

國立臺灣師範大學數學系碩士班碩士論文

指導教授： 謝豐瑞 博士

高中生學習平面向量素養導向課程之情形



研究生： 陳柏宇

中華民國 一〇八年 七月

致謝

終於走到了這一步，最後寫的這篇致謝辭卻是放在論文開頭，彷彿在提醒我碩士學位的結束迎接著下一個嶄新的開始。

這篇論文能夠完成，首先要感謝我敬愛的指導教授 謝豐瑞老師，從進入您門下學習以來您一直支持我的研究方向，在我做得好時不吝讚賞，做不好時也給予建議和鼓勵。您深入淺出的上課方式讓我受益良多，屢次突破研究瓶頸的背後是您在忙碌行程中抽空指導換來的。您不只是我論文的指導者，更是我未來作為一名教師的模範。

感謝口試委員 鄭英豪教授、王婷瑩教授蒞臨指教，點醒我從不同的觀點省思研究的不足之處，讓我有機會再修正使得論文更完整。

感謝智昇學長、文傑學長協助研究進行；感謝嵐婷學姊、啟台學長、琬嘉學姊、原榮學長在研究的準備階段給予課程設計上的建議；感謝聖懷、怡穎、雅婷、怡萱協助處理口試相關事宜；感謝一起努力的夥伴俊皓、姿霖，有你們一起討論研究進度使我更有動力，藉著彼此間互補的特點互相幫助溫暖了我的這段學習旅途。

最後，感謝家人在背後作我的後盾、支持我選擇的路、包容我的忙碌，讓我順利完成學業。

摘要

本研究欲探討高中學生學習平面向量素養導向課程之情形，包含學習前後數學素養之展現和新單元數學內容之學習遷移情形。

本研究屬質性研究，研究者設計一份課程用學習單，以培養數學素養和平面向量單元內容教學為主要的兩個目標，與兩位協助研究進行的原班教師進行溝通後，實際進入課堂教學。教學結束後會回收學習單，並從學習單上的內容進行歸納分析。研究樣本為台北市兩所公立高中各兩班，一所學生程度頂尖而另一所為高程度，共 110 位學生。

部分研究結果如下：在教學前，不分學校多數學生(約佔六成多)用來表示象棋馬移動的自有表徵為以直線表達移動路徑、以刻度或格子表達長度，並在終端加上箭頭表達方向的擬動態圖像表徵，此表徵與向量的幾何表示法相當接近；而坐標表示法使用人數僅一人。在教學後，所有學生都轉換為使用向量的幾何表示法與坐標表示法，且在單純表示象棋馬移動時幾乎都使用正確。

本研究透過學生回答情境題的情形觀察學生數學素養之展現，研究者發現學生使用的證明策略明顯地影響了整體答題狀況，且程度不同的學生所用證明策略差異甚大。頂尖程度的兩班在學習前使用分析證明策略的學生佔三成多，學習後佔四成多；而高程度的兩班在學習前後使用分析證明策略的學生均不到一成。頂尖程度的兩班教學後使用了向量概念來輔助完成證明的學生約佔五成多，而高程度的兩班則不到一成。

主要在情境中進行的教學之後，頂尖程度、高程度學生未經純數學例題示範能正確回答「向量平移概念題」分別約佔近九成、五成多；而「向量分解概念題」則視分解的複雜度分別約佔五成到八成、二成多至五成。

關鍵詞：數學素養、平面向量、學習遷移

目錄

第一章 緒論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究目的與問題.....	3
第三節 名詞解釋.....	4
第二章 文獻探討.....	5
第一節 數學素養.....	5
壹、何謂數學素養.....	5
貳、數學素養的評量架構.....	9
第三章 研究方法.....	14
第一節 研究架構.....	14
第二節 研究方法與研究設計.....	16
第三節 研究樣本.....	17
第四節 研究工具.....	18
第五節 研究流程.....	26
第六節 研究限制.....	28
第四章 研究結果.....	29
第一節 學生以自有表徵表達向量概念之情形.....	29
壹、學生學習向量前所用表徵種類.....	29
貳、各類表徵的使用人數.....	34
參、學習前後表徵轉換之情形.....	40
第二節 學生解情境題之情形.....	41
壹、學生採用證明策略之情形.....	42
貳、學生於證明中使用向量概念之情形.....	50
參、學生解題三步驟與七數學力展現之情形.....	56

第三節 學生解數學題之情形	65
壹、各數學題答對率之分析	66
貳、學生使用向量概念解數學題之情形	70
第五章 結論與建議	77
第一節 結論	77
第二節 建議	80
參考文獻	81
附錄	83



表目錄

表 3-3-1	研究樣本概況.....	17
表 3-4-1	學習單各題教學內容.....	25
表 4-1-1	A1 班各類表徵使用人數.....	34
表 4-1-2	A1 班學習前所用表徵的正確性與完整性.....	35
表 4-1-3	A2 班各類表徵使用人數.....	35
表 4-1-4	A2 班學習前所用表徵的正確性與完整性.....	37
表 4-1-5	B1 班各類表徵使用人數.....	37
表 4-1-6	B1 班學習前所用表徵的正確性與完整性.....	38
表 4-1-7	B2 班各類表徵使用人數.....	38
表 4-1-8	B2 班學習前所用表徵的正確性與完整性.....	39
表 4-2-1	A1 班各層次證明策略的使用人數.....	46
表 4-2-2	A2 班各層次證明策略的使用人數.....	47
表 4-2-3	B1 班各層次證明策略的使用人數.....	48
表 4-2-4	B2 班各層次證明策略的使用人數.....	49
表 4-2-5	A1 班學生使用向量語言之情形.....	53
表 4-2-6	A2 班學生使用向量語言之情形.....	54
表 4-2-7	B1 班學生使用向量語言之情形.....	55
表 4-3-1	四班學生數學題 1.1 之答對率.....	66
表 4-3-2	四班學生數學題 1.2 之答對率.....	67
表 4-3-3	四班學生數學題 1.3 之答對率.....	68
表 4-3-4	四班學生數學題 2.1 之答對率.....	69

圖目錄

圖 2-1- 1 Model of Mathematical Literacy.....	6
圖 2-1- 2 數學素養之花.....	7
圖 2-1- 3 數學素養的實踐之模型.....	9
圖 2-1- 2 七數學力在三步驟中的展現.....	12
圖 3-1- 1 研究架構圖.....	14
圖 3-4- 1 學習單前言-情境引入部分.....	18
圖 3-4- 2 學習單第一題.....	19
圖 3-4- 3 學習單第二題.....	19
圖 3-4- 4 學習單第三題.....	20
圖 3-4- 5 學習單第四題.....	21
圖 3-4- 6 學習單第五題.....	22
圖 3-4- 7 學習單第六題.....	22
圖 3-4- 8 學習單第七題.....	23
圖 3-4- 9 學習單數學題一.....	23
圖 3-4- 10 學習單數學題二.....	24
圖 3-5- 1 研究流程說明圖.....	27
圖 4-1- 1 箭頭圖像表徵例一.....	29
圖 4-1- 2 箭頭圖像表徵例二.....	29
圖 4-1- 3 箭頭圖像表徵例三.....	29
圖 4-1- 4 箭頭圖像表徵錯誤例.....	30
圖 4-1- 5 箭頭圖像表徵部分例.....	30
圖 4-1- 6 無箭頭圖像表徵例一.....	30
圖 4-1- 7 無箭頭圖像表徵例二.....	30
圖 4-1- 8 無箭頭圖像表徵錯誤例.....	31
圖 4-1- 9 文字表徵正確例一.....	31
圖 4-1- 10 靜態圖像表徵錯誤例.....	31
圖 4-1- 11 靜態圖像表徵例一.....	31
圖 4-1- 12 文字表徵正確例二.....	32
圖 4-1- 13 文字表徵正確例三.....	32
圖 4-1- 14 多重表徵例一.....	32
圖 4-1- 15 點的坐標表徵例一.....	33
圖 4-1- 16 向量的坐標表徵例一.....	33
圖 4-1- 17 A1 班學習前所用表徵之比例.....	34
圖 4-1- 18 A2 班學習前所用表徵之比例.....	36
圖 4-1- 19 B1 班學習前所用表徵之比例.....	37
圖 4-1- 20 B2 班學習前所用表徵之比例.....	38

圖 4-2-1 學習單第二題之敘述.....	41
圖 4-2-2 學習單第七題之敘述.....	41
圖 4-2-3 無意義證明例一.....	42
圖 4-2-4 儀式證明策略例一.....	42
圖 4-2-5 權威證明策略例一.....	43
圖 4-2-6 符號證明策略例一.....	43
圖 4-2-7 歸納證明策略例一.....	44
圖 4-2-8 感官證明策略例一.....	44
圖 4-2-9 經驗證明策略例一.....	45
圖 4-2-10 轉換證明策略例一.....	45
圖 4-2-11 轉換證明策略例二.....	46
圖 4-2-12 A1 班各層次證明策略的使用人數.....	47
圖 4-2-13 A2 班各層次證明策略的使用人數.....	48
圖 4-2-14 B1 班各層次證明策略的使用人數.....	49
圖 4-2-15 B2 班各層次證明策略的使用人數.....	50
圖 4-2-16 無使用向量語言例一.....	51
圖 4-2-17 無使用向量語言例二.....	51
圖 4-2-18 使用向量語言有誤或不完整例一.....	52
圖 4-2-19 使用向量語言有誤或不完整例二.....	52
圖 4-2-20 使用向量語言正確且完整例一.....	53
圖 4-2-21 A1 班學生使用向量語言之情形.....	54
圖 4-2-22 A2 班學生使用向量語言之情形.....	54
圖 4-2-23 B1 班學生使用向量語言之情形.....	55
圖 4-2-24 學生回答內容沒有呈現「形成數學問題」例一.....	56
圖 4-2-25 某位學生學習前分割棋盤的情形.....	57
圖 4-2-26 某位學生學習後分割棋盤的情形.....	57
圖 4-2-27 學生回答內容沒有呈現「形成數學問題」例二.....	58
圖 4-2-28 學生回答內容沒有呈現「形成數學問題」例三.....	58
圖 4-2-29 學生回答內容沒有呈現「形成數學問題」例四.....	59
圖 4-2-30 使用分析證明策略的學生推理論述之情形例一.....	59
圖 4-2-31 使用分析證明策略的學生推理論述之情形例二.....	60
圖 4-2-32 使用分析策略之證明學習前後對比(後).....	61
圖 4-2-33 使用分析策略之證明學習前後對比(前).....	61
圖 4-2-34 使用經驗證明策略的學生在「溝通」數學力上展現不佳例一.....	62
圖 4-2-35 於情境中詮釋運用數學步驟得到的結果例一.....	63
圖 4-2-36 沒有於情境中詮釋運用數學步驟得到的結果例一.....	63
圖 4-3-1 學習單數學題 1.....	65
圖 4-3-2 學習單數學題 2.....	65

圖 4-3-3 四班學生數學題 1.1 之答對率.....	66
圖 4-3-4 四班學生數學題 1.2 之答對率.....	67
圖 4-3-5 四班學生數學題 1.3 之答對率.....	68
圖 4-3-6 四班學生數學題 2.1 之答對率.....	69
圖 4-3-7 難以判定學生使用的解題方法例一.....	70
圖 4-3-8 學生將圖像表徵坐標化.....	71
圖 4-3-9 幾何表徵坐標化時出錯.....	72
圖 4-3-10 學生使用向量加法的三角形法.....	72
圖 4-3-11 向量加減法未注意方向例一.....	73
圖 4-3-12 向量加減法未注意方向例二.....	73
圖 4-3-13 向量加減法受到長度影響例一.....	74
圖 4-3-14 以有向線段符號進行向量分解例一.....	75
圖 4-3-15 利用向量平移的性質解題例一.....	75
圖 4-3-16 利用斜率概念解題例一.....	76
圖 4-3-17 利用對角線平分性質解題例一.....	76



第一章 緒論

第一節 研究背景與動機

根據「國際數學與科學教育成就調查 2015」(Trends in International Mathematics and Science Study 2015, 簡稱 TIMSS 2015)之結果,我國學生對數學呈現高成就、低興趣、低信心之情況,雖然測驗當下表現優秀,卻令人不得不擔憂未來會不會每況愈下。另一方面,「學數學有什麼用?」的懷疑聲浪無論作為批評或藉口,都時常在社會輿論、傳播媒體和教育現場出現。在此影響之下,難免發生學生將數學當作一門「考試專用」的知識,不感興趣之外也不利於長久的學習藍圖。

事實上,隨著社會演進,數學跟農業、商業、工業、國防、物理、心理學和天文學等重要領域相輔相成,其重要性不言而喻,斷言「學數學無用」顯然是逾越了自己的見識發表不合理的批評。然而,這不代表教育工作者們可以忽視這個現象,因為將這句話生硬的外殼褪去後,藏在其中的是不知道「學數學該怎麼用?」的無助。

即將實施的 108 課綱的課程主軸「核心素養」理應是解決此現象的一大方向。「核心素養」指的是個體為了適應現在生活及面對未來挑戰,所應該具備的知識、能力、及態度(國家教育研究院,2018),從字面上來看剛好對應了前述現象中「覺得數學沒有用」、「不知道該如何使用」的問題。然而,仍有第一線教師對新課綱提倡的素養持保留態度,懷疑這麼做學生學習真的會變好嗎?會不會犧牲考試成績?原本就覺得不足的上課時間,現在似乎要注入新元素,會不會使得趕課成為常態?因此,研究者欲探討素養導向課程下,學生的學習情形為何。

在國高中數學的眾多單元中，平面向量是個特別的單元，單元中的題目有許多在過去已學過其他解法，但使用向量解往往更有效率，就像是用未來的武器參與過去的戰爭（單維彰, 2013）。研究者的教學經驗中遇到不少學生雖然形式上使用向量作為解數學題的方法，對其背後基本概念不甚理解卻不在乎。一份對 149 位高程度及中程度學生的研究也指出，有 26% 的學生無法分辨純量與向量的不同（洪志瑋, 2013）。因此研究者選定平面向量單元著手設計素養導向課程。



第二節 研究目的與問題

本研究的研究目的為設計平面向量素養導向課程，並探討在此課程之下，高中生學習平面向量單元之情形。依照研究目的和所設計的課程擬定下列研究問題：

1. 在學習平面向量單元之前，學生以自有表徵表達向量概念之情形為何？學習後的轉變情形為何？
2. 平面向量素養導向課程中，學生解情境題之數學素養展現為何？
3. 平面向量素養導向課程後，學生平面向量概念之學習遷移情形為何？



第三節 名詞解釋

1. 平面向量素養導向課程：研究者在象棋情境中找到對應的數學概念，例如：象棋的移動以向量表示、連續多次移動則以向量運算表示。以此為基礎布置合適的學習任務，讓學生從情境中形成數學問題，並使用數學描述、解釋、預測現象。
2. 數學素養：本研究主要採用 PISA(2012)對數學素養的定義：「個人在各種脈絡裡形成、使用、詮釋數學的能力。其中包括了數學推理，以及使用數學概念、程序、事實、工具來描述、解釋、預測現象。數學素養有助於個人作為積極參與、善於反思的公民，了解數學在世界裡扮演的角色，並做出有所依據的判斷與決策。」
3. 學習情形：指本研究中，學生學習單填寫內容所反映出的學習情形，包含其解情境題時數學素養之展現與解數學題時學習遷移情形。
4. 學習遷移情形：指學生經過情境中的學習後，將所學概念遷移至解數學題之情形。

第二章 文獻探討

第一節 數學素養

壹、何謂數學素養

按照字面上的意思，「素養」可以簡單的解釋為「平時之修養」。隨著時代演進，每個人所需具備的「平時之修養」也應該隨之調整。對現代人來說使用網路的能力是過去所無法想像的，而在知識較不普及的時代可能以識字為目標，但以現代來說顯然不足夠。聯合國教科文組織 (UNESCO, 2003)認為素養 (literacy)一詞不再只是指讀寫能力，它關係到我們在社會上如何溝通、實踐，也和知識、語言、文化有關聯。

