第貳章　文獻探討與理論基礎

第一節 文獻探討

一.課本教材

首先，我們先對國小到高中課本中所提到角的部分做分析，以瞭解學生所具有角的先備知識，及在高中所要學的部分；並比較兩者關聯部分及差異的部分，以作爲教學單元設計的根據。

在小學課本中，藉由觀察時鐘分針的轉法告訴學生：「繞著一點的轉法就是一種旋轉」，旋轉開始時的位置就稱爲「始邊」，旋轉後的位置可稱爲「終邊」，旋轉時固定不變的點即稱爲「頂點」，而角就是旋轉程度，換言之，旋轉程度的大小叫做旋轉角度。在這裡用動態旋轉的方式告訴學生什麼是角，並告訴學生如何用量角器去測量角的大小，而角的度量單位是「度」。同時，也告訴學生兩個角相加所代表的幾何意義是什麼。所以，當一個小學的學生學完這個單元，他對角應是具備動態的概念心像，並會操弄角的代數及幾何表徵，但還是不知如何對角命名。

分析有關國中角的課本教材，發現教材重點在：藉由角的符號來進行一些非正式、正式的邏輯推演；其中伴隨大量角的度量及代數表徵。這與國小的課本教材有一個很大的差異：國小是以旋轉量來介紹角，想要讓學生對角有一個動態表徵，不著重角的符號化；國中藉由角的符號化，要訓練學生簡易的邏輯推演能力，而不注重動態表徵。而不管作者想傳授什麼觀點給學生，兩者的共同點就是：所介紹的角都是不具方向性，即在學生的觀念裡$\angle AOB = \angle BOA$，且學生雖然知道 360° 但那是很多角的和，單一個角學生還是會認爲應該介於$0^{\circ} \sim 180^{\circ}$。

等到高中一年級時，爲了介紹三角函數，課本再度提出角的概念；但有別於國中小所教的無向角，高中課本強調有向角的是一種旋轉量與其代數表徵。與小學課本採取同樣的策略：以旋轉的觀點來介紹角，角不再是兩射線所張的角度，而是從始邊到終邊的旋轉量。不同的是強調角是有方向性，以順時針爲負逆時針

爲正，且考慮到旋轉圈數的因素，所以角的大小不再是介於 0°～180°，角可以爲－280° 也可以是 3980°。而強調代數表徵的用意是：在三角函數中角度是當作函數的定義域中的元素，學生操弄角度以求出函數值。我們可以用以下圖表示出教授的內容：

(圖 2-1 小學、國中、高中角的教授內容)

小學

1. 角：旋轉程度
2. 單位：度
3. 測量方式：量角器
4. 比較兩角的方法：實際操作、測量
5. 未命名且無方向性、

⇩

國中

1.角：兩線所夾的大小
2.單位：度
3.測量方式：量角器
4.比較兩角的方法：實際操作、測量、平移(作圖)、證明
5.已命名但無方向性、
6.各種圖形中角的性質
7.介於 0°～180°，可以對角做代數運算

⇩

高中

1.角：始邊到終邊的旋轉量，需考慮方向、圈數
2.單位：度、弧度
3.測量方式：量角器(較不強調)
4.比較兩角的方法：實際操作、測量、平移(作圖)、證明、幾何圖形與代數關係的轉換
5.已命名且有方向性
6.不再介於 0°～180°，可以對角做代數運算
7.廣義角、有向角、同界角名稱及代數關係

從國小到國中我們給學生正角的概念，學生學習後會產生何種概念，這樣的概念對學生學習廣義角這個新觀念時會有什麼影響，我們可以從以下對學生所做的問卷看出端倪。

做這份問卷的時間是在高一下學期剛開學，目的是為了測驗學生對角、相似三角形、函數觀念、座標表示法、三角函數的先備知識，其中各概念所包含的題號如下：

相似三角形邊長比：1.(1)(2)、2.(1)(2)(3)、3.(1)(2)(3)(4)

角度觀念：5.(1)(2)(3)(4)(5)(6)

函數概念：4.(1)(2)(3)

座標表示法：6.(1)(2)

三角函數：1.(3)、2.(3)、3.(2)(3)(4)、6.(2)

