法本源圖」的係數解方程的。

要解「$x^4 = 20151121$」，即設 $x = a_1 + a_2$，

考慮：$20151121 - (a_1 + a_2)^4$

$$= 20151121 - ({a_1}^4 + 4{a_1}^3 a_2 + 6{a_1}^2{a_2}^2 + 4a_1{a_2}^3 + {a_2}^4)，$$

初商 $a_1 = 60$，

$$\therefore 原式 = 20121121 - 60^4 - (4\times 60^3 + 6\times 60^2 \times a_2 + 4\times 60\times {a_2}^2 + {a_2}^3)\times a_2$$

$$= 7191121 - (4\times 60^3 + 6\times 60^2 \times a_2 + 4\times 60\times {a_2}^2 + {a_2}^3)\times a_2$$

次商 $a_2 = 7$，$\therefore$ 原式 $= 7191121 - (4\times 60^3 + 6\times 60^2\times 7 + 4\times 60\times 7^2 + 7^3)\times 7$

$$= 7191121 - (864000 + 151200 + 11760 + 343)\times 7$$

$$= 7191121 - 1027313\times 7$$

$$= 7191121 - 7191121$$

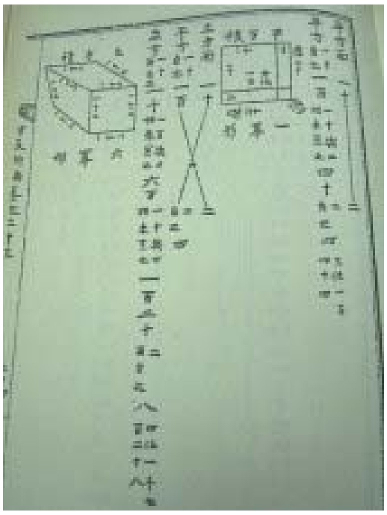
$$= 0$$

其實也可以視爲「$\sqrt{\sqrt{20151121}}$」，即「$\sqrt{4489}$」，於是，開三乘方的問題也就變成開平方了。

朴繘還畫出「諸乘維互圖」，以檢視證明，並說明平方、立方、三乘方、四乘方的方廉乘數。我們了解到朴繘本人對天元術見解相當高。他在初等數學的範疇內，它所給出的方法都具備了現代意義，這也就是說，只須換個形式，它的內容就可立刻納入現代數學的一部份了。

在「開諸乘方」篇，以開平方**「凡積數若干，以平面開之，適得自乘之數者，為開平方」**作爲出發點，條列諸乘方的開方說如下：

**「其立方乃開平再乘積也；三乘方，長立方也；四乘方，平面立方也；五乘方，大立方也；自此推之，六乘方，視三乘形；七乘方，視四乘形；八乘方，視五乘形，餘乘倣此，可至無窮。」**（圖示 16）



在「初商尋源圖」，表列 1 至 9 九數的「一乘（平方）數」、「再乘（立方）數」、「三乘方數」、「四乘方數」、「五乘方數」、「六乘方數」、「七乘方數」，以方便尋找初商。書中最高爲七乘方，即 8 次方，書中列出最高的爲 9 的 8 次方爲 43046721。

由次商用通率圖，通率的產生類似於“開方作法本源圖”，即爲（1）一乘：1、$\boxed{2}$、1；（2）再乘：1、$\boxed{3}$、$\boxed{3}$、1；（3）三乘：1、$\boxed{4}$、$\boxed{6}$、$\boxed{4}$、1；（4）四乘：1、$\boxed{5}$、$\boxed{10}$、$\boxed{10}$、$\boxed{5}$、1；（5）五乘： 1、$\boxed{6}$、、$\boxed{15}$、$\boxed{20}$、$\boxed{15}$、$\boxed{6}$、1；（6）六乘：1、$\boxed{7}$、$\boxed{21}$、$\boxed{35}$、$\boxed{35}$、$\boxed{21}$、$\boxed{7}$、1；（7）七乘：1、$\boxed{8}$、$\boxed{28}$、$\boxed{56}$、$\boxed{70}$、$\boxed{56}$、$\boxed{28}$、$\boxed{8}$、1，其餘乘方依此類推。以下就是次商用通率
圖：

| 乘方 | 一乘 | 再乘 | 三乘 | 四乘 | 五乘 |
|---|---|---|---|---|---|
| 通率 | 二○ | 三○○<br>三○ | 四○○○<br>六○○<br>四○ | 五○○○○<br>一○○○○<br>一○○○<br>五○ | 六○○○○○<br>一五○○○○<br>二○○○○<br>一五○○<br>六○ |

| 乘方 | 六乘 | 七乘 |
|---|---|---|
| 通率 | 七○○○○○○<br>二一○○○○○<br>三五○○○○<br>三五○○○<br>二一○○<br>七○ | 八○○○○○○○<br>二八○○○○○○<br>五六○○○○○<br>七○○○○○<br>五六○○○<br>二八○○<br>八○ |

諸式的解法是以「尋源母」求初商並以「通率」求次商，和現今的「直式開方法」是相同的，茲以“一乘方式”和“再乘方式”爲例說明，至於開三乘方至開七乘方，僅是通率不同，但是解題的架構是一致的，故不贅述。