各國間對於數學素養的用詞與定義並不一致 (劉柏宏, 2016)，英國的用詞是 numeracy，定義從較早期「不僅指量化推理能力，也須理解科學方法，並對科學成就有些熟悉」 (Crowther, 1959)，到二十多年後重新界定 numeracy 作為教育目標主要有兩項特性：運用數學處理日常生活中的數字，及理解以數學術語所呈現的資訊 (Cockcroft, 1982)。從前後定義的變化上可以看出，1959 年的定義較著重於以數學理解科學，而 1982 年的定義則是著重於運用數學在日常生活中，後者更適合作為普及教育之目標。

美國對數學素養的用詞是 quantitative literacy 和 mathematical literacy，quantitative literacy 指「個人在日常生活與工作的量化情境中，有效處理事務所需具備的技能、知識、信念、傾向、心智習性、溝通能力和問題解決技巧」 (Steen et al., 2001)，構成 quantitative literacy 的十項元素為：1. 對數學的信心 2. 文化欣賞 3. 資料解讀 4. 邏輯思考 5. 決策 6. 情境數學 7. 數感 8. 實用技能 9. 先備知識 10. 符號感知。比對之下可以看出 quantitative literacy 的定義

涵蓋了 numeracy，並多出了情意面的部份。

另一位美國學者提出數學素養(Mathematical literacy)的擬動態模型 (Pugalee, 1999)，如圖 2-1-3，模型由兩個動態的迴圈構成，內層迴圈代表數學素養的賦能(enablers)，包含科技(Technology)、價值(Values)、與溝通(Communication)，而外層迴圈代表數學素養的展現，包含表徵使用(Representing)、操作(Manipulating)、推理(Reasoning)、和解題(Problem Solving)，兩層迴圈會形成交叉作用。此模型所包含的元素是和 quantitative literacy 的十項元素類似的，主要差別在於此模型將構成元素區分為內隱和外顯兩類，由內層元素驅動著外層元素展現。

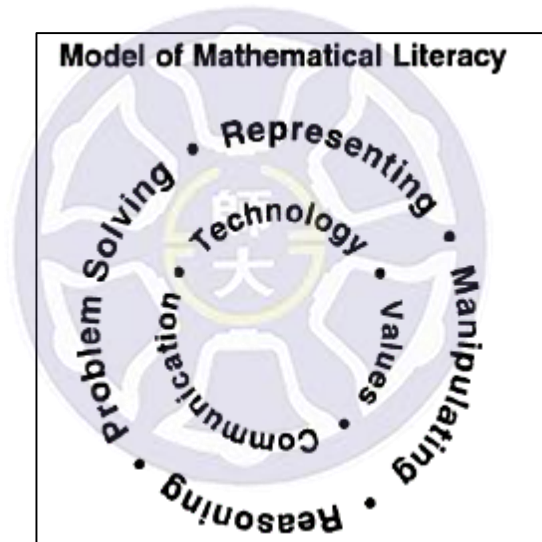


圖 2-1-3 Model of Mathematical Literacy (Pugalee, 1999)

丹麥學者 Mogens Niss 對數學素養的用詞是 Mathematical Competence，指的是「在各式各樣數學內部的或外部的、數學可扮演一角的情境脈絡中，理解、判斷和使用數學的能力」(Niss M., 2003)。而 Mathematical Competency 是 Mathematical Competence 中可明確辨識的要素，共有八個並分為兩類：

(一)與數學相關的問答

1. 數學式的思考
2. 數學佈題與解題
3. 數學建模
4. 數學推理

(二)用數學語言和工具處理問題

1. 使用表徵
2. 處理數學的符號與形式
3. 運用數學溝通
4. 利用輔助工具

如圖 2-1-4，這八項要素串成數學素養之花 (Niss M. , 2011)

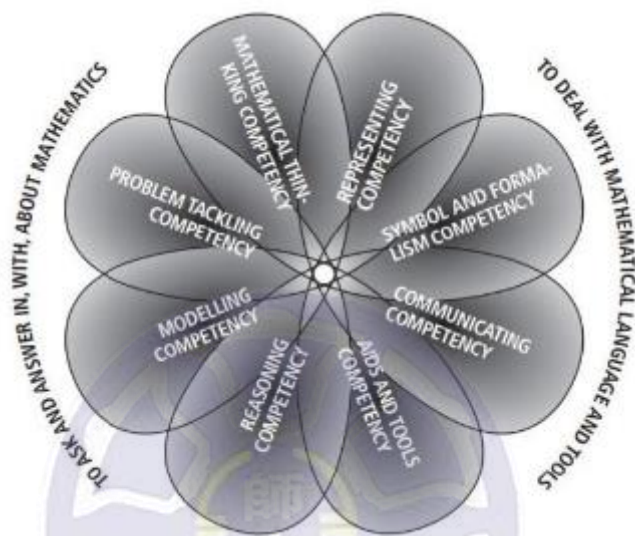


圖 2-1-4 數學素養之花

聯合國下的經濟合作暨發展組織 OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) 所籌劃的國際學生能力評量計畫 PISA(the Programme for International Student Assessment)對數學素養提出的定義廣泛被各國接受，其定義為 (PISA, 2012)：

個人在各種脈絡裡形成、使用、詮釋數學的能力。其中包括了數學推理，以及使用數學概念、程序、事實、工具來描述、解釋、預測現象。數學素養有助於個人作為積極參與、善於反思的公民，了解數學在世界裡扮演的角色，並做出有所依據的判斷與決策。(p.25)

而國內學者李國偉等人以此為基礎，並配合十二年國教之需求將定義闡述如下 (李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏, 2013)：

數學素養的核心內涵應指個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。(p. 19)

雖然各國之間並未統一數學素養的用詞和定義，但仍可以找到不少相似之處：將數學運用於生活中、範疇不僅能力也牽涉到對數學的態度、解題之外利用數學做判斷和有效地溝通。



貳、數學素養的評量架構

前一節已經探討了數個國家的學者對於數學素養的定義，並找出其中共同之處和 PISA 被廣泛接受的版本，但是這些定義難以用來對數學素養的展現作評量，也就不易達到本研究的目的-探討素養導向課程下學生的學習情形。

而 PISA 本身就是一個評量計畫，其對數學素養的實踐提出一個模型 (PISA, 2012)：

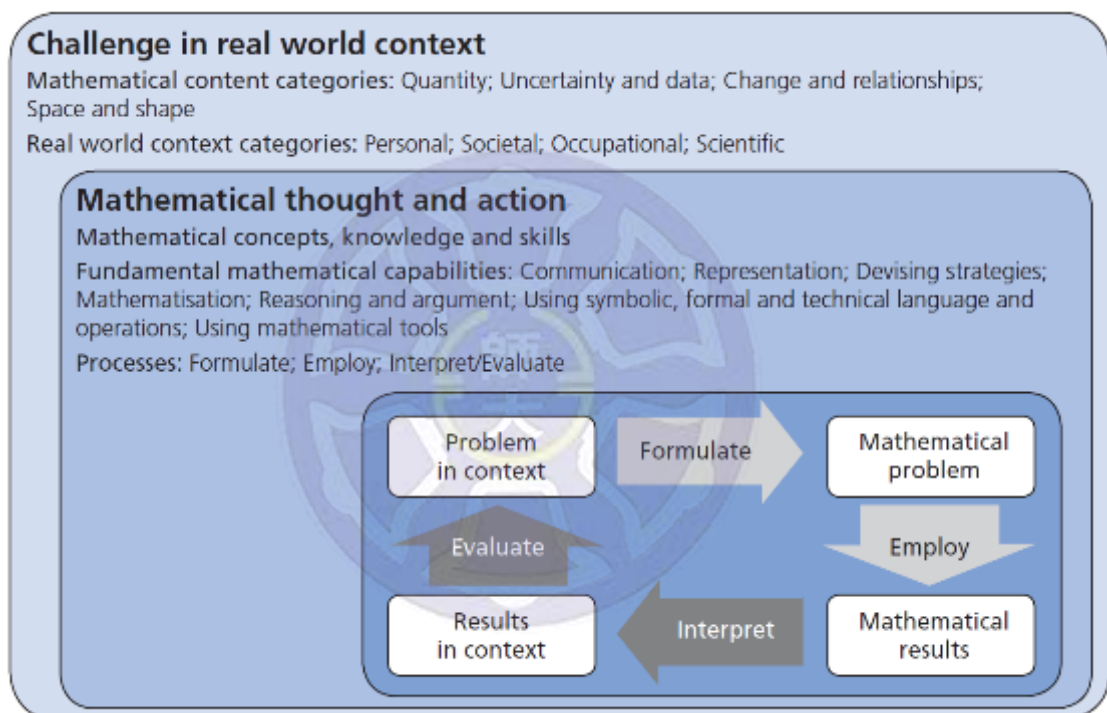


圖 2-1-5 數學素養的實踐之模型

如圖 2-1-5，外層方框指的是來自現實世界情境的挑戰，其中情境類型可分為個人的、社會的、職業的、和科學的；數學內容則可分為數量、數據與不確定性、變化與關係、空間與形狀。最內層的方框是一個建模的循環，描述的是從情境中的問題形成數學問題、對數學問題運用數學得到數學上的結果、對學上的結果加以詮釋成情境中的結果、再將情境中的結果套回情境問題並評估

之。而中間的方框是闡述內層的建模循環用到的三個步驟(process)和七個基本數學力(capacity)，分別解釋如下：

解題三步驟：

1. 形成數學問題 (Formulate)：對應建模循環的第一個箭頭，個體辨識出使用數學的機會，並提供一個情境問題的數學結構。
2. 運用數學解題 (Employ)：對應建模循環的第二個箭頭，使用數學概念、事實、過程、和推理解題以取得數學上的結果。
3. 詮釋結果 (Interpret)：對應建模循環的第三及第四個箭頭，將數學上的結果在情境中詮釋，並且評估是否適用於情境問題。

七個數學力：

1. 溝通 (communication)：包含人與情境之間，及人與人之間的溝通。人於情境之間的溝通即理解題意，閱讀、解碼、解讀敘述、任務、問題或物件使個體能形成心智模型。在解題過程中，中途的成果可能需要被統整或報告。找到答案後，解題者可能需要向他人報告、解釋、或證明。
2. 數學化 (mathematising)：直接翻譯為數學化可能會令人誤解此數學力專指將情境問題形成數學問題之能力(包含結構化、概念化、做假設、形成模型)。然而按照原文，此數學力還包含了詮釋或評估數學上的結果或模型與原問題的關係、以及基本的數學活動。研究者認為這敘述幾乎涵蓋了整個建模循環，或許是因為在談論數學素養，將 mathematising 定義得太侷限也不妥。
3. 使用表徵：選擇、詮釋、轉換和使用多樣的表徵以描繪物件或情境。表徵包含圖像、表格、圖表、方程式、具體物等。

4. 推理及論述：包含透過邏輯思考過程探究和連結問題中的元素並作出推論、提供或驗證已給出的論述。
5. 構思策略：選擇或精心構思用數學解題的策略或計畫。
6. 使用符號、正式術語、和運算：包含在數學情境中以數學常規理解、詮釋、操作、和利用符號表示式。
7. 使用數學工具輔助：數學工具包含物理性工具如測量儀器、也包含計算機等的科技產品。



PISA(2012)將上述的解題三步驟與七個基本數學力再交織成二十一個細項，

如：

	<i>Formulating situations mathematically</i>	<i>Employing mathematical concepts, facts, procedures and reasoning</i>	<i>Interpreting, applying and evaluating mathematical outcomes</i>
Communicating	Read, decode, and make sense of statements, questions, tasks, objects, images, or animations (in computer-based assessment) in order to form a mental model of the situation	Articulate a solution, show the work involved in reaching a solution and/or summarise and present intermediate mathematical results	Construct and communicate explanations and arguments in the context of the problem
Mathematising	Identify the underlying mathematical variables and structures in the real world problem, and make assumptions so that they can be used	Use an understanding of the context to guide or expedite the mathematical solving process, e.g. working to a context-appropriate level of accuracy	Understand the extent and limits of a mathematical solution that are a consequence of the mathematical model employed
Representation	Create a mathematical representation of real-world information	Make sense of, relate and use a variety of representations when interacting with a problem	Interpret mathematical outcomes in a variety of formats in relation to a situation or use; compare or evaluate two or more representations in relation to a situation
Reasoning and argument	Explain, defend or provide a justification for the identified or devised representation of a real-world situation	Explain, defend or provide a justification for the processes and procedures used to determine a mathematical result or solution Connect pieces of information to arrive at a mathematical solution, make generalisations or create a multi-step argument	Reflect on mathematical solutions and create explanations and arguments that support, refute or qualify a mathematical solution to a contextualised problem
Devising strategies for solving problems	Select or devise a plan or strategy to mathematically reframe contextualised problems	Activate effective and sustained control mechanisms across a multi-step procedure leading to a mathematical solution, conclusion, or generalisation	Devise and implement a strategy in order to interpret, evaluate and validate a mathematical solution to a contextualised problem
Using symbolic, formal and technical language and operations	Use appropriate variables, symbols, diagrams and standard models in order to represent a real-world problem using symbolic/formal language	Understand and utilise formal constructs based on definitions, rules and formal systems as well as employing algorithms	Understand the relationship between the context of the problem and representation of the mathematical solution. Use this understanding to help interpret the solution in context and gauge the feasibility and possible limitations of the solution
Using mathematical tools	Use mathematical tools in order to recognise mathematical structures or to portray mathematical relationships	Know about and be able to make appropriate use of various tools that may assist in implementing processes and procedures for determining mathematical solutions	Use mathematical tools to ascertain the reasonableness of a mathematical solution and any limits and constraints on that solution, given the context of the problem

圖 2-1-6 七數學力在三步驟中的展現 (PISA, 2012)

這個模型是 PISA 對於「學生作為活躍解題者」的其中一個核心觀點 (PISA, 2012)。雖然模型中看似有固定的步驟，但不必然要用到每一個步驟，尤其是作為評量中的情境，例如我們可以直接操作圖像或方程式等表徵就直接得到答