而第 7 題的主要目的是：知道全班學過三角函數的比例。施測對象是 2 班學校未正式上過三角函數的高一學生及 2 班已學過三角函數的高二學生，施測時間 50 分鐘。施測內容及結果如附件三。

根據這份問卷，我們可觀察到以下幾點現象：

(表 2-1 高一、二前測結果分析)

現象	高一(83 人)	高二(92 人)
1.認為角不可以超過 360°	33%	46%
2.認為 270°是一直角的外角	34%	18%
3.認為一個角介於 0°～180°	28%	22%
4.對角的觀念是具有方向性	4%	23%
5.認為等腰三角形的邊長比為 1 : 1 : $\sqrt{2}$	10/%～13%	0～1%
6.認為非等腰的直角三角形邊長比為 3 : 4 : 5	14/%～18%	0～1%
7.不知道 30°、60°、90°的直角三角形的邊長比	13/%～17%	0

這顯示說明：

1. 雖然小學課本是用旋轉的概念來介紹角，但它並沒有強調方向性，再加上國中所教的角也不強調方向性，所以有 96%的高一學生對角的概念是不具有方向感的。其次有 33%的學生認為一個角不可以超過 360°，28%的學生認為一個角應介於 $0^\circ \sim 180^\circ$，這與我們日常生活中的經驗有關，也是我們在教授廣義角時必須注意的地方。
2. 其次，我們觀察高二學生問卷的結果發現：雖然高二學生已學過完整有向角的概念，但仍有 77%的學生對角是不具備方向性的，而且有 46%的學生不會用大於 360°的角來表示一個角。Lesley Booth(1981)提到：在數學上大多數的學童並不是在所謂”官方”(official)的系統中工作，而是在他們的系統中工作，通常只有非常少百分比的學生能成功達到教師所傳授正式數學的境界。而且 Vinner(1981)也說當我們對已有固定概念心像的學生重新給概念定義，結果有 3 種情形(1)概念心像被改變。(2)概念心像不變，概念定義接受教師所給的定義時，短暫地發生變化，但時間一久就變回根據概念心像所得的概念定義。(3)概念心像及概念定義均不變，只是在回答定義時採用教師教授的定義方式，但在其他情形下還是認為原來的定義。
3. 所以，我們在設計課程時就考慮(1)方向性的必須性：承接小學所學的時鐘旋轉的觀念及國中角的表示法，我們提出分針順時針轉、逆時針轉的具體情境，以突顯方向性的必須性。(2)角的範圍：利用分針轉一圈 360°的概念，如何紀錄分針如何轉 3 圈的具體情境，來讓學生體會角的範圍不只侷限於 $0^\circ \sim 360^\circ$。

二.問卷分析：

筆者曾對高二九位已學過三角函數的學生做一份問卷(附件一)，問卷的目的是為了解學生對廣義角、三角函數的概念心像及各種表徵的聯結方式，其中各概念所包含的題號如下：

廣義角：一.、四(1)(2)、

同界角：二.、五(A)(B)(C)(D)(E)

三角函數定義：三.、六(1)(2)(3)(4)(5)(6)、八、九、十二

三角函數値域的屬性：七(A)、(B)、(C)、(D)、九、十(1)(2)

三角函數部分與全體的概念：十一.(1)(2)

結果如附件一。

根據高中課本第二冊(南一版)，我們發現廣義角所包含的要素有始邊、終邊、旋轉方向、旋轉圈數、旋轉量，我們預期學生在第一題中應該要包含上述的名詞。結果九位學生中沒有人提到廣義角的概念定義，每個人都根據其概念心像來回答問題。其中雖然 4 個人有圖形表徵，但其中 3 人我們從他們的圖形中看不出來對角的概念是什麼。根據第四(1)的回答，有 4/9(44%)的受測學生受典範現象的影響，認爲第一象限的角必正；5/9(56%)的學生認爲一個角位於第四象限則此角必負的錯誤概念心像。只有 2/9(22%)的學生有正確角的概念，但再回頭觀察他們在第一題的回答，發現他們皆只是畫出如下圖的圖形，經過訪談發現他們也無法確實地用文字、符號描述出對廣義角的定義。也就是學生對廣義角只是停留在外貌，而會忽略圖形上旋轉方向、旋轉圈數、始邊、終邊所發出的訊息。同樣的研究發現也可見於黃純杏(2001)、施盈蘭(1994)。