一乘方式（即平方）術：[10]

> 實六百七十六萬五千二百空一，初商二為方法，以求廉法，立二空為通率，列中位，列方法於左位以相乘，得四十，以較餘實之首二七，約得六之一（二段二七六作二百七十六是二百七十內有六回四十也），乃立六為廉法，列於右位，自乘得三十六為隅法，附列，乃以廉法六乘四十，得二百四十，并隅法三十六，共二百七十六，盡第二段。餘實五二〇一，并廉入方為二十六，列左，乘通率二十，得五百二十，以較餘實，得一，又以一為廉法，列右自

[10]參見朴緕，《籌學本原》，頁 293。

乘，仍是一為隅法，共五二一，而實不足減，乃作五千二百〇一，盡第四段，商得二六〇一。

今解：

（1）實＝6765201，方法＝2，截取 676，

676－400＝276。

（2）通率＝20，方法×通率＝2×20＝40，

以 276÷40 估廉法爲 6，得隅法＝$6^2$＝36，

∴276－6×40－36＝0。

（3）餘實＝5201，併廉入方得 26，26×20＝520，截取 52，

實不足減，得廉法爲 0。

（4）截取 5201，併廉入方得 260，260×20＝5200，估廉法爲 1，得隅法＝1×1＝1，

∴5201－1×5200－1＝0。故 $\sqrt{6765201} = 2601$。

【圖片 17】:《籌學本原》中，三乘方之術

不論是在開平方或開立方的問題上，作者都選擇以面體積問題爲主，利用正方形面積求得邊長與正整數開平方一致，在《籌學本原》的「諸乘維互圖」篇，以平方積以一冪形，立方積以六冪形，可以看出作者別具用心，以幾何來做解釋開乘方的圖形，詳細的列出初商尋原圖、次商用通率圖、一分爲隅以上加因法表、之分爲隅以上加因法表，不僅能使出學者一目了然，體會作者朴緖的治學精神實爲扎實。

## 5－1－2「一分為隅以上加因法」和「之分為隅加因法」

朴緖在二項式展開後，適時利用例題說明天元術的解法。他處理天元術的解法，下卷的每一個例題都適用此法，他在說明時，著重的是以天元式（二項）的自乘、3 乘、4 乘……計算法。本節以此註腳爲首：「此法雖簡捷，亦有不得通行處，但以鋪地錦御之，則必井井無不通矣後倣此。」[11]

現在我們看朴緖如何解釋「一分爲隅以上加因法」與「之分爲隅加因法」中的「隅」字，此隅以通稱：廉隅言之。方曰：平廉、方廉；廉曰：長廉、下廉；

[11] Gelosia 葡萄牙語裡，這個字是窗口的遮蔽物、窗簾或者活動百葉窗的意思。Gelosia Method 指的就是運用畫方格圖，並且在每一方格中畫上對角線以進行乘法運算的方法。阿拉伯語稱此方法爲 shabacah ；十六世紀末的中國，則稱爲『鋪地錦』，此方法可能源自於印度或阿拉伯，並由印度傳到中國、阿拉伯傳到義大利。HPM 通訊第四卷十二期，台師大數學研究所碩士班楊瓊茹，GELOSIA METHOD—從阿拉伯出發。

**隅曰：小隅。**[12]和前一節相同，就是利用增乘開方法，來說明「實」、「方法」、「廉法」、「隅法」的乘數，可分為長廉、平廉、方廉、上廉、中廉、下廉，為二項式展開之各項係數值。[13]但是，這兩節論述的是二項式（a＋kx）$^n$ 各項的係數，所謂「一分為隅以上加因法」，是用 k 為整數時，所謂「之分為隅加因法」，是用在 k 為分數時，例如：以六分立方（k＝6，n＝3）來說，第一位為「再自之」((一))，第二位為「又十八之」((二) 18)，第三位為「一百空八之」((三) 108)，第四位為「再自之」((四) 216)，[14]此方程式為：

$$(a+6x)^3=a^3+18a^2x+108ax^2+216x^3$$

【圖片 18】:《籌學本原》中，一分為隅加因法

若以八分三乘方（k＝8，n＝4）來說，
第一位為「三自之」((一))，
第二位為「又三十二之」((二) 32)，
第三位為「三百八十四之」((三) 384)，
第四位為「二千空四十八之」((四) 2048)，
第五位為「三自之」((五) 4096)，[15]此方程式為：

$$(a+8x)^4=a^4+32a^3x+384a^2x^2+248ax^3+4096x^4$$

現舉一例為「之分為隅加因法」第三問：[16]（圖片 19）

**今有四段，共積七十尺二十八分尺之一，只云，古周過古徑一尺，而為平方面四分之三，密徑八分之三，問各為幾何？答曰：古徑二尺、古周三尺、平方面四尺、密徑八尺、各八十四段。**

今解：立天元一為古徑，設古徑為 x，古周為 x＋1，平方面為 $\dfrac{4(x+1)}{3}$ ，密徑為 $\dfrac{8(x+1)}{3}$

滿足條件式

[12]參見朴緖《籌學本原》，金容雲，《韓國科學技術史資料大系-數學篇 3》韓國：驪江出版社，頁 295。
[13] 參見本論文 4.2 節
[14]參見朴緖《籌學本原》，金容雲，《韓國科學技術史資料大系-數學篇 3》韓國：驪江出版社，頁 299。
[15]同上，頁 300。
[16] 參見術文中「之分取用法」第三問，《算學本源》，頁 312。