案。而此模型展示和後續闡述時的順序也不全然代表實際解題的順序，解題者可能在步驟之間游移或回頭再訪先前的決定。



第三章 研究方法

第一節 研究架構

本研究之研究目的為探討素養導向課程下高中生學習平面向量單元之情形，包含學生素養之展現及學習遷移情形，依此發展研究架構圖如下：

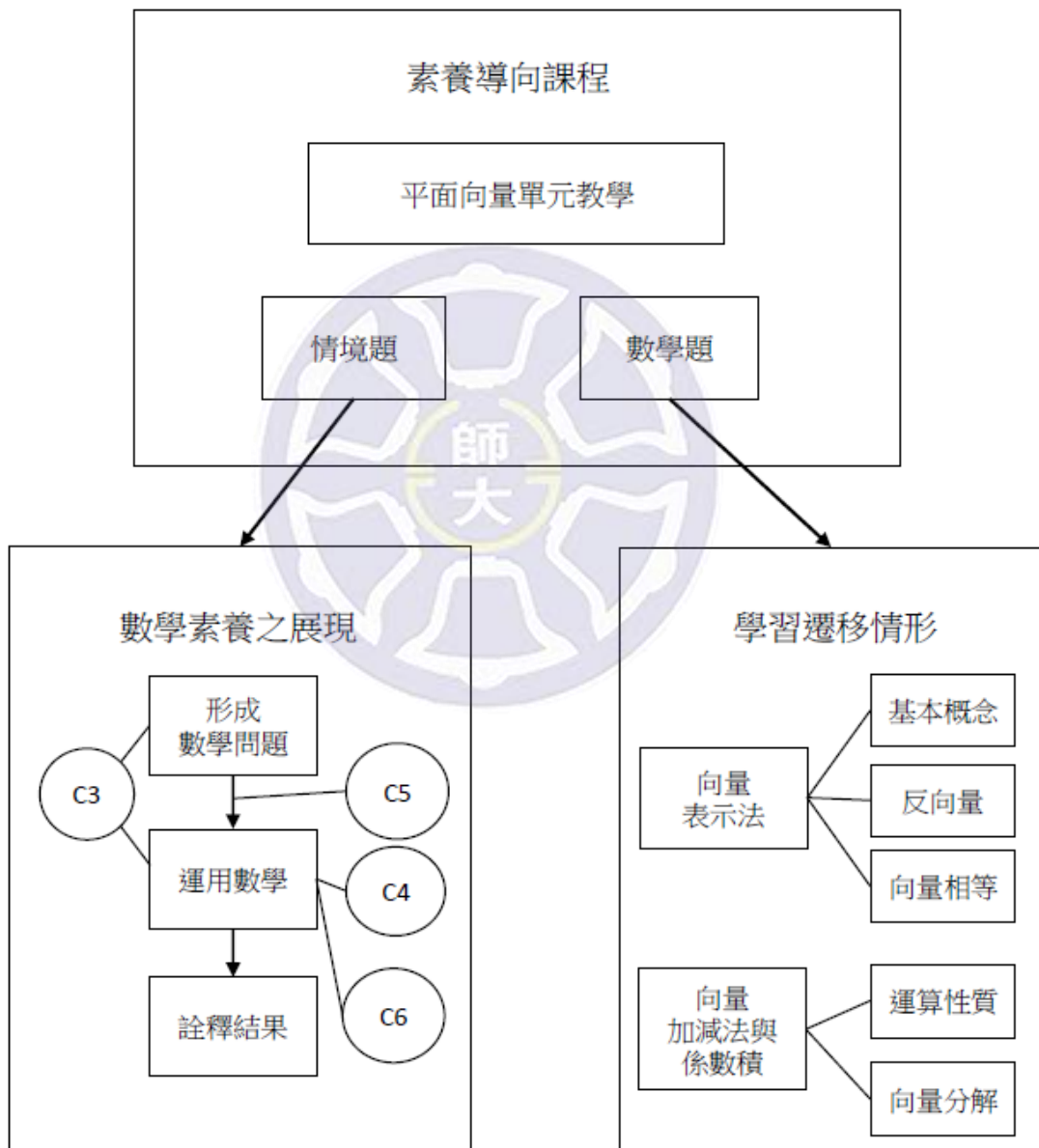


圖 3-1-1 研究架構圖

研究架構圖主要分成三個部分：素養導向課程、數學素養之展現、學習遷移情形，說明如下：

(一)素養導向課程：由研究者設計課程用學習單，其中包含平面向量單元的教學和學生自行作答的情境題、數學題。詳細的課程內容在第四章-研究工具再進行報導。

(二)數學素養之展現：研究者透過課程學習單上的情境題，觀察並分析學生數學素養之展現。分析架構參考 PISA(2012)提出的解題三步驟(Mathematical processes)與七數學力(Mathematical capabilities)，再依照課程中的情境題特性與實際解題情形作調整。解題三步驟即研究架構圖左下角方框中的形成數學問題、運用數學、詮釋結果。左下角方框中的四個圓圈為七數學力之四，按照順序對應為 C1-溝通、C2-數學化、C3-表徵、C4-推理及論述、C5-構思解題策略、C6-使用符號、正式術語、和運算、C7-使用數學輔助工具。研究架構圖中由三步驟與四個數學力組成的小圖為研究者預想要觀察並分析的重點，沒出現在圖中不代表解此情境題無需該數學力，實際上只有 C7 與此情境題較無關聯。連接步驟與數學力的細線指研究者預想要觀察並分析該數學力展現的時機，如在形成數學問題、運用數學階段觀察學生表徵的使用，在運用數學階段觀察學生推理及論述、使用符號、正式術語、和運算，在形成問題與運用數學之間觀察學生構思策略之情形。而研究者認為「溝通」較難以客觀分析，「數學化」則是牽涉廣泛會涵蓋到其他數學力，因此並未放在主要架構中。

(三)學習遷移情形：研究者透過課程學習單上，由學生於情境中學習後未經例題示範自行作答的數學題，觀察並分析學生學習遷移情形。其中牽涉的主要概念按照南一版高中數學課本之節次分為向量表示法、向量加減法和係數積，分別包含向量的基本概念、反向量、向量相等與向量運算性質、向量分解。

第二節 研究方法與研究設計

本研究之研究目的為探討素養導向課程下高中生學習平面向量單元之情形，屬於質性研究。本研究利用課程學習單蒐集非結構化的資料，進行歸納分析(inductive analysis)。

由研究者設計一份素養導向課程及課程用學習單，與兩位現職高中教師溝通課程內容後，實際進入課堂教學，並回收學生所填寫的學習單作為資料。兩位不同校的原班教師各有兩個班級配合研究，均分別由研究者及原班教師對一個班級教學(研究者對兩校各一個班級教學，兩位教師各對一個班級教學，共四個班級參與研究)。此分配為與原班教師討論的結果，並非實驗組、對照組之設計。研究者原意為都由原班教師進行教學，因為對學生來說面對不熟悉的教師與不熟悉的課程模式，可能較難適應進而影響學習單填寫內容。而原班教師表示此課程也非他們熟悉的模式，希望由最熟悉課程的研究者進行教學。最終權衡之下，便以折衷方式進行。

由於學習單設計的關係，由學生自行作答的部分可分為情境題和數學題兩類，回收的資料均屬質性。對於情境題，研究者從學生填寫內容觀察浮現出的組型，並輔以量的分析整體學習情形。對於純數學題，研究者先對各題統計答對率大致掌握學生學習情形，再就學生填寫的解題過程進行質的分析，探討課程中數學概念的學習遷移情形。

第三節 研究樣本

本研究採方便取樣，由於研究者非現職教師，而研究中用的素養導向課程又非多數教師上課所習慣的，因此選取兩位願意保持開放心態並與研究者溝通、配合的現職教師，所任教的共四個班級進行研究。

研究中用的課程適合尚未學習平面向量單元的學生，按照高中數學課綱，平面向量單元在第三冊，也就是高二學生的學習內容。然而其中一位現職教師表示，該校學生多數有超前學習，因此不適合選取高二班級，改由高一班級參與研究。

兩所學校皆為台北市的公立高中，其中一所學生程度頂尖，學生入學時 PR 值大約為 98，以下簡稱 A 校；另一所學生程度高，學生入學時 PR 值大約為 89，以下簡稱 B 校。A1 班級由研究者授課，回收的有效樣本為 35 份、A2 班級由原班教師授課，回收的有效樣本為 34 份；B1 班級由研究者授課，回收的有效樣本為 18 份、B2 班級由原班教師授課，回收的有效樣本為 23 份。總共回收 110 份有效樣本。

無效樣本之判定：1. 學習單上教學部分幾乎空白或填寫內容與教學無關。2. 教學部分有一半以上空白或填寫內容與教學無關，且學生填答部分扣除兩題證明題仍有一半以上空白。符合上述兩點其中之一即視為無效樣本；其餘均為有效樣本。

表 3-3-1 研究樣本概況

學校班級	學生程度	授課者	有效樣本數
A1	頂尖	研究者	35
A2	頂尖	原班教師	34
B1	高	研究者	18
B2	高	原班教師	23

第四節 研究工具

本研究的研究工具為素養導向課程之學習單，課程中涵蓋的數學內容大約為南一版高中數學第三冊 3-1「平面向量的運算」的前半段「向量表示法」、「向量的加減法與係數積」(p.144~p.160)，其中「零向量」、「單位向量」由於情境布置的因素沒有提及。

按照南一版教師手冊的建議，「平面向量的運算」教學時數為 4~5 節，本研究課程涵蓋內容所占篇幅約 3-1 整節的一半，考慮到後半段的「分點公式」、「向量的線性組合」、「直線參數式」內容較抽象，因此本研究將課程控制在兩堂課內結束。教學日期在第二次期中考後的第一次上課，第一堂課的前段由原班教師發期中考考卷，實際教學時間約為 70~80 分鐘。

本研究的平面向量素養導向課程以培養學生數學素養與平面向量單元數學內容並重為目標，其中培養學生數學素養的方式為佈置適當的學習任務，讓學生有展現數學素養的機會，累積將數學知識運用於情境脈絡中的經驗。另一方面，在選定的情境中找到與數學概念的相對應的事、物、或操作，編排於課程使學生學習時可以從情境中較具體的操作漸漸抽象化形成數學概念。

本研究設計之課程大致可分為「情境引入」、「情境題」、「向量表示法教學」、「向量加減法及性質教學」、「數學題」五個部分，課程用學習單共有九大題，以下將逐題說明：

如圖 3-4-1，本研究課程選用的情境是象棋，並以象棋馬是否能走遍棋盤上的位置作為主題。

象棋中的數學-馬能不能走遍棋盤？

象棋是中國古代用來沙盤推演、模擬戰爭的方式，後來流傳於民間演變為一種遊戲。在所有的棋子中，⊕和⊗的移動範圍明顯可以覆蓋整個棋盤；⊖、⊙、⊚受限於規則不能走遍整個棋盤。而⊛的移動方式比較特別，是走「日」字，究竟棋盤上有沒有它的死角，只要待在那就能躲開⊛的攻擊呢？

圖 3-4-1 學習單前言-情境引入部分

在前言階段，教師將說明象棋基本規則以防有學生不清楚規則，影響到後續作答，同時也能讓學生感受為什麼只討論「馬」能否走遍棋盤。在說明各棋子的移動方式時，教師僅在投影幕上的棋盤模擬拿取跟放下棋子的動作，並不另外用任何表徵，目的為不影響接下來學習單第一題學生的作答。

如圖 3-4-2，學習單上的第一題由學生自行作答，讓學生以自有表徵表達象棋馬的移動。另外，後續教學介紹向量的兩種表示法之後，學生也能比較跟自有表徵的異同處。研究者將藉由此題觀察學生使用表徵之數學力。

一、請用你的方法表達[⊗]所有可能的移動方式。
(文字、畫圖、符號都可以)

圖 3-4-2 學習單第一題

如圖 3-4-3，學習單第二題為情境題，由學生自行作答並且說明原因。學生可以利用學習單最後一頁附的棋盤與教師發放的硬幣實際操作，並進一步思考整理後進行回答。研究者將藉由此題觀察學生數學素養之展現。

二、猜猜看，[⊗]能不能走遍棋盤？若你覺得能，請簡述你認為能夠走遍棋盤的原因；若你覺得不能，請提出你認為走不到的位置。

圖 3-4-3 學習單第二題

如圖 3-4-4，學習單第三題為向量表示法教學部分，安排在此題講解的數學內容有以下幾點：

1. 幾何表示法與坐標表示法：教師將用向量的幾何表示法表達象棋馬從固定一點的八個移動方式，再介紹對應的坐標表示法，並解釋與點的坐標表徵重複的問題。說明表徵所傳達的「方向」、「大小」兩個概念。

2. 反向量的概念：教師藉由馬的八種移動可看為四組，每組內兩種移動長度相同、方向相反，則稱它們互為反向量。
3. 向量的相等：教師藉由象棋馬從不同點出發，但移動同一個向量作為例子，向學生解釋何謂向量的相等。由此延伸出向量平移後「方向」、「大小」仍相等，故與原向量為同一向量。此概念為後續教學向量加法的三角形法之基礎。

另一方面，從情境中找出重要元素以表徵表達，釐清元素之間的關聯，例如將棋盤視為坐標、將象棋移動視為向量並識別相同與相反的向量，即為初步地建模。也就是說教師教學的過程中除了講述新單元內容之外，同時示範著從情境中形成數學問題。



圖 3-4-4 學習單第三題

如圖 3-4-5，學習單第四題為向量加法及其性質的教學部分。教師指示學生將象棋馬移動到指定位置，並記錄於學習單。此題可以從學生發表第二題覺得難以走到的位置中挑選，或使用預先準備的三個指定位置，分別便於教學的數學內容為：

四、請試著將⑥從(3,3)移動到指定位置。若可以移動的到，用老師教的方法把移動過程記錄下來。

圖 3-4-5 學習單第四題

1. 向量加法：使用指定位置(4,4)，即起點右上方的位置，象棋馬移動兩步即可到達。棋盤上連續移動兩步，對應到數學中為向量加法。按照直觀的寫法，起點 $A(3,3)+(2,-1)+(-1,2)=(4,4)$ 終點 B，學生可能覺得看起來易懂且合理，但此時表徵混用有些代表點、有些代表向量，因此需介紹位置向量，並以類似想法寫出 $\overrightarrow{AB}=(4-3,4-3)=(1,1)=(2,-1)+(-1,2)$ ，解釋數學上正確的用法。教師在算式旁畫出對應的幾何表示法，並講述向量加法的三角形法/平行四邊形法。

2. 向量加法的交換律：使用指定位置(6,5)，按照操作結果紀錄， $(6-3,5-3)=(3,2)=(1,2)+(1,-2)+(1,2)$ ，此時教師拋問；若調換象棋馬移動的順序，對結果會有影響嗎？之後講述向量加法的交換律。使用向量的坐標表示法講解完畢之後，改用幾何表示法操作，平移改變向量先後順序，發現結果仍然相同。

3. 向量的係數積：使用指定位置(5,10)，在棋盤上為對方將軍的位置，需要五步才能走到。 $(5-3,10-3)=(2,7)=(1,2)+(-2,1)+(2,1)+(-1,2)+(2,1)$ ，由於以向量表示法紀錄算式會有一長串，因此教師講述係數積將相同向量以係數表達。

此題延續上一題，將情境中連續移動以向量的加法、係數積表示，與情境問題更深一層切合之外，也顯現數學表徵具簡潔清楚且方便操作的特性。

如圖 3-4-6，學習單第五題為向量的減法教學部分，向量減法在情境中的對應較不直接，講述時需要更加注意學生反應。依照題意，若學生直接將象棋馬從終點走回起點，在數學中相當於利用反向量概念，把 $(2,-1)+(-1,2)=(1,1)$ 中的

係數都加上負號。從結果來看代表象棋馬能走 \overline{AB} 也就能走 \overline{BA} ，並非向量的減法。因此從終點往回走時，想像是按下悔棋按鍵(所對應的數學內容是向量加法消去律)，先往回移動一步就停下來觀察。原本是 $(2,-1)+(-1,2)=(1,1)$ ，按一次悔棋後消去最後一步，變成 $(2,-1)=(1,1)+(-1,2)=(1,1)-(-1,2)$ ，講述向量減法相當於加上反向量。最後再以幾何表示法操作一次與坐標表示法對應。

五、已知⑤從 $A(3,3)$ 走到 $B(4,4)$ 的移動過程是 $(2,-1)+(-1,2)$ ，那要怎麼從 B 走回 A 呢？

圖 3-4-6 學習單第五題

如圖 3-4-7，學習單第六題為情境中的練習題，由學生自行作答，目的為讓學生熟練第三題到第五題所學。向量在這裡扮演的角色為使用坐標表示法、加減法性質、係數積來記錄象棋馬的移動過程，在沒有棋盤的情況下是比較簡潔清楚的方式。若有學生嘗試不在棋盤上操作，試圖直接解出四個向量分別的係數，可能會發現未知數有四個，相較於能列出的兩條方程式，無法解出唯一解(實際上也非唯一解，因為四個向量並非線性獨立)。原本這個問題搭配課程主題-象棋馬能不能走遍棋盤，為研究者設計將數學內容延伸至「線性組合」概念，然而礙於時間限制，考量後並未放在本次研究的課程中。

六、利用前面所學，⑤從 A 點到 B 點的移動過程可以用向量加法記錄。請將下列 \overline{AB} 以 $(-1,2)$ 、 $(1,2)$ 、 $(2,1)$ 、 $(2,-1)$ 四個向量表示(不一定要四個向量都用到，即係數可以為 0。用坐標表示法回答即可。)
① $A(2,1), B(1,2)$ ② $A(5,7), B(3,5)$ ③ $A(8,1), B(5,10)$