再觀察學生對同界角的概念，我們發現雖然還是沒有一位學生用概念定義描述同界角，但是有 6/9(67%)的學生都描述出其代數表徵：$\theta+360^{\circ}n$。這可以有 2 個解釋理由：(1)這是學生新學的概念，沒有以前的概念來干擾 (2)在後面廣義角的三角函數時，我們會常用到其代數表徵。但在第五大題學生在判斷兩個角是否爲同界角時，我們可以分成兩方面來討論：(1)若兩個角都是已知的角如：50°、-670°，學生都能畫圖或代數運算求出答案。(2)若所討論的角含有未知的角如：$\theta+180^{\circ}$、$\theta-180^{\circ}$，學生會傾向用特別角代入，再用畫圖或代數運算來判斷。而這樣的做法告訴我們兩件事：(A)學生雖然知道同界角的代數表徵，此表徵只是用來回答定義上的問題，但因爲問題中含有未知數，所以學生感到不

確實，他無法掌握這樣的代數表徵，他一定要用特別角代入再來畫畫看，才能作出判決。也就是學生不能將符號、概念定義、圖形、代數表徵做聯結。(B)學生用特別角代入做判斷，這樣的做法表示學生並沒有完整的邏輯概念。David Tall 以下圖表是學生幾何概念的認知發展：

(圖 2-2：David Tall 學生幾何概念的認知發展圖)

形式(formal)的幾何	形式(formal)的、定義的物件 演繹的證明(deductive proof)
歐幾里得的幾何 (Euclidean geometry)	想像的、空想的物件(imagined platonic objects)， 歐幾里得的證明(Euclidean proof)
實際的幾何 (practical geometry)	描述真實世界的物件 (用階級制度 in hierarchies) 幾何的建構(constructions)
形狀 (shapes)	知覺的典範現象 (在分離的等級 in separate classes) 不用繪圖機器、徒手畫 (freehand drawing) 知覺(percepts)

我們發現學生還是停留在知覺的典範現象上，也就是學生認爲用一個特別角來判斷就可以了，而無法 $\alpha - \beta = 360^{\circ}n$ 來論述同界角這個概念，即學生無法達到歐基理德的證明的層次。

所以，根據問卷的結果，我們在課程設計上也強調由具體情境(語意表徵)轉換成代數表徵，代數表徵所代表的具體情境(語意表徵)聯結、及代數表徵的操弄。希望能提昇學生角這個幾何概念的認知發展。

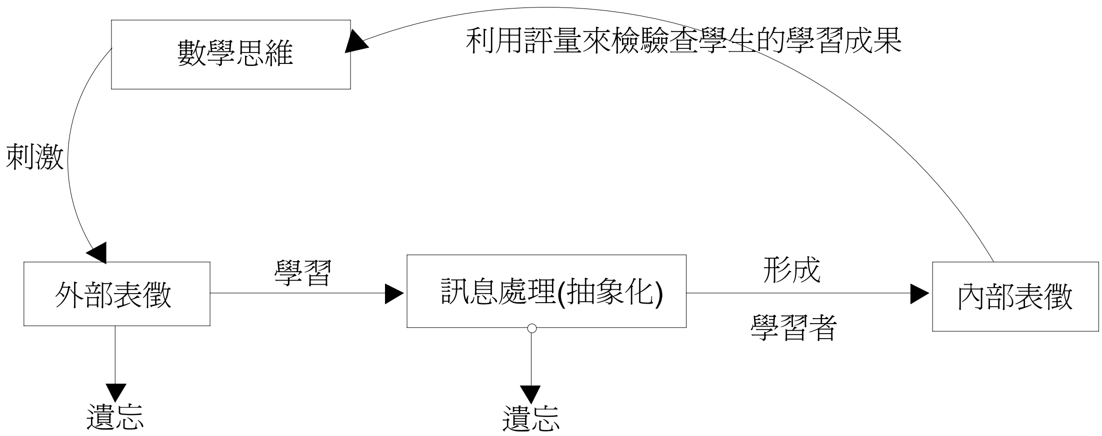
第二節：理論基礎

一.訊息處理模式：

(一) 數學學習過程的訊息處理模式

不同的學生也有不同的學習方式，對問題的表達方式也不盡相同，但我們仍可以用下圖來表示學生數學學習的訊息處理模式，以作為改進教學的參考。

(圖 2-3 數學學習處理模式)