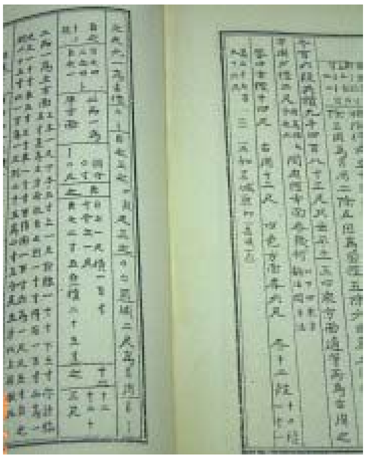
$$\frac{3x^2}{4}+\frac{(x+1)^2}{12}+(\frac{4(x+1)}{3})^2+\frac{(\frac{8(x+1)}{3})^2}{4}\times\frac{22}{7}$$

$=70\frac{1}{28}$ 。[17]

得解：古徑 $x=2$ 尺，古周 $x+1=3$ 尺，
平方一面＝4 尺，密徑＝8 尺。

又如，術文「之分取用法」第八問：[18]

今有六段，共積九千四百八十三尺，只云，平立三四乘方面適等，而為古周少徑二尺，問周徑方面各為幾何？



【圖片 20】:「之分取用法」第八問

答曰：古徑十四尺、古周十二尺、四色方面各六尺、各十二段。

今解：立天元一爲古徑，設古徑爲 $x$，古周爲 $x-2$

，平立三四五乘方面皆爲 $\frac{x-2}{2}$

滿足條件式

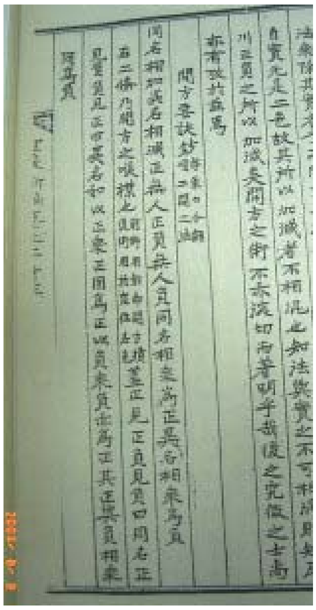
$$\frac{3x^2}{4}+\frac{(x-2)^2}{12}+(\frac{x-2}{2})^2+(\frac{x-2}{2})^3+(\frac{x-2}{2})^3+(\frac{x-2}{2})^3=9483$$

得解：古徑 $x=14$ 尺，古周 $x-2=12$ 尺，四色方面皆爲 6 尺。

在詳加說明二項式累乘計算之後，朴緖也考察有關天元式的各項係數的正負符號。因此在此題答案之後，「（一）（二）加（三）減（四）加（五）減（六）」說明的地方正是符合，自平方至四乘方，其命置呼除之術，皆順開而非翻開也，蓋順開皆順加而無減，翻開則或加或減，一翻一順要在自究其妙夫，算至開方微矣，開方之術至天元一，尤微而無以加矣。[19]

[17] 見朴緖《籌學本原》，頁 275。
[18]見術文中「之分取用法」第八問，朴緖《算學本源》，頁 318。
[19] 同上，頁 279。

在〈開方要訣鈔〉合翻順二開之法，[20]同名相加，異名相減，正無入正，負無入負，同名相乘爲正，異名相乘爲負。（圖片 21：開方要訣鈔）

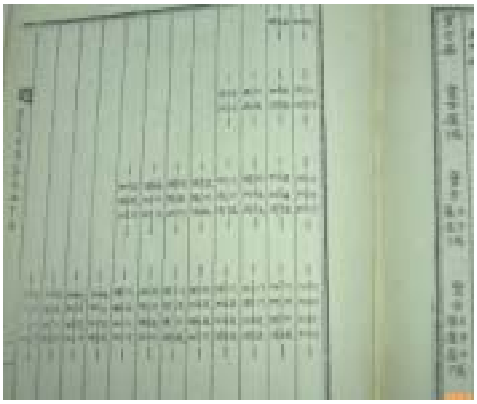


右二條乃開方之喉襟也，前術用於，命開方積，後術用於，定位名色。蓋正見正，負見負，曰同名正見負，負見正，曰異名，如以正乘正，固為正，以負乘負，亦為正，其正與負相乘，同為負。

朴縭在〈開方要訣鈔〉中，[21]要說明的是「同名相加，異名相減」。正無入爲正，負無入爲負（以上，加法）。記述同名相乘爲正，異名相乘爲負，同名是指同符號，異名是指符號相異，同名相加是指相同符號相加，爲絕對值相加，無人是指零的意思，異名相乘爲負，是指不同符號相乘爲負。