圖 3-4-7 學習單第六題

如圖 3-4-8，學習單第七題問題與第二題是一樣為情境題，由學生自行作答。經過了前面幾題學生又多試了幾個位置，應該都會猜測結論是可以的，但每個點一一去試顯然不具效率，因此仍希望學生再深入思考。研究者將從此題分析學生經過學習向量後的素養展現，觀察重點為學生是否有意圖及能力將新學的向量語言使用於證明中，使用的程度為何。

七、究竟[Ⓜ]能不能走遍棋盤？前面已找到了好幾個位置的走法，但每個位置一一確認顯然沒有效率。有什麼方法能更好解決這個問題呢？

圖 3-4-8 學習單第七題

如圖 3-4-9，學習單數學題一由學生自行作答，參考南一版高中數學第三冊 (p.157)，並稍作修改。此題牽涉的數學概念為向量加減法、向量分解。由於本研究課程前段在情境中的教學很可能比多數老師講解同一段內容時用掉更多時間，壓縮到後續教師的例題示範，因此研究者將由此題觀察學生學習遷移情形，欲得知學生經過前段情境中的學習後，解課本中純數學題之情形。由於此題不像前面教學時均在棋盤上能很明顯地對應到直角坐標系，學生在這六角形上使用向量概念須經過學習遷移。

一、如右圖， O 為正六邊形 $ABCDEF$ 的中心，請回答下列各題 a, b 之值。

- (1) $\overrightarrow{AO} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$
- (2) $\overrightarrow{BF} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$
- (3) $\overrightarrow{EA} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$

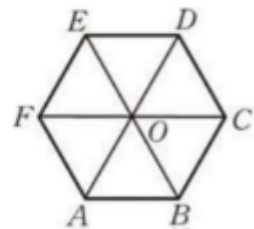
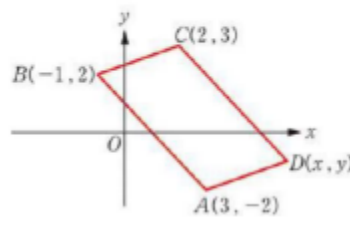


圖 3-4-9 學習單數學題一

如圖 3-4- 10，學習單數學題二由學生自行作答，選自南一版高中數學第三冊(p.148)，佈題原因同前段所述。此題牽涉概念為向量的相等，雖然難度較低，但對於向量加法的三角形法/平行四邊形法相當重要，因此仍編排於學習單中。

二、如右圖， $A(3, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 3)$ 為平面上三點，若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，試求 D 點坐標。



The diagram shows a Cartesian coordinate system with x and y axes. The origin is labeled O. Three points are plotted: A at (3, -2), B at (-1, 2), and C at (2, 3). These three points are connected by red lines to form a parallelogram ABCD. The fourth vertex D is located in the first quadrant and is labeled with the coordinates (x, y).

圖 3-4- 10 學習單數學題二



表 3-4-1 學習單各題教學內容

題號	教學大綱、對應的教材內容	預估時間 (分)
前言	無對應的教材內容。教師引起動機、大致介紹象棋規則並針對棋子走法作示範。楚河漢界那列須向學生解釋。	7
一	無對應的教材內容。讓學生自由使用表徵。	5
二	無對應的教材內容。讓學生寫下對情境題的想法。	8
三	介紹向量的幾何表示法、坐標表示法、反向量、向量相等。 解釋「坐標表示法」和「象棋放置位置」表徵重複的問題	10
四	向量加法(坐標、幾何)、位置向量、交換律、係數積 -----第一節課結束-----	20
五	向量減法(坐標、幾何)、向量加法的消去律	10
六	此題由學生探索，內容為第五、六、七題的統整。	10
七	此題由學生探索。教師講解前需收回學習單或提醒學生不要更改答案。	10
八 九	純數學題，測驗學生從情境中的學習是否能解決課本例題。	15

第五節 研究流程

本研究的研究流程可以分為三個階段：準備階段、教學階段、資料分析與論文撰寫階段。

一、準備階段

1. 閱讀數學素養相關文獻。
2. 研擬課程設計草稿。
3. 與專家小組討論，吸取建議並修訂版本。
4. 與配合的原班教師討論課程及實際進行方式。

二、教學階段

研究者到兩所學校共四個班級，與原班教師分別進行教學。教學內容以研究者設計的課程為主，發放每位學生一張學習單和一個硬幣(讓學生動手在棋盤上操作)，並提供課程用的投影片避免授課教師在畫圖上花費太多時間。研究者會在教室後方架設攝影機錄影，以便後續分析時回顧教學情況。

三、資料分析與論文撰寫階段

研究者先將收回的學習單做有效樣本之判定，再從學習單的情境題與數學題分別分析學生數學素養展現之情形和平面向量單元的學習遷移情形。對於情境題，研究者先觀察出較關鍵的數學力，並依此將學生素養展現情形分類後，再連帶分析其他數學力。對於數學題，研究者先統計各題答對率，配合各題對應的數學概念了解學生大致上的學習情形後，再進一步從學生作答過程分析學生運用了哪些方法解題。

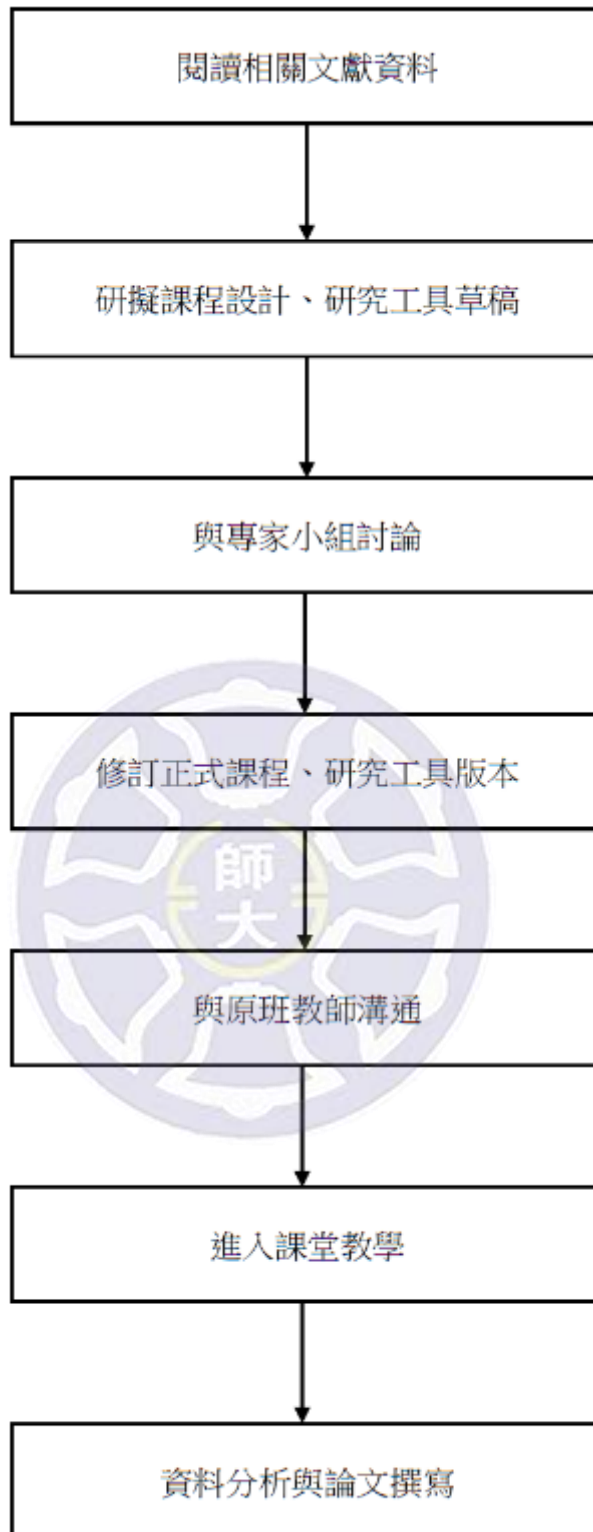


圖 3-5-1 研究流程說明圖

第六節 研究限制

1. 本研究樣本為台北市兩所公立高中，程度分別為頂尖(PR 值 98)和高(PR 值 89)，故研究結果無法擴及其他區域和程度的學生。
2. 本研究並未對「教學」面向做分析，雖然研究者與原班教師有事先溝通，授課時也按照本研究素養導向課程之大綱進行，但難免在不同教師之間細節內容的講述有差異，而本研究無法說明這些差異對學生學習情形的影響。
3. 本研究其中一個階段為進入課堂教學，受到實際情況影響下整段教學比預估時間少了約 10 到 20 分鐘，也因此壓縮了學生作答時間，可能導致部分學生沒有完整寫出想法，進而使研究者分析學習情形時，部分題目空白者偏多。
4. 本研究進入課堂教學時間在學生第二次期末考後的第一次上課，在班級內觀察到部分學生有時出現無心上課之情形，而研究者做的有效樣本判定僅能排除情況較嚴重者。
5. 本研究收集資料方式為觀察學生填寫的學習單，可能受到學生平時作答習慣影響，在說明原因時填寫的較為簡略，導致研究者有時需要主觀判斷學生想表達的意思。

第四章 研究結果

第一節 學生以自有表徵表達向量概念之情形

本研究的學習單中處處可見向量概念的各種表徵，本節專注於探討學生在單純用來表示象棋馬的移動時所用表徵，其他牽涉到解題或說明原因時所用的表徵將在後續節次一併探討。

壹、學生學習向量前所用表徵種類

本研究的學習單上第一題讓學生使用自己的方法表達象棋馬的移動，分析此題填答的情形後將學生所用的表徵種類整理為以下七種：

一、箭頭擬動態圖像表徵

學生主要以畫圖方式模擬象棋馬的移動，以直線表達移動路徑、以刻度或格子表達長度，並在終端加上箭頭表達方向。此類表徵與向量的幾何表示法相當接近，對於「方向」、「大小」兩個資訊的呈現也很清楚。有些學生表達移動路徑的直線並非從起點直接畫到終點，而是沿著格子邊緣畫(如圖 4-1-1)或一段直線接著一段斜線(如圖 4-1-3)，也歸為同一類，因為他們很可能是受情境的影響認為必須沿著格線走，使用表徵的方式並無本質上的差異。

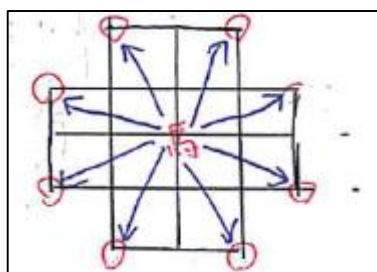


圖 4-1-2 箭頭圖像表徵例一

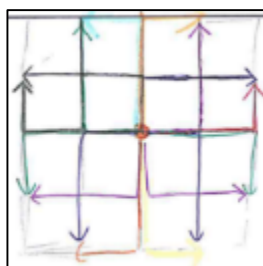


圖 4-1-1 箭頭圖像表徵例二

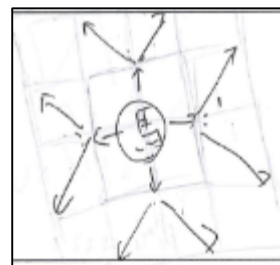


圖 4-1-3 箭頭圖像表徵例三

少數學生使用此類表徵但並未完整表達象棋馬的所有移動方式(如圖 4-1-5)，或其中傳達的資訊有誤(如圖 4-1-4)，分類時歸為同一類但以完整性、正確性區分。

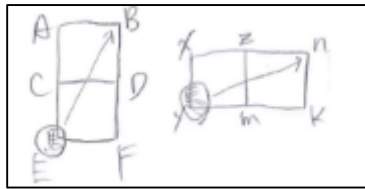


圖 4-1-5 箭頭圖像表徵部分例

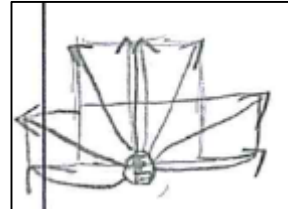


圖 4-1-4 箭頭圖像表徵錯誤例

二、無箭頭擬動態圖像表徵

學生主要以畫圖方式模擬象棋馬的移動，以直線表達移動路徑及方向、以刻度或格子表達長度，但並未在終端加上箭頭表達方向(如圖 4-1-6)。這種表徵是用直線表達移動路徑時順帶表達方向，呈現上較第一種表徵不清楚。在本研究學習單的情境中，象棋馬的移動可以來回視為一組，因此這種表徵尚能正確表達。若在其他情境，方向沒有明確標示可能導致溝通上的錯誤。有些學生表達移動路徑的直線並非從起點直接畫到終點，而是沿著格子邊緣畫(如圖 4-1-7)，也歸為同一類。

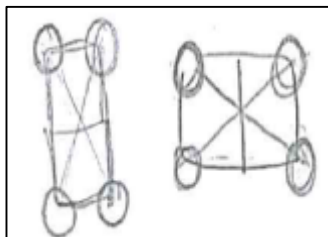


圖 4-1-6 無箭頭圖像表徵例一

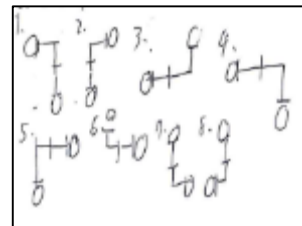


圖 4-1-7 無箭頭圖像表徵例二

少數學生畫出直線表示象棋馬的移動路徑，但刻度不明顯導致不易判讀長度資訊(如圖 4-1-8)，歸為此類表徵中的錯誤例。



圖 4-1-8 無箭頭圖像表徵錯誤例

三、靜態圖像表徵

主要以畫圖方式表達象棋馬下一步可到達之位置，以格子表示棋盤局部為底，並在上方以點或圓圈等記號表達起點和終點(如圖 4-1-10)。此種表徵呈現的資訊更注重結果而非移動過程。少數學生標記的位置並非象棋馬下一步能移動到的位置(如圖 4-1-9)，因此歸為此種表徵的錯誤例。

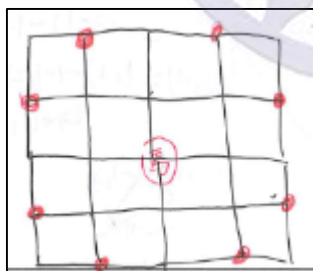


圖 4-1-10 靜態圖像表徵例一

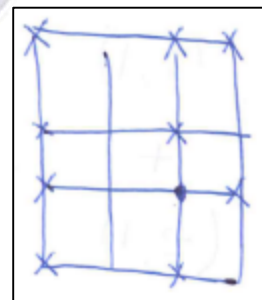


圖 4-1-9 靜態圖像表徵錯誤例

四、文字表徵

主要以文字敘述象棋馬的移動。直接描述棋子在棋盤上的移動(如圖 4-1-11)、借用象棋術語來形容(如圖 4-1-12)、借用數學術語來形容(如圖 4-1-13)均歸為此類。圖 4-1-12 雖然有誤用象棋術語情形，但大致上不影響資訊傳達，因此仍歸為正確例。

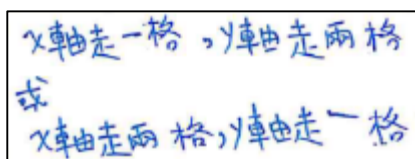


圖 4-1-13 文字表徵正確例一

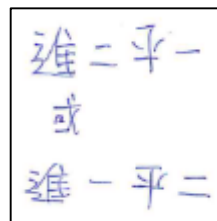


圖 4-1-12 文字表徵正確例二

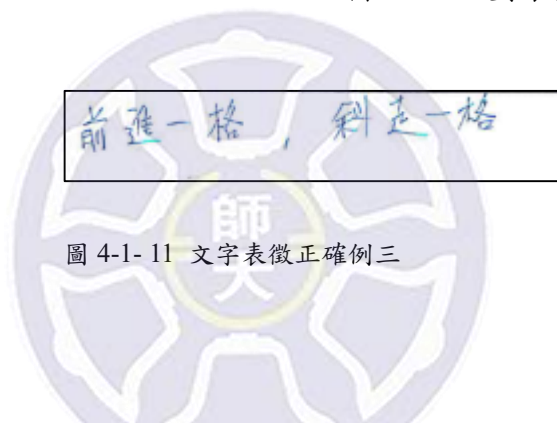


圖 4-1-11 文字表徵正確例三

五、多重表徵

使用了兩種以上的表徵，並且其中的每一種表徵都可以獨立表達象棋馬是如何移動，而非輔助其他表徵說明的關係。如圖 4-1-14，學生使用了箭頭圖像表徵、靜態圖像表徵、和坐標表徵。