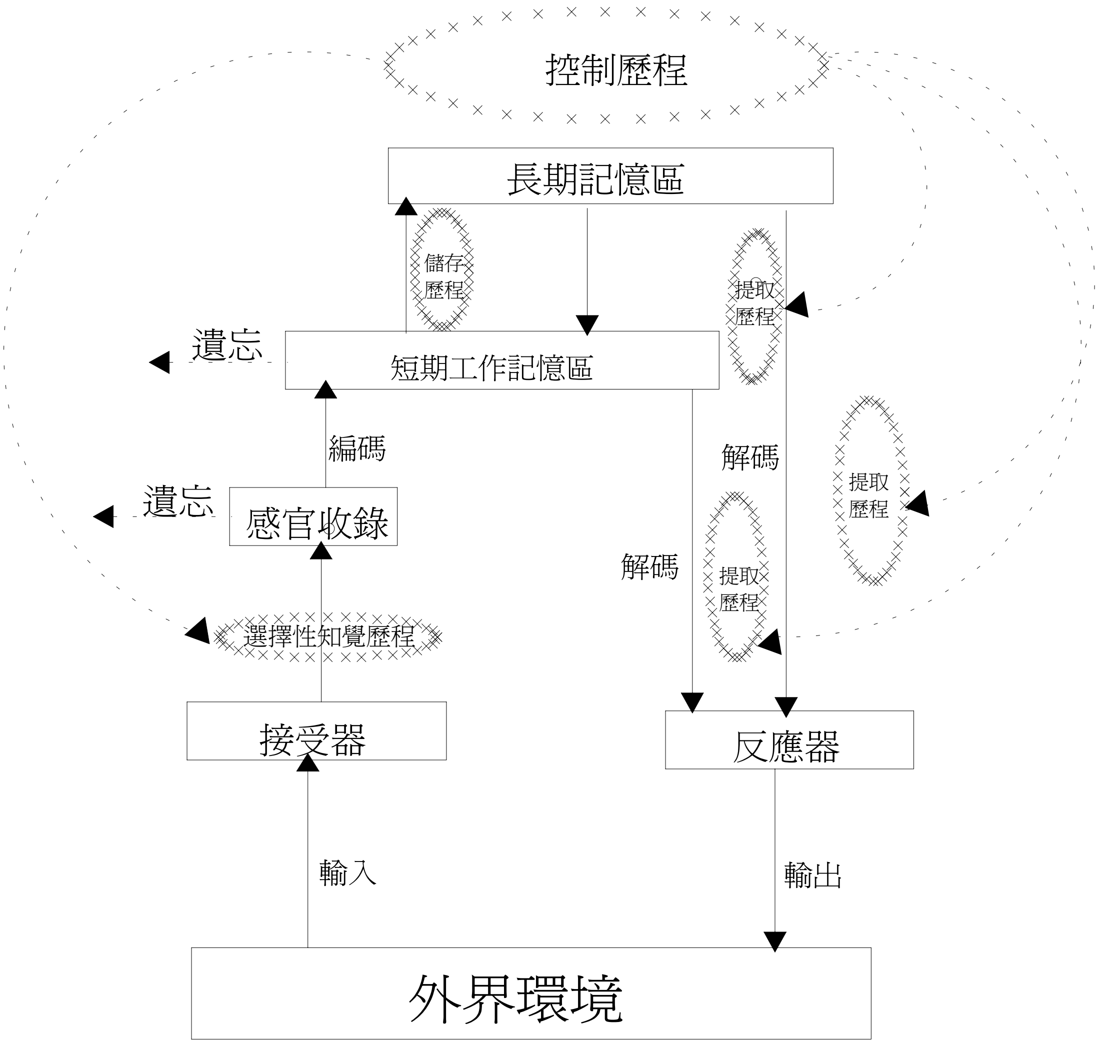
這裡所提到的數學思維外部表徵就是教師或課本呈現數學知識的方式，這種呈現的方式可以是方程式、文字、圖形、表格等。學生看所呈現的外部表徵後，開始對接收到的訊息進行理解、處理、吸收，這就是訊息處理(抽象化)；最後形成學習者自己的思維儲存於長期記憶區。教師為了檢驗學生是否學習到數學思維、學習到的思維是否正確，就提供評量來看學生有沒有學到結果，並觀察學生將學習的結果以何種方式呈現出，學生是否能順利地將同一觀念的不同表徵作轉