在一分爲隅以上加因法與之分爲隅加因法的題目，朴縭在每一題目後，都加上：「（一）（二）加（三）減（四）加（五）減（六）」，的說明與提示，這顯示他獨特之處，書中說所謂順開法、翻開法（反川法）：[22]

凡順開法，有諸位可相併者，併之，命商問之，而已元無各段相與消減處。惟翻開法，列置各段算位，審其正負，使其正消負，然後乃以寄左，又已或元積數，或別的數，隨其自然所值者，與寄左相消相長，訖使乃命商開方，而自下而上，以次漸升，至於實積之位而止，於其中，亦自有各正負， 各消長，熟觀可知也。[23]



【圖片 22】：朴縭的反川法[24]

[20] 參見本論文前一節的說明，及金容雲，《韓國科學技術史資料大系-數學篇 3》韓國：驪江出版社，頁 320、及 336-339。
[21] 出自朱世傑，《算學啓蒙》卷首篇，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍彙編》數學卷第一分冊，鄭州：河南教育出版社，1993 年。
[22]此處所的「翻」指的是正翻爲負，參考金容雲，《韓國科學技術史資料大系-數學篇 3》，漢城：驪江出版社，1985 年，頁 320、336。
[23]金容雲，《韓國科學技術史資料大系-數學篇 3》，漢城：驪江出版社，1985 年，頁 338。
[24] 同上，頁 337。

作者以《算學啓蒙》的〈開方釋鎖門〉爲藍本，合計七題，題源如下：

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 《籌學本原》〈天元一術〉 | 第一問 | 第二問 | 第三問 | 第四問 | 第五問 | 第六問 | 第七問 | 第八問 | 第九問 | 第十問 |
| 《算學啟蒙》〈開方釋鎖門〉 | 第一問 | 第二問 | 第三問 | 第四問 | 第五問 | 第十七問 | 第十八問 | 第十四問 | 第十五問 | 第十六問 |

因此，朴繘對於開方法的看法，在這節一開始就已經做了說明，而透過〈開方法〉問題的解法，更能強化作者意圖對開方法予以簡化的企圖，並用傳統的開平方法與開立方法來處理。在這些問題中，所有的問題都僅只於三次方程，並沒有超過三次的高次方程問題。除了開平方與開立方之外，作者也針對題目的特徵在解法上做了補充說明：（1）如果題目給定的條件是積與和要求廣，可以利用帶縱益隅開方法或帶縱負隅減縱開方法二種方法。（2）如果題目給定的條件是積與和要求長，可以用帶縱負隅減縱翻法。（3）如果題目給定的條件是積與較要求廣，可以用帶縱開方法或減積開方法二種方法。（4）如果題目給定的條件是積與較要求長，可以用負縱益積開方法或帶減縱開方法二種方法。

平方積較求闊的解法有二：一爲「帶縱開平方」，二爲「減積開平方」。中國古籍許多「舊法」的二次方程皆爲 $ax^2+bx=c$（其中 $|a|+|b|\neq 0, c>0$），a、b、c 一般分別稱爲廉（長或隅）、從法、實。當 a＞0，b＞0 時，a、b 一般稱爲常法、從；當 a＜0，b＜0 時，a 一般稱爲虛常法，b 一般稱爲益從或虛從。

平方積較求長的解法有二：一爲「負縱益積開平方」，二爲「帶減縱開平方」。每類型各舉一例說明如下。

負縱益積開平方法和 「帶減縱開平方法」，所用的方法就是楊輝《田畝比類乘除捷法》中引劉益《議古根源》的術曰：「若不益積，便用減縱，或有不可益積者，須用減縱之術。」其中「益積術」又稱「益隅術」，也就是當二次方程 $ax^2+bx=c$ 中的 a，b 爲一正一負時，可以將一次項移至常數項，可使「實」增加，就是「益積法」；如果不將一次項移至常數項，而直接運算得解，就是「減縱法」。[25]

[25] 參考陳敏晧《同文算指之內容分析》（國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2002

平方積和求闊的解法有二：一爲「帶縱益隅開平方」，二爲「帶縱負隅減縱開平方」。每類型各舉一例說明如下。

平方積和求長的解法爲「帶縱負隅減縱翻法開平方」。而「翻積法」是劉益首先使用的開方法。在開方過程中，常數項由正數變爲負數，這時便稱爲「翻積」。

朴繘在「天元一術補遺」篇中：「按天元一，算法位定數併審為何般方，然後乃寄左方，又以元積數，或別數，隨其自然相值者，與寄左相消息，寄左數多於彼，則彼來減，此為順減為正，寄左數少於彼，則此反減彼，為翻減為負，本負則與彼，相併同為負。」，朴繘爲新定率啓蒙的開方法，由此可見，他爲天元術由中國到朝鮮開闢一條新生命。[26]

最後我們來看，東算與中算學者，對天元術的看法，中國元朝李銳（1768-1817年）：[27]