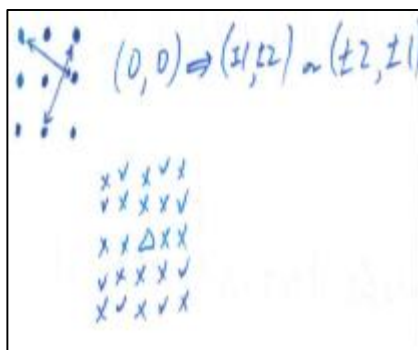


圖 4-1-14 多重表徵例一

由於本研究的學習單佈題時並未要求學生盡可能地使用多種表徵，而多數學生也只填寫了一種，所以能被觀察到使用此類表徵的學生數應該比實際上能使用的人數少。

六、點的坐標表徵

以坐標表達象棋馬下一步可移動到的位置。與靜態圖像表徵一樣，呈現的資訊更注重結果而非移動過程。使用此類表徵的學生只有一位，由他填答的幾

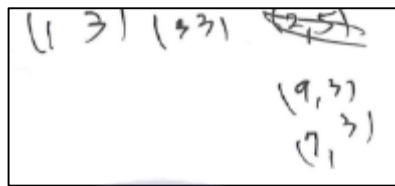


圖 4-1-15 點的坐標表徵例一

個點看來是受到情境影響，並未從一個固定的起點出發，而是填寫了象棋中己方兩隻馬分別走一步可移動到的位置(如圖 4-1-15)，並未完整表達所有象棋馬的移動，故歸為此類表徵正確但不完整之例。

七、向量的坐標表徵

以坐標表達象棋馬的移動，此種表徵即向量的坐標表示法。只有一位學生使用此種表徵，他列出方程式來輔助說明 x 分量與 y 分量的關係(如圖 4-1-16)，但並未包含到所有象棋馬的移動，歸為正確但不完整的例子。

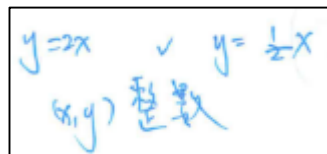


圖 4-1-16 向量的坐標表徵例一

貳、各類表徵的使用人數

以下將分別統計四個班級共 110 為學生使用前述七類表徵的人數、使用表徵的正確性及完整性。為求圖表呈現的簡潔，「箭頭擬動態圖像表徵」簡稱為「箭頭圖像」，「無箭頭擬動態圖像表徵」亦然。在使用表徵的正確性及完整性方面，若表徵已經使用錯誤，再討論完整性較不具意義，因此只分為「正確且完整」、「正確但不完整」、「錯誤」三個層次。

一、A1 班各類表徵的使用人數

表 4-1-2 A1 班各類表徵使用人數

表徵類型	人數(百分比)
箭頭圖像	24(69%)
無箭頭圖像	5(14%)
靜態圖像	4(11%)
文字	0(0%)
多重	1(3%)
坐標(點)	0(0%)
坐標(向量)	0(0%)
空白	1(3%)

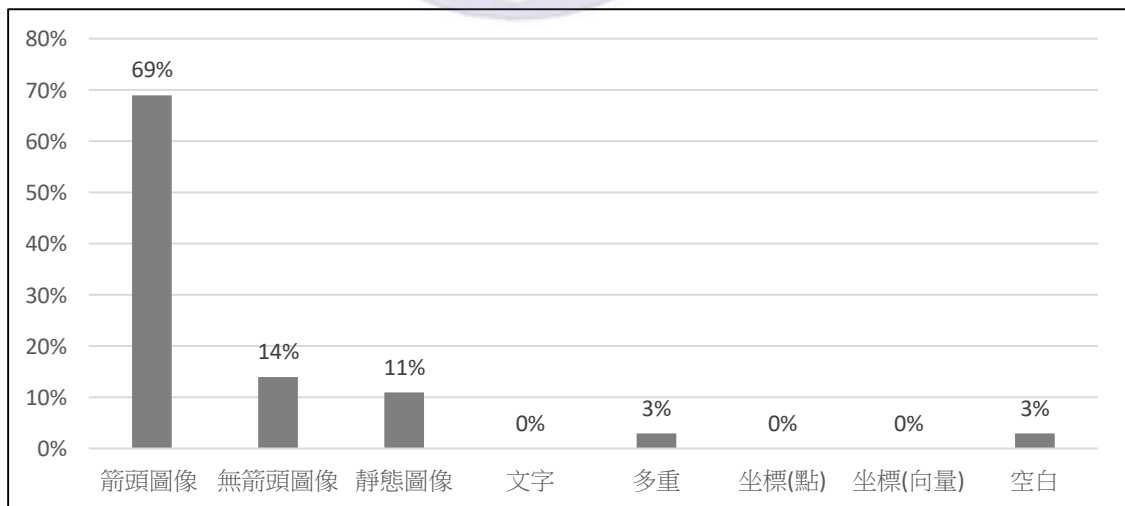


圖 4-1-17 A1 班學習前所用表徵之比例

如表 4-1-2，A1 班的 35 位學生中，使用箭頭擬動態圖像表徵的人數最多，而沒有任何人使用文字表徵和坐標表徵。若扣除空白的一位，所有填答的學生皆有用到圖像表徵，顯示以圖像呈現象棋馬的移動對 A1 班學生來說是最直接的方式。

表 4-1-3 A1 班學習前所用表徵的正確性與完整性

	人數(百分比)
正確且完整	26(74%)
正確但不完整	5(14%)
錯誤	4(11%)

如表 4-1-3，A1 班學生能正確且完整地使用表徵的人數約有四分之三，而使用錯誤的人數約一成，顯示對 A1 班學生來說，以自有表徵呈現象棋馬的移動並不算難。

二、A2 班各類表徵的使用人數

表 4-1-4 A2 班各類表徵使用人數

表徵類型	人數(百分比)
箭頭圖像	19(56%)
無箭頭圖像	4(12%)
靜態圖像	4(12%)
文字	4(12%)
多重	1(3%)
坐標(點)	1(3%)
坐標(向量)	1(3%)
空白	0(0%)

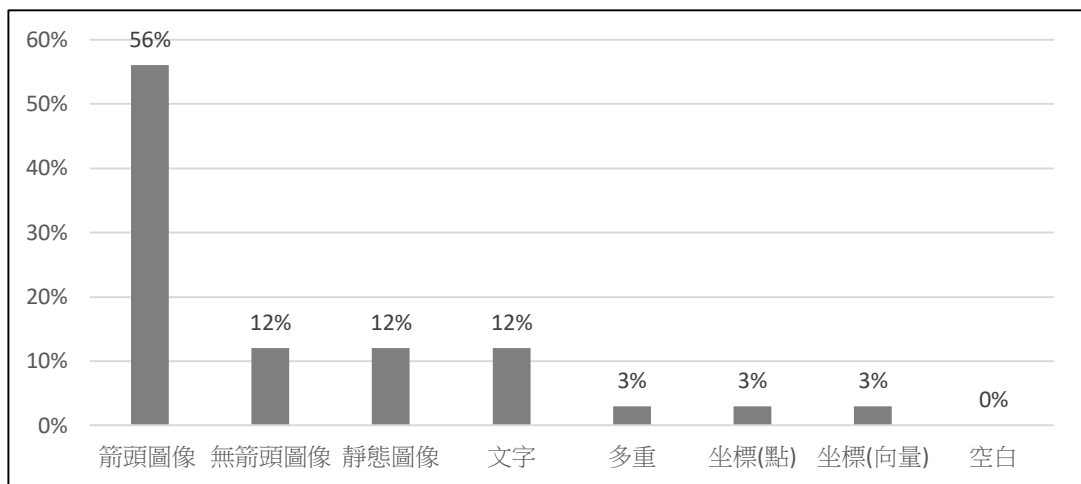


圖 4-1- 18 A2 班學習前所用表徵之比例

如表 4-1- 4，A2 班 34 位學生中，使用箭頭擬動態圖像表徵的人數最多，每一種表徵都有人使用並且沒有人空白。所有使用圖像表徵的人數佔八成；而呈現上更注重結果的靜態圖像表徵和點的坐標表徵合計約有一成五的學生使用。

表 4-1-5 A2 班學習前所用表徵的正確性與完整性

	人數(百分比)
正確且完整	28(82%)
正確但不完整	5(15%)
錯誤	1(3%)

如表 4-1-5，A2 班學生能正確且完整地使用表徵的人數約有八成，而使用錯誤的人數僅一人，顯示 A2 班學生在使用表徵時的正確性與完整性比 A1 班更好一些。

三、B1 班各類表徵的使用人數

表 4-1-6 B1 班各類表徵使用人數

表徵類型	人數(百分比)
箭頭圖像	12(67%)
無箭頭圖像	2(11%)
靜態圖像	0(0%)
文字	3(17%)
多重	0(0%)
坐標(點)	0(0%)
坐標(向量)	0(0%)
空白	1(6%)

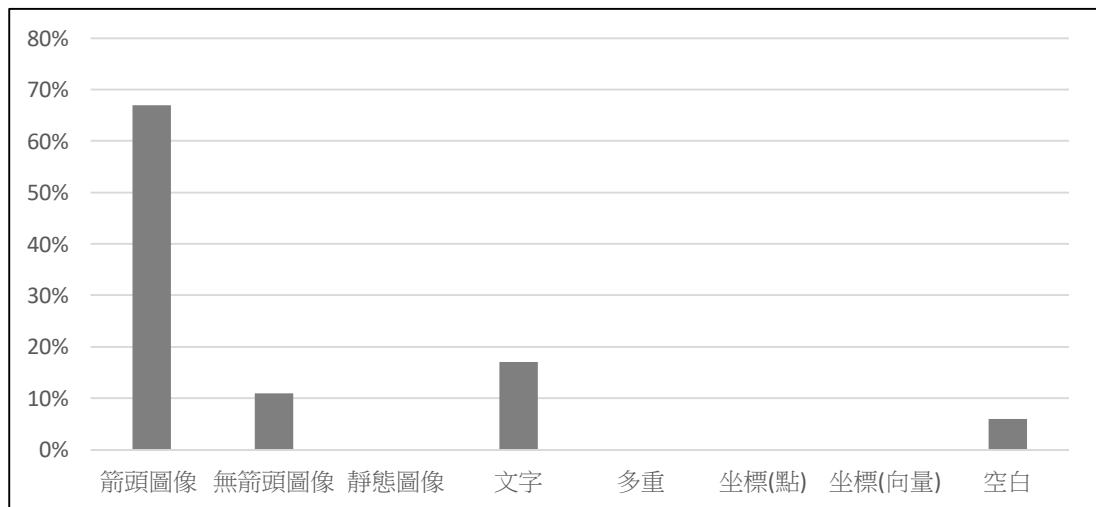


圖 4-1-19 B1 班學習前所用表徵之比例

如表 4-1-6，B1 班 18 位同學中，使用箭頭擬動態圖像表徵的人數最多，而圖像表徵、多重表徵、坐標表徵均無人使用。使用文字表徵的比例比 A 校兩班都多一些。

表 4-1-7 B1 班學習前所用表徵的正確性與完整性

	人數(百分比)
正確且完整	11(61%)
正確但不完整	5(28%)
錯誤	2(11%)

如表 4-1-7，B1 班使用表徵正確且完整的人數約佔六成，相較於 A1 班的七成多、A2 班的八成明顯更少。

四、B2 班各類表徵的使用人數

表 4-1-8 B2 班各類表徵使用人數

表徵類型	人數(百分比)
箭頭圖像	15(65%)
無箭頭圖像	3(13%)
靜態圖像	1(4%)
文字	3(13%)
多重	0(0%)
坐標(點)	0(0%)
坐標(向量)	0(0%)
空白	1(4%)

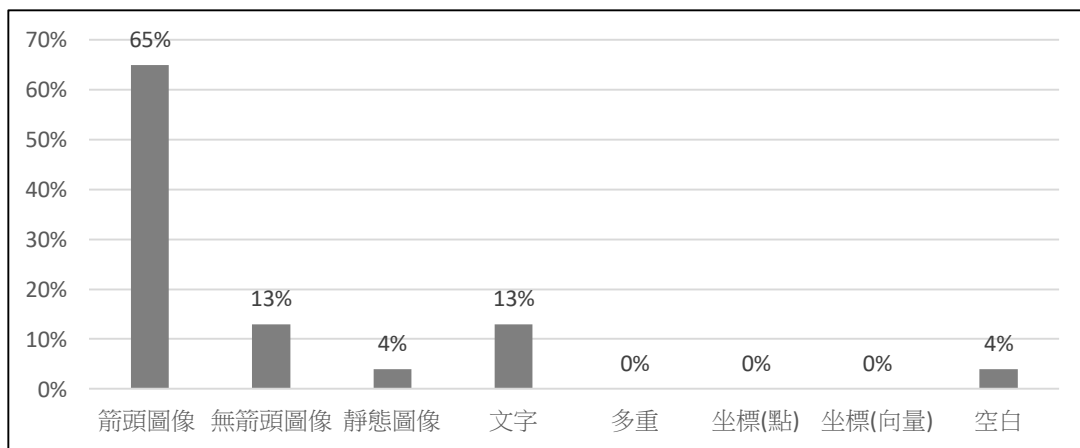


圖 4-1-20 B2 班學習前所用表徵之比例

如表 4-1-8，B2 班學生使用箭頭擬動態圖像表徵的人數最多，佔六成多，而所有使用圖像表徵的人數共佔八成多。B2 班沒有人使用坐標表徵和多重表徵，此情形與 B1 班相似，使用表徵的類型較 A1、A2 班集中於某幾類。

表 4-1-9 B2 班學習前所用表徵的正確性與完整性

	人數(百分比)
正確且完整	13(57%)
正確但不完整	7(30%)
錯誤	3(13%)

如表 4-1-9，B2 班學生正確且完整地使用表徵的人數近六成，而錯誤使用的人數約一成，情形與 B1 班相似。

五、四班使用表徵情形之比較

在使用表徵的種類方面，箭頭擬動態圖像表徵的使用率在四個班級都是最高，接著是無箭頭擬動態圖像、靜態圖像，而多重表徵、坐標表徵使用率最低。顯示箭頭擬動態圖像表徵是學生用來表達象棋馬的移動最直接的方式。A 校兩班使用的表徵較 B 校兩班多樣，主要差在坐標表徵、多重表徵在 B 校兩班均無人使用(A1 班的表格呈現上也是無人使用坐標表徵，但在多重表徵之中有包含坐標表徵)。

在使用表徵的正確性與完整性方面，正確使用的人數在所有四個班級都超過八成，顯示以表徵表達象棋馬的移動對四班學生來說並不算難。而 A 校兩班正確且完整使用的比例較 B 校兩班高出接近兩成，顯示 A 校學生能更好地使用表徵表達象棋馬的移動。

參、學習前後表徵轉換之情形

研究者從學生學習單中的教學部分及第六題(情境練習題)觀察學生學習後使用表徵之情形，並配合本節前述之分析，欲進一步整理得到學生學習前後表徵轉換之情形。學習單的第六題為求紀錄方便，題目中已使用向量的坐標表徵並引導學生以此表徵進行回答，故本段分析也會以坐標表徵為主。