換，以作爲教學成效的參考，而改善教學環境，增加教學效果。

(二)認知學派的認知歷程：

以上的學習歷程與認知學派的認知歷程相仿：

(圖 2-4 認知學派的訊息處理模式)



(摘自黃哲男(2001))

1.訊息接收： 也就是說：當教師將數學思維如：廣義角的語意表徵、代數表徵、圖形表徵傳授給學生時，就是外界環境所給予的刺激。當學生看到數學思維時，眼睛就是接受器；此時學生雖然看到了數學思維的各種表現方式如圖形、定義，但不是所有的表現方式都被學生當作訊息來處理，學生會根據刺激的強弱、喜好、理解程度，將這個刺激選擇擇性地收錄到感官並將數學思維編碼儲

存於短期工作記憶區。

2.短期工作記憶區：短期工作記憶區是介於感官收錄與長期記憶工作區之間的中間站。在感官收錄後透過編碼儲存於短期工作記憶區中，學生就在短期工作記憶區中進行解碼、連結、編碼等工作。而短期工作記憶區有兩個作用，第一個是對刺激直接作出反應，如馬上將記下來的電話號碼覆誦後馬撥出去，另外也可能在將此電話號碼分析後，往長期記憶區蒐索儲存於長期記憶區的相關訊息。所以，如何將學習單元建立成一個學生能接受掌握的知識，是教學的一個重點。

3.長期工作記憶區：學生將在短期工作記億區所學得的知識與在長期工作記憶區的相關舊知識比較，學生經過分析兩者的相同的與不同的性質後，對所學的知識產生了一個新的基模，在這個新的基模中包含了知識的表徵、生產法則等，然後學生精簡整合所學與既有的知識與新訊息，將得到的新訊息的基模在儲存回長期記憶區。這些學生中也有一些人，他雖然也意識到老師新教的知識，也從長期工作區中搜索曾經學過的知識來進行整合，但新、舊知識產生衝突無法接受新教的數學知識，他還是以舊有的基模儲存在長期工作記憶區，而將教師所傳授的新知識遺忘。長期工作記憶區的容量是無限，記憶所學得的訊息，以供日後使用。所以長期記憶區中知識的品質、模式、多寡會影響一個學生學習或解題的過程。

4.提取與決策的歷程：一旦數學思維被組織和儲存於長期記憶區後，如何提取訊息與提取何種訊息便是接下來的任務。我們可以根據學生所提取內容的完整性、正確性，去評估教學成效，改善教學。

　　訊息處理模式可反映出教師教學的方式、學生學習、解題的歷程之間的關係。我們可以根據訊息處理模式，檢討教學成效，以作爲教學改進。

二.知識的表徵

(一)多重表徵

由於我們無法看到知識結構的內涵，所以只能根據知是呈現於外的形式，即以表徵(representation)的方式，來間接推論而知(余民寧 1999)。即表徵代表人類心智系統或長期工作記憶區的一個特定的知識結構。

數學是從許多實體慢慢抽象而來的，不同的人因為學習背景、生活經驗的不同，擷取方式也有所不同，因此造就了數學思考、表達的多樣性。所用來表示人類心智系統知識結構的表徵方式也就呈現多樣性。就函數而言，我們可用語意、圖形、表格、代數運算式、符號等表徵來表示。