天元如積之學，盛於元，亡於明，而複顯於本朝。梅文穆公赤水遺珍天元一即借根方解，發三百年來算家之蒙、可謂有功矣！惟立天元術相消與借根方兩邊加減，實有不同。文穆於此，似猶未達其旨。蓋相消之法大略與方程直除相似。但以右行對減左行，或以左行對減右行 故曰相消。西人易為加減，雖得數不殊，究不如古法之簡且易也。

清梅瑴成（1681－1763年）：[28]

先借根方法，原名東來法，今名乃譯書者就其法而質言之也，根者綫也，面之界也，體之楞也，凡布算先借一根為所求之物，與借衰略相似，借根而并言方者，初入算雖只借根，但根乘根則成平方，根乘平方則成立方，以及屢乘至多乘方，俱所必用，故名之曰借根方法也。

李尙爀《借根方蒙求》在該書自序中有如下的說明：[29]

借根方，泰西算術也。本名阿爾熱八達，譯云：「東來法，則中國之立天元

---

年），頁116。

26.參見朴繘，《籌學本原》頁349。

27 李銳，又名向，字尙之，號四香，中國人江蘇人。他的著作有《測圓海鏡細草》、《勾股算術細草》、《方程新術草》、《弧矢算術細草》、《開方說》。

28清梅瑴成（1681－1763年），《赤水遺珍》解借根方法。

29李尙爀，又名尙赫，字志叟，陝川人，生於純祖十年(1810)，卒年不詳。他的算學著述：《借根方蒙求》(1854)、《算術管見》(1855)、《翼算》(1868)。

一法耳。」夫天元一，中國之法也，以唐荊川、[30]顧箬溪之巨儒，[31]尚不能知其術焉，[32]曁得借根方法以算《測圓(海鏡)》、《益古(演段)》、《授時麻艸》等書，無不通釋吻合，此豈非失諸朝而求諸野者乎？我東於叀綴之學，甚疎其能，知有是術者，惟賴《律麻淵源》一書。[33]以我輩不能數一二，得知唐、顧所不知，豈不大幸也哉！苟欲使是術傳久垂永，要在布廣是書，俾學者轉相肄習，而原編備載各部卷帙甚大，有難家庋戶弆，[34]又原書過於詳核，覽者反有支離之慮。故今以本法算線、面、體諸部，若干条另為一部，且畧其句讀，令初學便覽而易知，以公同好云爾。歲在閼逢攝提格仲呂之月志叟自序。[35]

朝鮮十九世紀南秉吉的《無異解》序：[36]

古立天元一術，即今之借根方法也，借根方法也嘉慶間元和李銳算校《測圓海鏡》、《益古演段》，其案云：借根方出於立天元術，其加減乘除之法並同，惟此相消去法，與借根方兩邊加減則有異，此說甚惑矣，蓋立天元術，則相消去後，歸之一行，而正負相當，借根方法則加減後，仍分兩邊，而彼此相等，此特殊一行與兩邊也，且彼此正負，因主客而變，互相往來，方程篇所謂，此正則彼負彼正，則此負是也，故分之為彼此相等之兩邊，即併之，為

30 唐順之(1507~1560)，字應德，號荊川，武進人。參閱王連發，《明代顧應祥之研究》(台北：國立台灣師範大學數學系教學碩士班碩士論文，2002 年)，頁 26~27。

31 顧應祥(1483~1505)，字惟賢，號箬溪或箬溪道人，湖州長興人。其生平參閱王連發，《明代顧應祥之研究》，頁 17~27。

32 元中葉與明朝，中國古典數學急劇衰落，不僅沒有再出現可與《數書九章》、《四元玉鑑》等媲美的數學巨著，而且，宋元數學的傑出創造如增乘開方法與天元術、四元術亦無人通曉。明朝所有的著作，都恢復了賈憲以前的開方法。像顧應祥、唐順之那樣的明朝大數學家，卻全然不懂天元術。例如顧應祥在《測圓海鏡分類釋術》自序：「……晚得荊州唐太史所錄《測圓海鏡》一書，乃元翰林學士欒城李公冶所著。雖專主於求容圓容方一術，……凡所謂以積求形者，皆盡之矣。但其每條下細草，雖徑立天元一，反覆合之，而無下手之術，使後學之士茫然無門路之可入。輒不自揆，每章去其細草，立一算術，又以其所立通勾邊股之屬，各以類分之，語義稍繁者，略如芟損，名曰《測圓海鏡分類釋術》。非敢僭改前賢著述，惟以便下學云爾。」說明了寫書的目的，同時也說明顧應祥已無法理解天元術，故刪去有關天元術的內容。參閱郭書春，〈中國科學技術典籍通彙敘〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》數學卷第一分冊(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 1~26；馬翔，〈《測圓海鏡分類釋術》提要〉，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍彙編》數學卷第二分冊(鄭州：河南教育出版社，1993 年)，頁 993；王連發，《明代顧應祥之研究》，頁 71~73。

33 經筆者仔細核對後，應是《數理精蘊》一書，不過，亦有可能是作者的總稱。

34 「庋」音「ㄐㄧˇ」，意爲「收藏」;「弆」音「ㄐㄩˇ」，意爲「密藏」。故「有難家庋戶弆」爲「不方便收藏」之意。參閱教育部重編國語辭典編輯委員會編，《重編國語辭典》第三冊，台北：臺灣商務印書館，1981 年。