在學習前，使用與向量的幾何表示法極為接近的箭頭擬動態圖像表徵人數已很多，且只有少數人使用錯誤，所以這些學生學習重點主要在於多學一種坐標表示法；使用無箭頭擬動態圖像表徵的學生類似於前者，並需要標示清楚方向；使用靜態圖像表徵和點的坐標表徵的學生需要更注重移動過程的呈現；使用文字表徵的學生則需要以更精簡地方式傳達資訊。

研究者發現所有學生經過教師教學後，在後續題目主要使用的表徵即教過的向量的幾何表示法和坐標表示法。若使用表徵時是單純表達象棋馬的移動，不牽涉說明原因等其他因素，所有學生均能正確使用此二種表徵。此情形顯示學生學習更能簡潔且清楚傳達資訊的此二種表徵並無困難。

第二節 學生解情境題之情形

本研究學習單中的第二題和第七題為情境題，如圖 4-2-1 和圖 4-2-2，兩題大意基本上相同，分別安排在向量教學的前後。研究者觀察這兩題的填答，並參考 PISA(2012)提出的解題三步驟與七個數學力分析學生解情境題之情形。

二、猜猜看，㊦能不能走遍棋盤？若你覺得能，請簡述你認為能夠走遍棋盤的原因；若你覺得不能，請提出你認為走不到的位置。

圖 4-2-1 學習單第二題之敘述

七、究竟㊦能不能走遍棋盤？前面已找到了好幾個位置的走法，但每個位置一一確認顯然沒有效率。有什麼方法能更好解決這個問題呢？
(提示：為什麼我們很確定㊦可以走遍棋盤？)

圖 4-2-2 學習單第七題之敘述

PISA(2012)提出了解題三步驟-「形成數學問題」、「使用數學」、「詮釋結果」與七個數學力-「溝通」、「數學化」、「使用表徵及轉換」、「推理及論述」、「構思解題策略」、「使用符號、正式的術語、和運算」、「使用數學工具」，又進一步交織成二十一個細項分別描述每個步驟中所展現的數學力。然而本研究是以學生填寫的學習單做分析，許多細項難以從學生填寫的內容中客觀地被觀察，因此本研究不會就每個細項逐一分析，而是找出能被觀察且影響較大的細項後做連帶分析。

研究者發現七個數學力中的「構思策略」是對整個解題過程影響最大的，其明顯地影響了後續的「推理及論述」，並可以再往前大略得知原本難以觀察的學生「形成數學問題」之情形。「構思策略」是一個內在的過程，因此研究者會從學生最終決定回答時所用的策略著手分析。另外，雖然本研究的情境題不是一定要用向量語言才能解題，但使用向量語言能更簡潔清楚地完成整個論述，因此與之相關的「使用符號、正式的術語、和運算」也是對此情境題影響很大的數學力。基於上述原因，本節將分成「學生採用證明策略之情形」、「使用向

量語言之情形」、及「三步驟與七數學力之綜合分析」三個部分探討。

壹、學生採用證明策略之情形

一、證明策略之判定標準

本研究學習單中的情境題，學生需要證明象棋馬能否走遍棋盤上的每個位置，因此研究者參考 Harel & Sowder(1998)提出依認知層次區分的三個證明策略，做些微調整以更合適用來將學生此二情境題的回答分類。

在三個證明層次之前研究者額外加入「空白或無意義」一層，無作答者或是作答內容對題目不具意義者均歸為此類(如圖 4-2-3)。

A rectangular box containing the handwritten text "我的馬什麼都做的到!!" in blue ink. The text is written in a casual, slightly slanted style.

圖 4-2-3 無意義證明例一

(一)外部信念證明策略

學生的證明主要是基於外部的因素時歸為此類，又可再細分為：

1. 儀式/格式證明策略：學生使用了某些看似是證明的格式、流程，但內容並非依題意進行合理推論。如圖 4-2-4，學生使用「因為…，所以…」的方式進行論述，但前後二句敘述不具直接的因果關係，且象棋馬如何移動到單位長內的每個位置也未說明。

A rectangular box containing the handwritten text "因為只要一點在5單位長之內移動就可到達下一點,如此持續延伸便能全部走完。" in black ink. The text is written in a casual, slightly slanted style.

圖 4-2-4 儀式證明策略例一

2. 權威證明策略：學生說明原因的方式是藉由權威來增加說服力，並非針對題目論述。最典型的例子像是「老師上課有說過」、「課本就是這樣寫的」。本研究之情境題不太可能出現於學生之前經歷過的課堂或課本中，因此這裡的權威主要是「象棋規則」、「象棋發明者」。如圖 4-2-5，學生認為棋盤當初的設計就不可能讓象棋馬移動不到所有的位置，而非正面回答為什麼馬能走遍棋盤。

因棋盤設計不可能允許這種情況發生

圖 4-2-5 權威證明策略例一

3. 符號證明策略：學生主要透過符號的操作完成證明，但符號的意義不明或是進行了不合理的操作。如圖 4-2-6，學生證明中的 X 、 Y 、 Z 均未說明其代表之意義，且並非只是表達不清的小錯誤，他人難以推測其意思。

可以
利用代數工具
↓
例：
 $X+Y+Z=5$
找 $X, Y, Z \in \mathbb{N}$ 解
 $H_2 = C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ 種可能
↓
去組合箱

圖 4-2-6 符號證明策略例一

(二)經驗證明策略

學生主要透過其經驗說明原因，又可細分為：

1. 歸納證明策略：學生舉數個例子驗證，並歸納出結論。由於本研究的學習單有附上棋盤方便學生以硬幣實際操作，因此在本題作答欄學生通常不會將其選用的例子填上(如圖 4-2-7)。儘管如此，可以推測學生得到結論的方法是透過找例子驗證並歸納，故歸為此類。



圖 4-2-7 歸納證明策略例一

2. 感官證明策略：學生以較初步的心智圖像判斷出結果後，進行直觀的推論(如圖 4-2-8)。

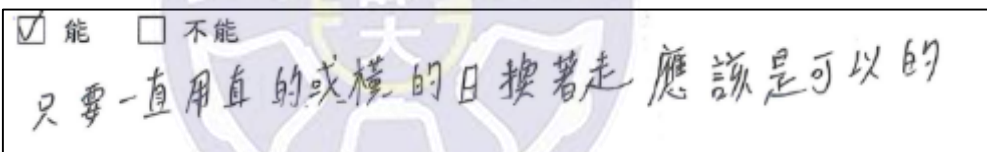


圖 4-2-8 感官證明策略例一

另外，有一類學生從回答內容看來不太符合歸納證明策略和感官證明策略，似乎到達下一個分析證明的層次，但研究者認為其證明的演繹推理有誤，推測學生之所以認為這樣的論述正確主要還是來自經驗，因此也歸為經驗證明策略。

如圖 4-2-9，學生欲利用向量加減法去湊出棋盤上每個位置所對應的坐標，然而 x 分量與 y 分量必須同時湊到才能確定走到該位置，分別湊到對應數字並不保證另一分量也能同時達到目標數字，也就還不能保證象棋馬能走遍棋盤上每個位置。研究者推測學生即使論述有誤，卻有把握用向量加

減法都能得到想要的結過，應該跟他操作了多次的經驗有關，因此仍然將其歸類為經驗證明策略而非分析證明策略。

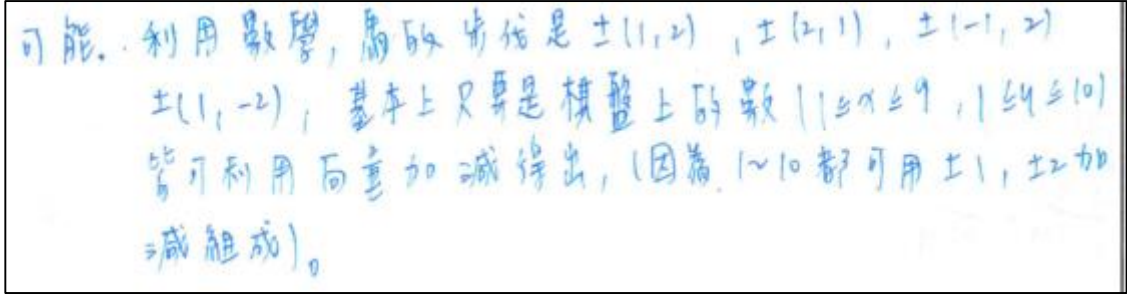


圖 4-2-9 經驗證明策略例一

(三)分析證明策略

學生的證明主要利用邏輯演繹推理，又可細分為：

1. 轉換證明策略：學生針對物件進行目標導向的變換操作，並以演繹推理的方式完成具一般性的證明。以本研究的情境題來說，學生主要是將棋盤上的所有位置變換成較小的區塊，像是二成二的方格(如圖 4-2-10)或是起點的前後左右四格(如圖 4-2-11)，在小區塊中說明如何走遍所有位置並類推至整個棋盤。

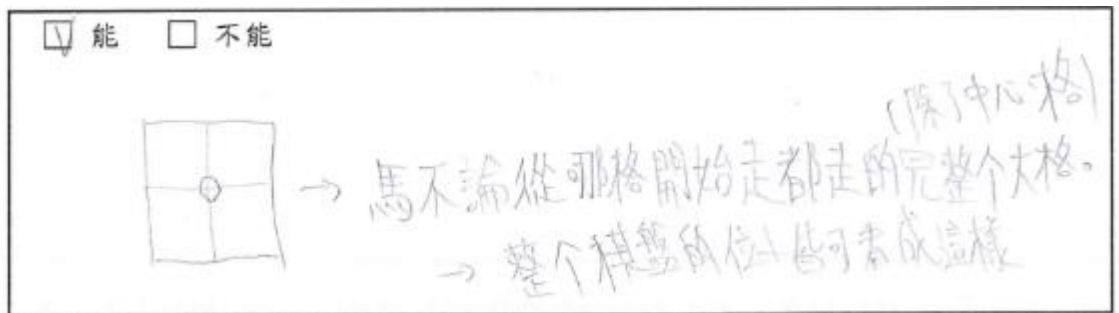


圖 4-2-10 轉換證明例一

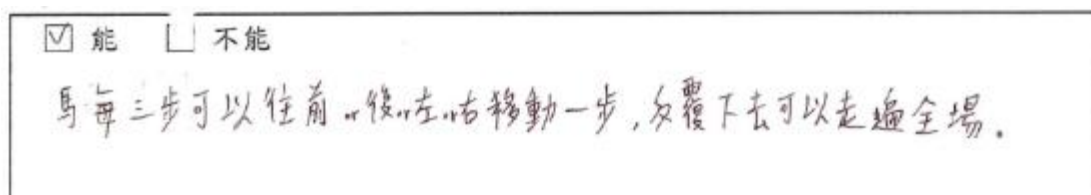


圖 4-2- 11 轉換證明例二

2. 公理證明策略：除了具備轉換證明策略的特性之外，學生能運用定理、公理進行證明。此類策略因本研究題目特性的關係，研究者推測應該沒有學生採用此策略回答，而實際上觀察回收之學習單也的確無人使用。

二、各層次證明策略在學習向量前後的使用人數

(一) A1 班各層次證明策略在學習向量前後的使用人數

A1 班的 35 位學生中，有一位在學習前認為象棋馬不能走遍棋盤上每個位置，並舉出他認為的反例做說明。雖然舉反例對於勾選「不能」來說是一個正確的策略，但實際上這題並沒有所謂的反例，研究者認為不適合歸類到任一個層次，因此和勾選「能」的其他 34 位學生分開討論。

表 4-2- 1 A1 班各層次證明策略的使用人數

證明策略	學習向量前	學習向量後
空白或無相關	7(20%)	7(20%)
外部信念	5(14%)	3(9%)
經驗	6(17%)	14(40%)
分析	16(46%)	11(31%)

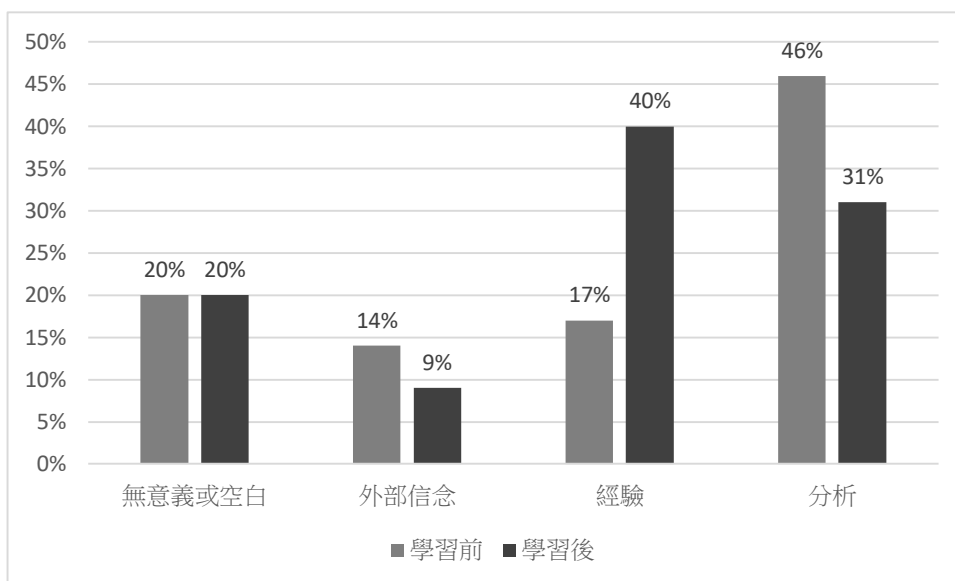


圖 4-2-12 A1 班各層次證明策略的使用人數

如表 4-2-1、圖 4-2-12，A1 班學生在學習前後均有兩成回答內容無意義或空白，而經驗層次和分析層次加總從學習前的六成多，學習後增多為七成，顯示多數學生的回答內容至少稍具說明效果，並在學習後些微提升。

證明到達分析層次的人數在學習後反而比學習前下降約一成，研究者觀察發現部分學生可能是因為認為自己在學習前已經回答正確，第二次回答就寫的比較隨性，而證明中一旦少了合理的邏輯演繹推理就難以被歸類為分析層次。在學習前或後至少有一次使用分析證明策略的人數接近六成。

(二) A2 班各層次證明策略在學習向量前後的使用人數

表 4-2-2 A2 班各層次證明策略的使用人數

證明策略	學習向量前	學習向量後
空白或無相關	4(11%)	2(6%)
外部信念	4(11%)	3(9%)
經驗	15(43%)	7(21%)
分析	10(29%)	22(65%)

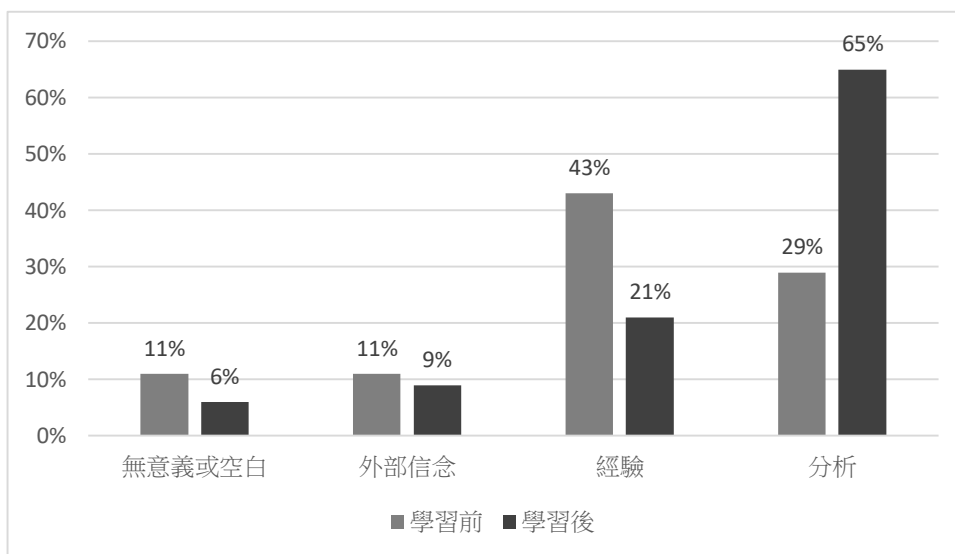


圖 4-2-13 A2 班各層次證明策略的使用人數

A2 班也有一位學生在學習前勾選不能並舉反例，同前述理由與其他同學分開討論。如表 4-2-2、圖 4-2-13，A2 班學生在學習前約有一成學生回答內容無意義或空白，而學習後下降一半，明顯比 A1 班低。經驗層次與分析層次加總從學習前的七成多，提升至學習後的八成多，回答內容至少稍具效果者佔大多數，並比 A1 班多出約一成。使用分析證明策略的學生在學習前約佔三成，學習後提升至六成多，變化超過兩倍，顯示經學習過程激發了學生思考，並進一步提升使用的證明策略層次。