玻里雅(民 82)在他所著如何解題一書中提到解題工作的四個階段：第一、瞭解問題；第二、弄清楚題目裏各部分的關係，並做出計劃；第三、實行計劃；第四、回顧問題。我們發現高層次的學生在解題的第二階段時，他們會根據題意作圖、或列圖表等來掌握題意，即能靈活地運用不同的表徵方式去解題。也就是高層次的學生能夠精確地在不同時機下由一種表徵轉換成另一種表徵。因此，在教學上引進多重表徵對建立學生概念、解題技巧有其必要性。所以 Janvier(1987d)提到大多數教科書都廣泛的使用多樣的圖片和圖表，是想要促進學生理解，而學習數學最理想的方式應該在同一物件上運用數個表徵。

有關多重表徵與教學的關係 ，Dufour-Janvier et al.(1987)有詳細的探討，而學生如何去看待這些教師傳授的表徵，他們有沒有辦法去掌握這些表徵使其產生連結，是身為教師的我們必須去探討的。事實上，根據 Hart 與 Sikinson(1987)證實，許多兒童在具體的活動經驗與數學形式化之間的連結會有許多困難，而他們建議用塔橋的方式，如以圖形表徵作為中介，以解決此問題。而不同的學生對相同的圖形表徵會有不同的解讀方式，學生會自己附以自己的定義，不是圖形本質上的定義，這樣會造成了解上的問題，反而無助於連結。近年來電腦的通行，許多電腦軟體可以提供更有豐富的教學方式，讓學生能經由觀察、操作、討論去

思索各種表徵的涵義，以便能產生穩固得連結。

就多重表徵的教學研究來看，朱綺鴻(民 87)以高中師生數學歸納法的學習情況進行研究，發現多元表徵的方法則較能使學生有更多元的思考方向，比較能由少數特例中尋求規律或發現反例。因此，建議教師一對各種概念提供不同的表徵方式，使具備不同先備知識或認知偏好的學生有較多機會選擇，方能與原有的認知結構相結合而達有效學習目的。(摘自蔡志仁(2000))

(二)知識的種類

E.D.Gagné (1998)認爲知識表徵是我們在長期記憶區與工作記憶區中訊息呈現及運作的方式。而在上述的認知歷程中描述了知識如何被我們察覺、處理、儲存及應用，但是不同種類的知識在我們的長期記憶區中會以不同的表徵所儲存。所以 E.D.Gagné 他將知識分成敘述性知識(declarative knowledge)與程序性知識(procedural knowledge)。他認爲敘述性知識是瞭解”事件本身”的知識，是有關事實、理論、及物件的知識。敘述性知識包含三種基本型式

(一) 命題(propostion)：一個命題約略等於一個想法。

(二) 心像(image)：作爲敘述性知識的一種形式乃保留所呈現概念的物理特徵之連續像度。

(三) 線性規則：一組元素間常有的一個很重要的關係便是序列(ordinal)關係，也就是說這些元素是如何根據某些像度來排列出等級或次序關係。

而基模(schemas)是敘述性知識的整合單位，它可以聯結敘述性知識的三種基本型式；基模所呈現的是一種靜態的知識。Rumelhart 和 Norman(1983)定義基模爲『存在記憶中表徵類總概念(generic concept)之資料結構』。

E.D.Gagné 認爲程序性知識(procedural knowledge)是瞭解事情要如何做的知識，它包含了動作技能、認知技能、及認知策略的知識。即它是一種動態性的知識，它是以一種稱爲生產法則(production)的活動的表徵來呈現的知識。一個生產法則通常包含兩個部分：其一是「若」的部分，另一是「則」的部分。「若」的