35 引李尚爀，〈《借根方蒙求》序〉，收入金容雲編，《韓國科學技術史資料大系‧數學篇(4)》(漢城：驪江出版社，1985 年)，頁 349~350。

36 南秉吉(1820~1869)，字元裳，號六一齋，晚香齋，亦名相吉。他的算學著述：《無異解》(1855)、《測量圖解》(1858)、《算學正義》(1867)、《勾股述要圖解》、《九章術解》、《緝古演段》與《玉鏡細草詳解》。《無異解》甚至於被史家推許爲韓國數學史上的第一篇數學論文，其內容是論述「借根方」與「天元術」是相同的。

正負相當之一行也，表裡錯綜間，何有異哉，夫相消去簡而不言肯綮，加減法論詳，而名便條理縱有詳曰，理則一貫也。[37]

當天元術在中國漸漸衰亡時，朝鮮人卻在學習中國的這一先進數學成果，因此，朴緣的《籌學本原》中算題進行詳細的解題，出版時是否引起朝鮮數學界的重視，限於手邊的資料，我們不得而知。但是，由朴緣的註解中反映了朝鮮當時的算學研究受到中算影響，《籌學本原》為什麼能在當時的社會產生？又反過來對社會產生了什麼影響？這些問題是值得進一步探討的。而更細緻的歷史圖象，則仍又待更多的研究去還原。

又在李朝以前的方程理論一直受幾何思維束縛，如常數項只能為正，因為常數項通常是表示面積，體積等幾何量的，方程次數不高於三次，因為高於三次的方程就難於找到幾何解釋了。天元術的產生，標誌著方程理論有了獨立於幾何的傾向；作者對於天元術的總結與提高，則使方程理論基本上擺脫了幾何思維的束縛，實現了程序化。隨著數學思想的突破，作者在方程理論上取得許多進展。例如：作者在書中改變了傳統的把實看做正數觀念，常數項可正可負，而不再拘泥於他的幾何意義。作者根據題目需要，多次用天元術列出高次方程來解題。

## 5－3 衰分

《籌學本原》在天元術解釋中，朴緣最引人注目還是將衰分法（比例尺的計算），與方程題（三元一次聯立方程式），列入天元術的範疇，來論述「立天元一」的解法。在當時朝鮮傳統數學界，朴緣利用天元術來解釋高次方程式，與一次方程式等問題。令人驚嘆的是有些本來不必用天元術的問題，他卻大膽用「開天元一」來解釋天元的意思。這不僅是在當時著重傳統算術的東亞是首例，[38]同時利用『天元一術』，在數理解題過程上，是可以減低不必要的誤解與爭論。所謂的「天元一術」，是用未知數的記號來解題。朴緣數理的解釋竟然可以完全無誤，因此更能提供初學者，在理解天元的意思上，以及在解高次方程方面有開平方、立方、及解一般的二次方程式，提供學習者更多更高明的說明技巧。因此我們可知，藉由朴緣對天元解釋，證明朴緣本人對天元術的理解程度是相當高的。以衰分為例，我們看到朴緣詳細的敘述，每一步驟都加以解說與鋪陳，介紹衰分和返衰的概念以及其後的解題，只要按照他的敘述，按部就班就可以把衰分清楚明瞭了。由此可說，朝

[37]參閱洪萬生，〈《無異解》中的三個初探：一個 HPM 的觀點〉，《科學教育學刊》第八卷第三期（2000 年），頁 217。

[38] 十五世紀在朝鮮的史料中，算學家朴緣應該是朝鮮使用天元術且精通天元的第一人，參考朝鮮學報，第百六十九輯，川原秀城：〈東算と天元術---十七世紀中期至十八世紀初期の的朝鮮數學〉。

鮮的朴繘不僅擁有豐富的算學，更是一位諄諄教誨的夫子：

> 此門雖非開方之術，而亦同天元一，故附見焉然。而天元一法立一者，所以為正負隅法。而已本文所列，何干於隅法，若以立一，稱為一分，以著衰分之分，則相當矣。[39]

衰分，以御貴賤稟稅。李朝之際是按爵次進行的所謂等級分配的一種制度。相當於現今的「按比例分配」算法。[40]衰分是古代數學中一種特殊的比率算法，衰分就是按照一定標準遞減分配，就是用比率方法來處理應用的問題，所謂「衰分」就是「差分」,「衰分」與均分相反，衰分就是有差別的分配。衰分術的關鍵，是在確定列衰，“相與率也。重疊，則可約。”[41]說明按衰分術入算的各列衰，是一組相通的比率，而且應當化約爲不含公因式的最簡形式。在本卷中，由兩個數組成的比率，拓展爲多個數的「列衰」。從正比的衰分，演化爲反比的「返衰」。

在《九章算術》中稱爲「今有術」，並給出一般法則：「以所有數乘所求率為實，以所有率為法，實如法而一」，即以比例式「所求數：所有數＝所求率：所有率」來解題。「率」在中算中扮演著極重要的角色，李淳風於《隋書．律曆志》「備數篇」就提及：