(三)B1 班各層次證明策略在學習向量前後的使用人數

表 4-2-3 B1 班各層次證明策略的使用人數

證明策略	學習向量前	學習向量後
空白或無相關	15(83%)	17(94%)
外部信念	3(17%)	0(0%)
經驗	0(0%)	1(6%)
分析	0(0%)	0(0%)

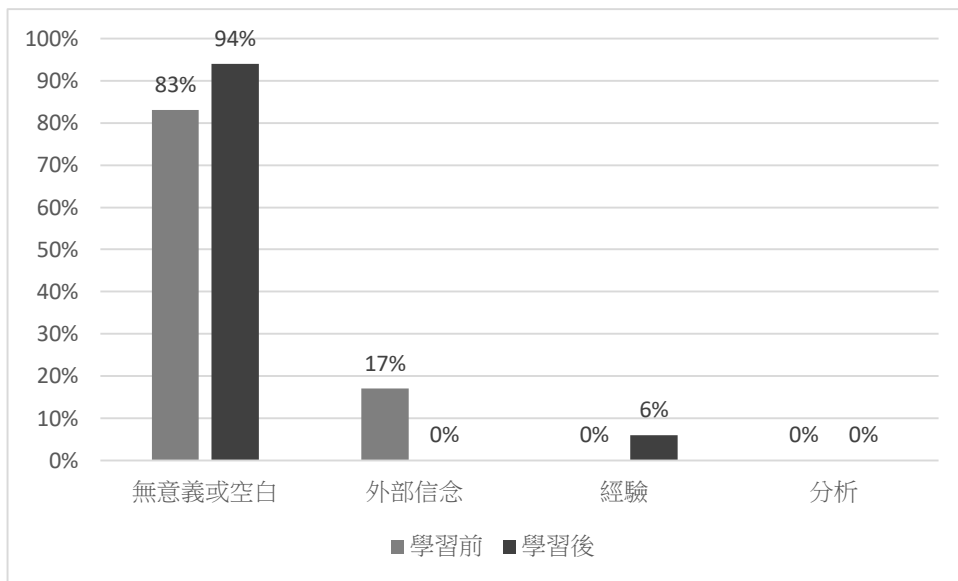


圖 4-2-14 B1 班各層次證明策略的使用人數

如表 4-2-3、圖 4-2-14，B1 班學生無論學習前後均沒有人到達分析證明策略，幾乎都屬無意義或空白的回答，僅一位學生在學習後使用經驗證明策略。這顯示約七分鐘的時間不足以讓 B1 班學生構思出此題較具說服力的證明，或者學生並不認為自己所構思的內容算是證明而沒有寫出，且這情形經過短時間的學習也難以改變。

(四) B2 班各層次證明策略在學習向量前後的使用人數

表 4-2-4 B2 班各層次證明策略的使用人數

證明策略	學習向量前	學習向量後
空白或無相關	12(52%)	---
外部信念	2(9%)	---
經驗	8(35%)	---
分析	1(4%)	---

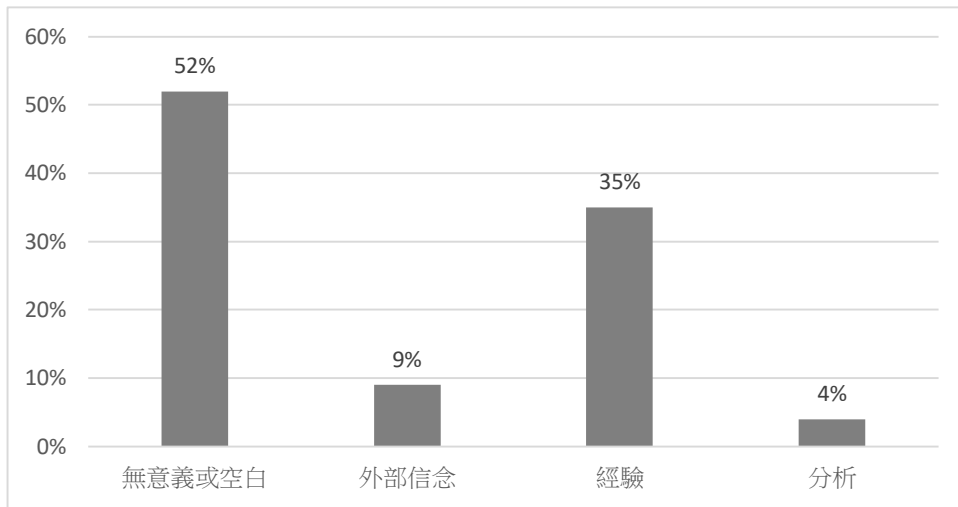


圖 4-2- 15 B2 班學習前各層次證明策略的使用人數

如表 4-2- 4、圖 4-2- 15，B2 班學生學習前約有半數回答內容無意義或空白，經驗層次與分析層次人數加總約占四成。

B2 班情形較為特殊，原課程設計是等學生學習單回收後教師才解釋該題作法，但原班教師解釋前尚未收回學習單，是以口頭提醒學生不要更改，保留自己的答案。因此研究者觀察到學習後非空白的學生回答均與原班教師在黑板上寫的證明相同，並且幾乎一字不漏，因此無法進行分析。

B2 班學生在學習前約有四成能寫出稍具證明效果的論述，然而學習後不是空白就是照抄板書，顯示「權威」的影響甚大，看了教師的證明版本之後可能不認為自己寫的算是證明。

貳、學生於證明中使用向量語言之情形

一、學生使用向量語言程度之判定

研究者觀察學生第七題的回答內容，欲了解學生在學習後將前面學過的向量語言使用在證明中之情形，這代表著學生是否有意圖和能力將學過的數學概

念使用於解決情境問題。學生在本研究素養導向課程中會學過的數學概念包含向量的概念、向量的表示法、向量的相等、可平移、反向量、向量的加減法、係數積、向量加法的性質。研究者將學生於證明中使用向量語言的程度分為三層，「無」、「有誤或不完整」、「正確且完整」，分類標準與範例如下：

(一)「無」：

學生回答內容幾乎沒有使用學過的向量語言。如圖 4-2-16，學生雖提到「向量」，但並沒有運用向量語言來論述，因此歸類為無使用向量語言。

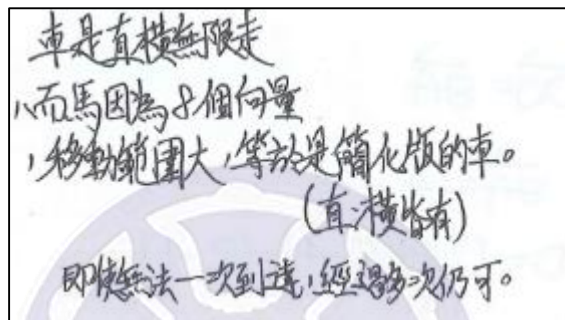


圖 4-2-16 無使用向量語言例一

無使用向量語言的學生大部分使用的證明策略為「無意義或空白」、「外部信念」，不過仍有少數使用的證明策略為「分析」（如圖 4-2-17）。

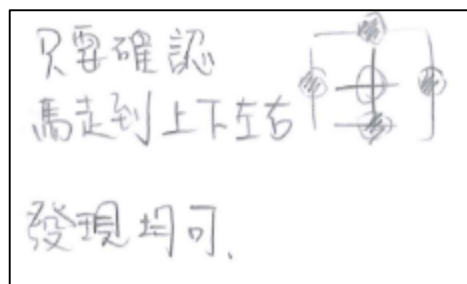


圖 4-2-17 無使用向量語言例二

(二)「有誤或不完整」

學生回答內容有使用學過的向量語言，但是過程中有誤或有些能幫助論述更完整的概念只是稍微提及。如圖 4-2- 18，學生欲使用代表象棋馬移動的向量相加得到跟象棋車一樣的向量，藉此說明馬可以走遍棋盤，但在表示車的移動向量上寫成(1,1),應為(1,0)，因此歸類為使用有誤。

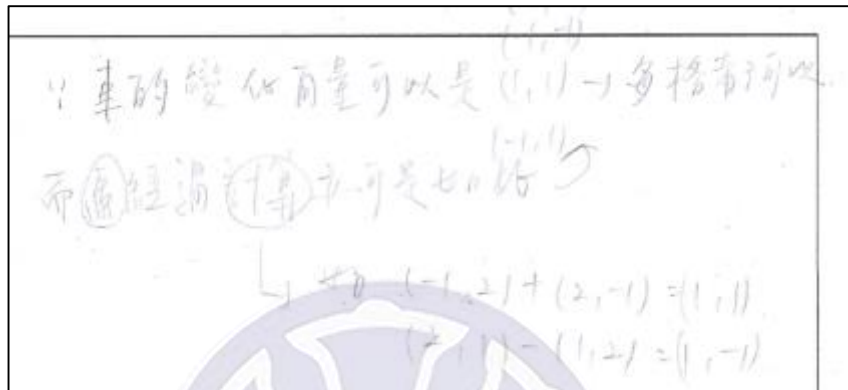


圖 4-2- 18 使用向量語言有誤或不完整例一

如圖 4-2- 19，學生明白湊出前、後、左、右移動一格之向量即代表馬能走遍棋盤，並利用反向量的方式兩兩一組表達，然而向量加法及其性質、係數積也是前面學過的內容，並且對於將論述寫得更完整有幫助，而學生卻沒有這麼做，只用「湊出」帶過，因此歸為有使用向量語言但不完整。

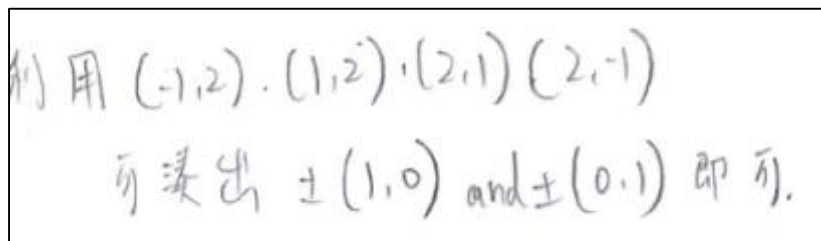


圖 4-2- 19 使用向量語言有誤或不完整例二

(三) 「正確且完整」

學生的回答內容使用了前面學的向量語言，並盡量利用之以完成論述。如圖 4-2- 20，學生使用代表象棋馬移動的向量，透過加減法運算得到代表移動前、後、左、右一格的向量，並藉此得知馬可以走遍棋盤。其中用到前面所學的向量語言時均有完整寫出過程，而非帶過，故歸為此類。

$$\begin{aligned} \text{前 } (1,0) &= (1,-2) + (2,1) + (-2,1) \quad (90^\circ) \\ \text{後 } (0,-1) &= (1,2) + (-2,-1) + (1,-2) \quad (180^\circ) \\ \text{左 } (-1,0) &= -(1,0) \quad (270^\circ) \\ \text{上 } (0,-1) &= -(0,1) \quad (0^\circ) \end{aligned}$$

可任意點(位置)皆可

圖 4-2- 20 使用向量語言正確且完整例一

二、各班於證明中使用向量語言之情形

(一) A1 班於證明中使用向量語言之情形

表 4-2- 5 A1 班學生使用向量語言之情形

使用向量語言程度	人數
無	10(29%)
部分有誤或不完整	21(60%)
正確且完整	4(11%)

如表 4-2- 5、圖 4-2- 21，A1 班學生在學習後將向量語言用於證明中的人數約佔七成，顯示多數學生有意圖且有將所學用於解情境題。使用向量語言到達「正確且完整」程度者約佔一成，顯示所學概念有部分不夠成熟到能用以解情境題。

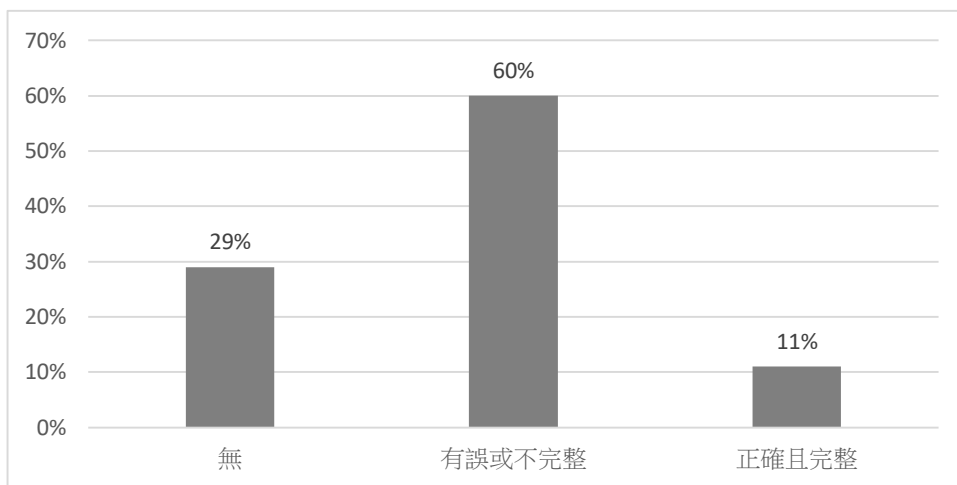


圖 4-2- 21 A1 班學生使用向量語言之情形

(二) A2 班於證明中使用向量語言之情形

表 4-2- 6 A2 班學生使用向量語言之情形

使用向量語言程度	人數
無	21(62%)
部分有誤或不完整	8(24%)
正確且完整	5(15%)

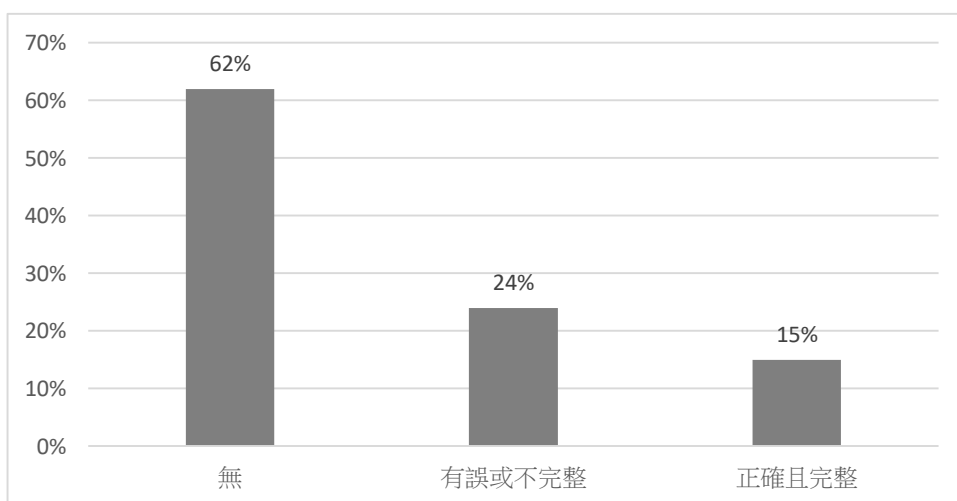


圖 4-2- 22 A2 班學生使用向量語言之情形

如表 4-2-6、圖 4-2-22，A2 班學生在學習後有六成並無利用學過的向量語言於證明中，比例約是 A1 班的兩倍。對比 A2 班學習後使用的證明策略之情形，「無意義或空白」與「外部信念」人數加總不到兩成，顯示無使用向量語言於證明中的學生大部分是來自較高層次的「經驗」與「分析」。再對比 A2 班學習前後使用證明策略之情形，分析證明策略人數增幅超過兩倍，此現象顯示對 A2 班學生來說，學習幫助他們提升了所用證明策略的層次，但在使用數學語言於情境題上沒有明顯效果。