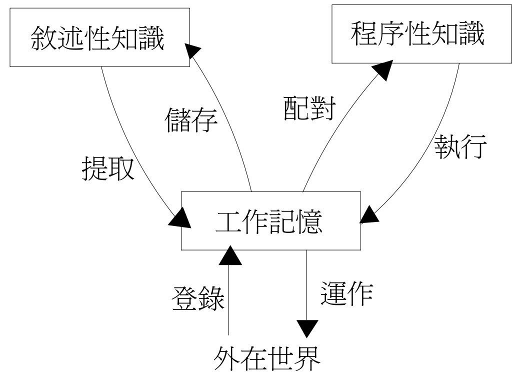
部分是指一個或多個爲某特定行動集組之執行所必須存在的條件；「則」的部分是列出當符合所有條件時，那些將會執行的一個或多個行動。舉例而言：當學生看到題目："請畫出一個角等於－120°"，則學生會畫出一個順時針旋轉 120° 的角。程序性知識經過一段時間及加強的練習就變成自動化；而所謂自動畫包含了(1)運作速度很快(2)可以達到不可思議的正確性(3)缺乏意識上的控制能力(4)自動化程序無法用言語來描述等特性。如果學生在自動化的歷程中真的被鍵入呈現各類技能的生產法則系統內，我們就可以期待這個獲取程序性知識的歷程可以確保所習得的生產法則集組是正確且安全的。但值得注意的是程序性知識只有在習取的早期階段才比較容易去修正其生產法則，若在記憶系統已建立一組生產法則時便很難在去修正。這也就是常常我們發現學生在弄錯有向角旋轉方向與正負號的關係時，就算經過修正學生還是常常會犯同樣的錯誤。

我們用下表表示敘述性知識與程序性知識的相似性與差異性：

相似性	差異性
1. 敘述性知識以基模、心像，程序性知識以生產法則的知識表徵都使用經濟的方式來儲存我們的知識與經驗	1.敘述性知識的功能是要能被用來反思，即多重使用；程序性知識則是提供極純熟技能的快速表現

同時，E.D.Gagné 認爲敘述性知識與程序性知識間是彼此有交互作用的關係存在，他用下圖來表示程序性知識與敘述性知識交互作用的一般模式：

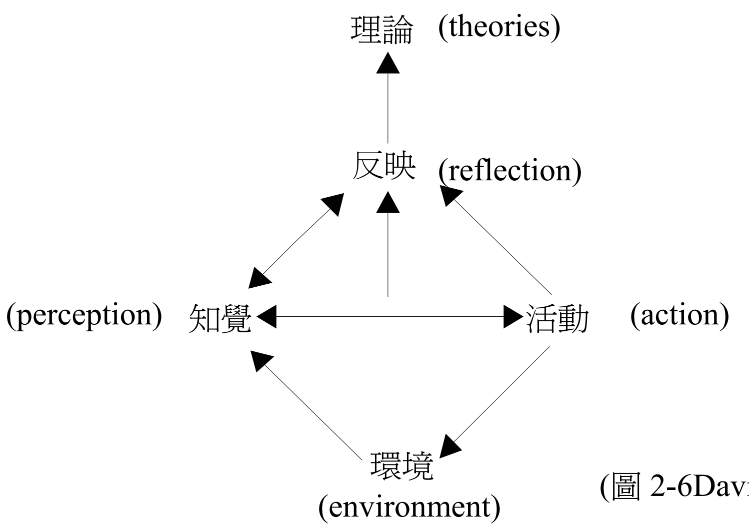
(圖 2-5 E.D.Gagné 程序性知識與敘述性知識交互作用的一般模式)



E.D.Gagné 認爲工作記憶中的訊息可以被儲存(store)在長期記憶區(long－term memory)中。而儲存指的是以各種不同方式來統整(integrated)新訊息和舊訊息的一種歷程。提取(retrieval)指的是把儲存在長期記憶區的訊息轉換送到當前可以運作狀態中之一聯串過程。所以，我們將試題分成程序性或敘述性的試題，目的是希望瞭解若我們引進 GSP 的教學環境，對學生學習“角”的程序性、概念性知識有無影響。