> 事物糅見，御之以率，則不乖其本。故隱憂之情，精微之變，可得綜也。夫所謂率者，有九流焉：一曰方田，以御田疇界域；二曰粟米，以御交質變易；三曰衰分，以御貴賤稟稅；四曰少廣，以御積冪方圓，五曰商功，以御功程積實；六曰均輸，以御遠近勞費；七曰盈朒 ，以御引雜互見；八曰方程，以御錯糅正負；九曰勾股，以御高深廣遠。皆乘以散之，除以聚之，齊同以通之，今有以貫之，則數之方，盡于斯矣。

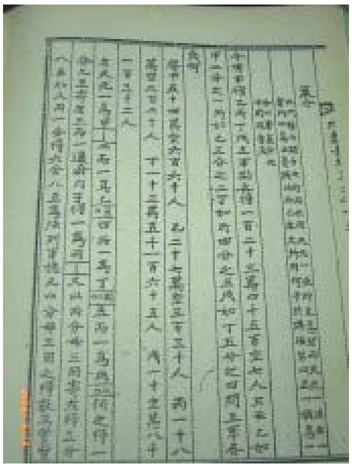
在《九章算術》所謂的衰分就是現代所謂的配分法。[42]衰分術曰：各置列衰（所配的比率），副併（得所配比率的和）為法，以所分乘未併者各自為實，實如法而一。劉徽註說：列衰各為所率，副併（所得的和）為所有率，所分為所有數。用“今有術”計算，[43]就可以得到各所求數。

舉例《籌學本原》衰分章第一問：[44]

---

[39]參閱金容雲，《韓國科學技術史資料大系．數學篇(3)》，韓國：驪江出版社，頁 340。
[40]劉徽在「衰分術」的注釋中提到三層意思：第一是說明衰分式中「法」與「衰」的關係。其二是說明衰分與今有兩術之關係。其三是說明衰分與均分之關係。
[41] 出自《九章算術》第三章衰分篇。
[42] 參閱李儼、錢寶琮，《科學史全集》第 2 卷，遼寧教育出版社，頁 517。
[43] 今有術，是傳統數學中最基本的比率算法，相當於現代數學中四項比例算法。參考曲京安，《中國科學技術史綱．數學篇》，遼寧教育出版社，頁 193。
[44] 同註 2，頁 340。

今有甲領乙丙丁戊五軍，點兵得一百二十三萬四千五百空七人，只云：乙如甲二分之一，丙如乙三分之二，丁如丙四分之三，戊如丁五分之四，問五軍各幾何？答：甲五十四萬六百六十人、乙二十七萬空三百三十人、丙一十八萬空二百二十人、丁一十三萬五千一百六十五人、戊一十空萬八千一百三十二人。



【圖片 23】：衰分第一問

術曰：立天元一爲甲。

依照甲、乙、丙、丁、戊五軍互相之比率爲

甲：乙：丙：丁：戊＝1：$\frac{1}{2}$：$\frac{1}{3}$：$\frac{1}{4}$：$\frac{1}{5}$＝60：30：20：15：12

就用 60、30、20、15、12 各爲所求率，再將整數比加起來 60＋30＋20＋15＋12＝137 爲所有率，而總兵數爲 1234507 人爲所有數。以「今有術」演算得甲軍爲 $\frac{1234507}{137}\times 60=540660$，乙軍爲 $\frac{1234507}{137}\times 30=270330$，丙軍爲 $\frac{1234507}{137}\times 20=180220$，丁軍爲 $\frac{1234507}{137}\times 15=135165$，戊軍爲 $\frac{1234507}{137}\times 12=108132$。今解爲，總兵數 1234507÷137 等分＝9011 人，最後將 9011，分別乘上甲、乙、丙、丁、戊所屬的 60、30、20、15、12 等分，即爲所求得。

不同的情境可以看到不同的分類方式，打戰時則將不同的國家劃分爲甲、乙、丙、丁、戊五國，點兵時又將百姓分爲甲、乙、丙、丁、戊五軍隊，另一則買布問題，分爲青、黃、紅、白、黑五種顏色等，分配的方式皆同上例所示。從這裡不難體會出朴繘在佈題上的用心，結合當時朝鮮社會現象適當的納入題目中，以使用讀者隨時能進入算題的情境，且迅速解決生活的應變。

又見，《籌學本原》衰分章第二問：[45]

[45] 同上，頁 341。

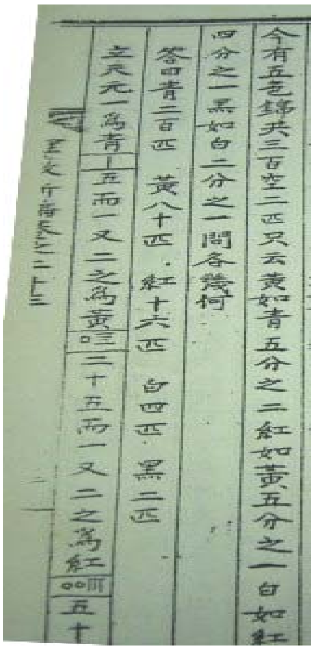
今有五色錦，共有三百空二匹，只云：黃如青五分之二，紅如黃五分之一，白如紅四分之一，黑如白二分之一，問各幾何？答曰：青兩百匹、黃八十匹、紅十六匹、白四匹、黑二匹。

術曰：立天元一爲青

依照青、黃、紅、白、黑互相之比率爲

青：黃：紅：白：黑＝1：$\frac{2}{5}$：$\frac{2}{25}$：$\frac{1}{50}$：$\frac{1}{100}$

＝100：40：8：2：1


今有五色錦共三百空二匹只云黃如青五分之二紅如黃五分之一白如紅
四分之一黑如白二分之一問各幾何
答曰青二百匹 黃八十匹 紅十六匹 白四匹 黑二匹
立天元一爲青 五而一又二之爲黃 三十五而一又二之爲紅 五十

【圖片 24】：衰分第二問

就用 100、40、8、2、1 各爲所求率，再將整數比加起來 100＋40＋8＋2＋1＝151 爲所有率，而總匹數爲 302 匹爲所有數。以“今有術”演算得青爲 $\frac{302}{151}\times 100=200$，黃爲 $\frac{302}{151}\times 40=80$，紅爲 $\frac{302}{151}\times 8=16$，白爲 $\frac{302}{151}\times 2=4$，黑爲 $\frac{302}{151}\times 1=2$

今解爲，五色錦爲 302÷151 等分＝2 匹，最後將 2，分別乘上青、黃、紅、白、黑所屬的 100、40、8、2、1 等分，即爲所求得。

所謂《九章算術》所載的衰分術是稱「各置列衰，副並爲法，已所分分乘未並者各自爲實，實如法而一。不滿法者，已法命之。」在九章算術「衰分章」中，常可見「此術今有之義」的注。「衰分」本質上仍是今有之術，[46]只不過更爲複雜。所謂的「今有術」實際上就是現今所謂的「四項比例算法」。這種算法，在古代印度稱之爲「三率法」，此法從印度傳入阿拉伯回教國家，再由阿拉伯人傳到西歐各國，仍舊保持三率法的名義。因此，在《同文算指》通編卷一出現了三率準測法第一：

> 數有顯隱必賴顯以徵隱，故列前三率求後一率。先定三率之位，大都取其相準，如貨準、貨錢、準錢之類。凡第三率必與第二率相乘，而以第一率除之，因得第四率為所求。舊名異乘同除。

[46] 朱世傑《算學啓蒙》和程大位《算法統宗》中的「異乘同除法」都是今又術。同註 6。

在《籌學本原》衰分章第四問：

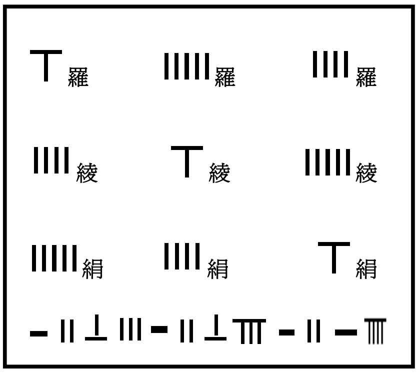
今有羅四尺，綾五尺，絹六尺，直錢一貫兩百一十九文，羅五尺，綾六尺，絹四尺，直錢一貫兩百六十八文，羅六尺，綾四尺，絹五尺，直錢一貫兩百六十三文，問羅綾絹尺價各幾何？[47]

【圖片 25】：衰分第四問「術曰、依圖、布算」

在解題過程中，首先僅列出一個籌式如右：

這相當於解方程組 $\begin{cases} 4x+5y+6z=1219......(1) \\ 5x+6y+4z=1268......(2) \\ 6x+4y+5z=1263......(3) \end{cases}$

其中羅尺價 $x$ ，綾尺價 $y$ ，絹尺價 $z$




【圖片 26】：衰分第四問籌式

(2)-(1)，得

$$x+y-2z=49……(4)$$

(3)-(1)，得

$$2x-y-z=44…….(5)$$

(1)-4×(4)，得

$$y+14z=1023….(6)$$

2×(1)-4×(5)，得

$$14y+16z=2262..(7)$$

這便消掉了一個未知數用(7)直減(6)，便可求得 $z$ 值。

[47] 同註 2，頁 343。

藉由這卷衰分章節，由李朝十七世紀朴緖撰述《籌學本源》在卷中所採取的註解方式爲何，因此更加知道朝鮮東算家對於列衰的探討，在一定程度上也反映他們對於比例與率應有某種程度上的認識。朴緖使用他精通的立天元一，及前一節所論述的開方術方式，來解衰分的題目，從他只舉 4 個衰分的題目來看，或許作者只是想要將開方及天元一的算法，應用在一般的衰分上，這僅是筆者的猜測，但僅由整本的《籌學本源》來看，僅僅在衰分章節中出現少數的應用題目，不難看出朴緖的思想背景影響算學形而上的觀念很深。[48]

[48] 參見本論文第二章，朴緖的思想背景。