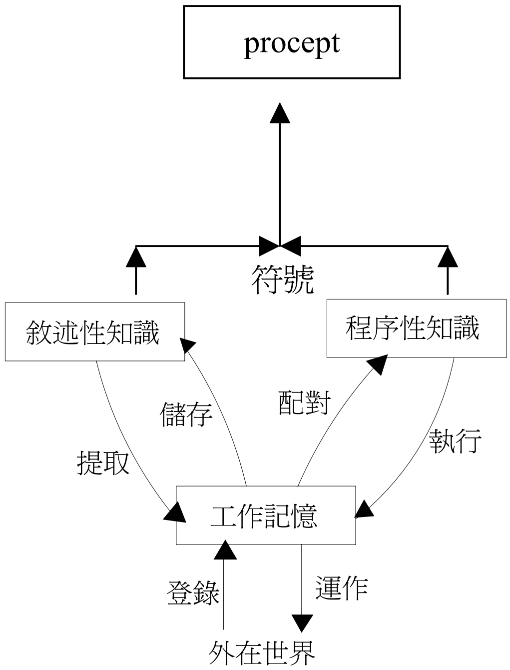
三.符號的作用

當我們在課堂上如果上課的目的是要學生學會解一元一次方程式，一般而言教師會做一些講解，然後提供很多隨堂練習讓學生能夠得到充分的練習，以便讓學生學會並熟練如何解一元一次方程式。如果我們所要傳授給學生的是概念性的知識，則我們會可能先給予一些圖形的操作、定義講述、方程式的型式，以加強學生對概念定義的瞭解及擁有豐富的概念心像。也就是我們心智內所儲存的知識型式是和知識如何被我們來運用有關，如果這個知識是要教我們如何動作如：游泳，則這個知識就應該經過練習後和我們記憶中游泳的動作牢牢的結合在一起，然後儲存於我們的長期記憶區中。而 David Tall 及他的研究夥伴認爲數學是人類從環境中的活動去發展高度、精緻、抽象的概念；這個過程開始於一種能察覺事物及在這些事物上工作的能力，然後能反映這些行爲去建構理論，這個過程我們可以用下圖來表示：



(圖 2-6David Tall 數學建構理論)

David Tall 認爲根據人類發展有三種型態的數學：空間及形狀(space and ahape)、符號化的數學(symbolic mathematics)、公理化的數學(axiomatic mathematics)，而每一種型態的數學都伴隨不同型態的認知發展。雖然認知發展型態不同,但認知發展中都包含兩種知識:概念性(concept)知識、程序性(procedure)知識，最後用符號將兩者聯結起來成爲 procept 的知識。我們將將 David Tall 的理論與 E.D.Gagné 的理論結合起來成爲下圖：



(圖 2-7 符號的作用)

David Tall 認爲程序性知識是用來表示一個時間內步驟實行的特殊順序。而 Vinner 認爲概念包含了概念心像與概念定義。圖像(picture)包含了概念所有可見的屬性；而概念的心智圖像是與概念結合的屬性集合。屬性的集合與心智圖像的總和稱之爲概念心像。一般而言學生通常是藉由操弄概念心像來了解概念及解題。David Tall 認爲符號化是一個介於程序與概念的心靈樞軸，雖然符號相同但它在表示爲程序性知識、概念性知識所代表的意思變有所不同，例如：

符號(symbol)	程序(process)	概念(concept)
4	counting(數數)	number(數)
3+2	adding(加法)	sum(和)
−3	減 3	負 3
3/4	分配或除法	分數
3+2x	求值	表示法

二重地使用符號當作程序與概念，通常是由一步一步程序的過程開始，然後慣例化實行它，無須有意義的注意，甚至有時候是使用更精簡的方式。舉例而言：小孩子在數蘋果：剛開始他是一個一個慢慢數成習慣後壓縮直接變成數目 n ，所以由數的過程轉成數的概念時，數字這個符號即成爲一個轉換的樞軸。再舉例而言：學生在學習廣義角 θ 時，剛開始學生可能慢慢的順時針轉、或逆時針轉的記錄，慢慢地他捨棄了轉這個動作直接變成度量大小，所以 θ 這個符號即成爲一個轉換的樞紐。而 Gray & Tall 將程序性知識(process)與概念性知識(concept)結合變成 procept 的知識。所謂 procept 就是一種認知結構，在其中符號是充當一個樞軸用來將焦點由真實計算或操作的過程轉移到能讓人思考一個操作實體的概念。即 procept 的知識在根本上是人類用來操控在算術、代數、或其他理論中的數學概念(包含操作符號)。它們允許人類能用最小的方式從一個過程轉換成一個概念，即

$$\text{symbol} \begin{cases} \text{process} \\ \text{concept} \end{cases} \xrightarrow{\text{結合}} \text{procept}$$

所以，符號不僅能讓學生掌握概念同時也掌握方法應用，讓學習者有完整概念基模。