(三) B1 班於證明中使用向量語言之情形

表 4-2-7 B1 班學生使用向量語言之情形

使用向量語言程度	人數
無	17(94%)
部分有誤或不完整	1(6%)
正確且完整	0(0%)

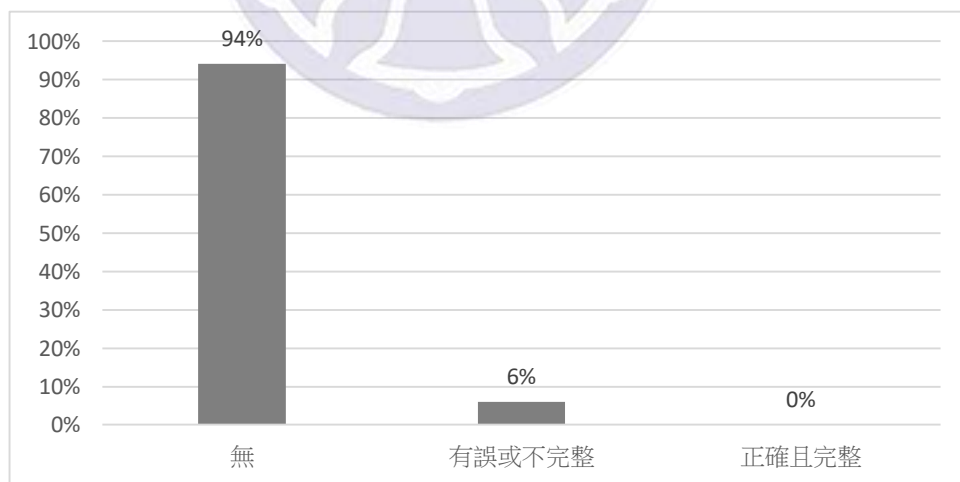


圖 4-2-23 B1 班學生使用向量語言之情形

如表 4-2-7、圖 4-2-23，A1 班無使用向量語言於證明中的人數超過九成，而 A1 班有同樣比例的學生學習後證明策略為「無意義或空白」，這個層次的證

明自然不會有用到任何數學語言，所以研究者認為此情境題難度對於 B1 班學生來說過高，也就難以展現數學素養。

(四) B2 班於證明中使用向量語言之情形

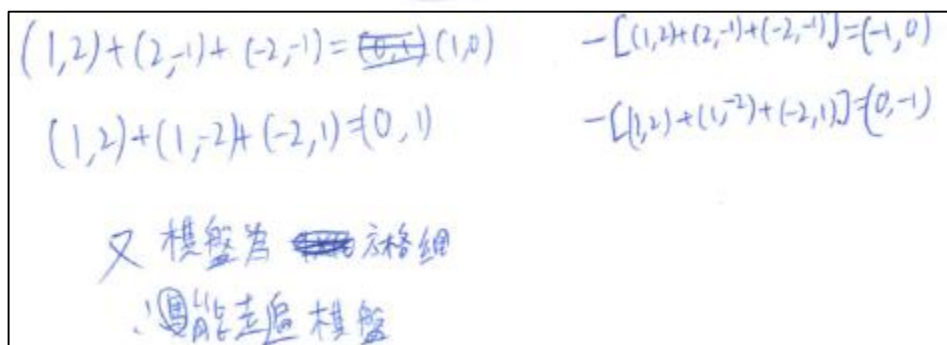
前述證明策略之情形時有提到，B2 班學生學習後證明非空白即照抄教師板書，因此也無法分析學生將向量語言運用於情境題中之情形。

參、學生解題三步驟與七數學力展現之情形

一、形成數學問題

研究者發現幾乎所有學生在回答時都不會明確地把從情境問題形成的數學問題寫出來，其填寫內容幾乎都是從「運用數學解題」步驟開始。

如圖 4-2-24，學生填寫的第一句就是利用向量加法去得到解題所需的向量，已經開始運用數學解題，因此只能從其解題方式回推學生腦中可能形成的數學問題。



Handwritten student work showing vector calculations and a note about a grid:

$$(1,2) + (2,-1) + (-2,-1) = \text{~~(0,0)}~~ (1,0) \quad -[(1,2) + (2,-1) + (-2,-1)] = (-1,0)$$
$$(1,2) + (1,-2) + (-2,1) = (0,1) \quad -[(1,2) + (1,-2) + (-2,1)] = (0,-1)$$

又棋盤為 ~~6x6~~ 格細
! 能走遍棋盤

圖 4-2-24 學生回答內容沒有呈現「形成數學問題」例一

此例中可看出，學生是將情境題中的「棋盤上的位置」，分解成最小基本單位，即「一格」。再將「象棋馬的移動」、「移動一格」都以向量的坐標表示法表達。在「形成數學問題」步驟中，此例主要展現了三個數學力，分別是「溝通」-正確理解情境並形成心智模型、「數學化」-辨識出重要元素，並將棋盤視為可操作的物件並分割、「使用表徵」-使用向量表示法表達。

研究者發現所有使用「分析證明策略」的學生，在形成數學問題時都與上述例子極為相似。其中比較細微的差別是分解棋盤時，學生分成較小單位的「排」、「區塊」，或是最小單位的「起點附近一格」。在學習前，多數學生分解棋盤是到「排」、「區塊」，而學習後有較多人分解至「起點附近一格」。如圖 4-2-25、圖 4-2-26，同一位學生在學習前將棋盤解成「排」，而學習後分解成上下左右「一格」。

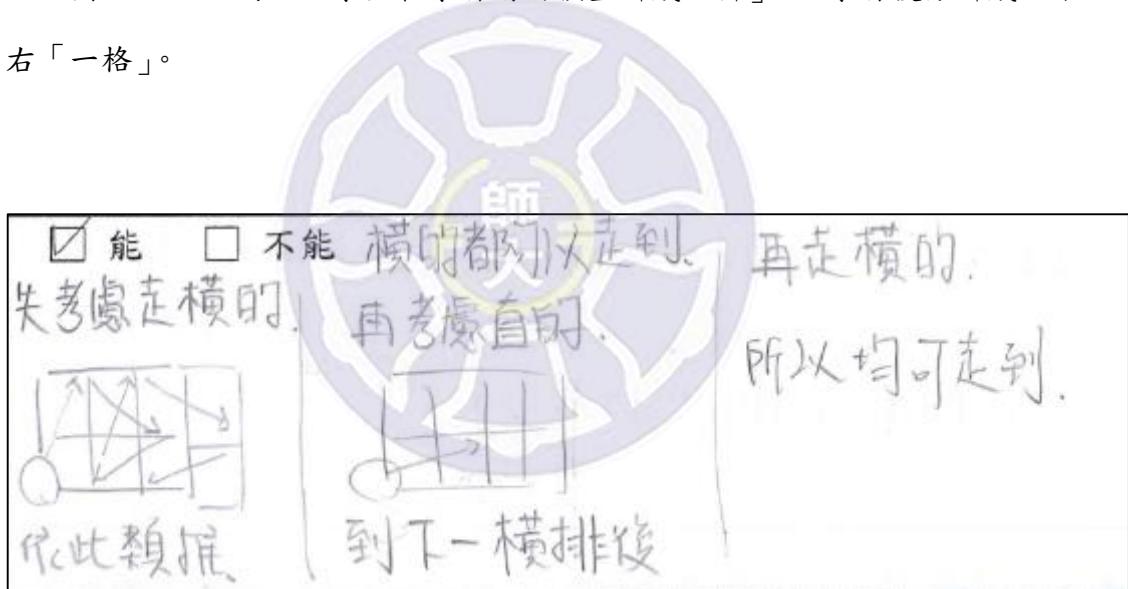


圖 4-2-25 某位學生學習前分割棋盤的情形

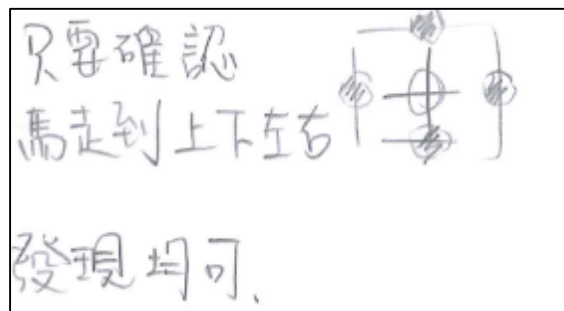


圖 4-2-26 某位學生學習後分割棋盤的情形

如圖 4-2-27，使用的證明策略為「經驗」的學生，在形成問題時最明顯的特徵是缺少了前段所述例子中將棋盤視為可操作的物件。在學習前，大多數學生雖然能將象棋馬的移動以自有表徵表示，但操作上仍與下棋時非常相似，是一步一步地走。而學習後使用經驗證明策略的學生超過一半能運用向量概念進行操作，如平移、加減法等等。

A rectangular box containing handwritten Chinese text. The text reads: "使用向量可以平移, 運用第一題的圖, 平移完發現所有點皆可到。" (Using vectors can translate, using the diagram from the first question, after translating, it is discovered that all points can be reached.)

圖 4-2-27 學生回答內容沒有呈現「形成數學問題」例二

證明策略為「外部信念」的學生之中，細項分類為「權威」者如圖 4-2-28 並無明顯將情境問題轉化為數學問題的證據，因此推測此類學生對題目的理解是按照敘述字面上的意思。而細項分類為「符號」、「儀式/格式」者如圖 4-2-29 有部分與「經驗」證明策略者類似，是將象棋馬的移動以表徵表達並操作之。

A rectangular box containing handwritten Chinese text. At the top left, there are two checkboxes: the first is checked and followed by the character "能" (can), and the second is unchecked and followed by "不能" (cannot). Below this, the text reads: "因棋盤設計不可能允許這種情況發生" (Because of the chessboard design, it is impossible to allow this situation to occur.)

圖 4-2-28 學生回答內容沒有呈現「形成數學問題」例三

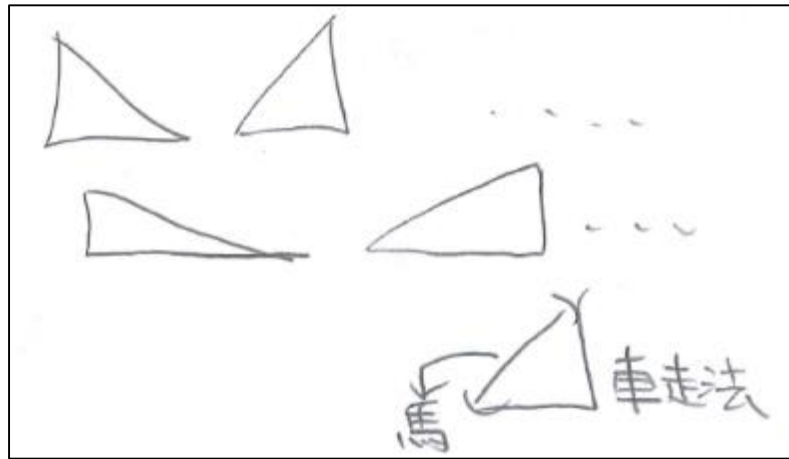


圖 4-2-29 學生回答內容沒有呈現「形成數學問題」例四

由於 A 校兩班學習前後使用「分析證明策略」的人數分別約三成多、四成多，而 B 校兩班只有一人在學習前使用「分析證明策略」，依此推測高程度學生「形成數學問題」步驟時已有困難，未將重要元素之一的棋盤視為可操作、轉換之物件，進而影響後續解題。

二、運用數學解題

如圖 4-2-30，所有使用「分析證明策略」的學生在「推理及論述」時均為合理的邏輯演繹，想法與數學歸納法相似，先在被分割成若干較小單位的棋盤上證明後，將初步結果類推到整面棋盤。

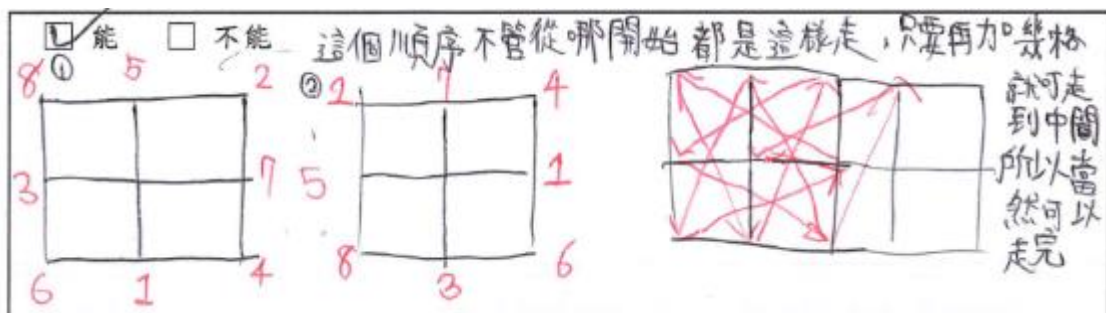


圖 4-2-30 使用分析證明策略的學生推理論述之情形例一

使用「分析證明策略」的學生中，有部分學生在七數學力中「溝通」上的展現不佳，其填寫的內容較為簡略需要讀者加以猜測才能理解。如圖 4-2-31，由學生提到的「4X4、5X5」和勾選「能」來判斷他的想法應該和圖 4-2-30 的學生類似，是藉由在較小單位的棋盤上得證後再進一步得知整面棋盤上的結果。

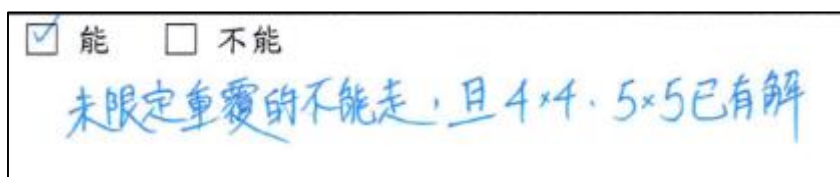


圖 4-2-31 使用分析證明策略的學生推理論述之情形例二

未清楚呈現自己的證明此一現象，除了跟數學力「溝通」有關之外，在學習前尚未具備向量語言所寫的證明、及學習後未使用向量語言證明的學生，相較於有使用向量語言證明的學生更明顯，因此研究者認為此現象也與另外兩個數學力「使用表徵」、「使用符號、正式術語、和操作」有關。如圖 4-2-33 與圖 4-2-32，這兩張圖為同一位學生在學習前後所寫的證明，均使用分析證明策略。學習前學生畫圖說明在 2X2 的小棋盤上馬可以走遍每個位置，以此推論整面棋盤也同樣可以。使用的表徵是與向量的幾何表示法相同的自有表徵，並試圖以不同顏色來呈現走的順序。雖然在概念上是可以將馬移動出去再回到中間點以補足證明的完整性，但可能受限於小棋盤的邊界與畫圖的呈現，學生並沒有這樣做。

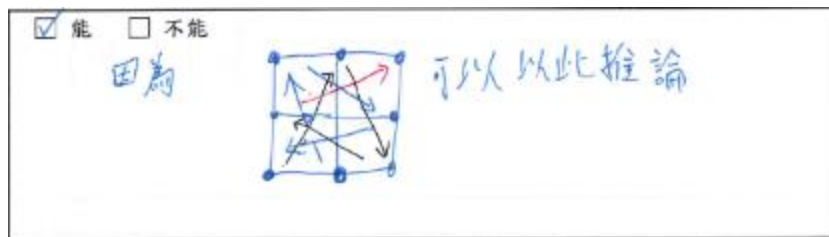


圖 4-2-33 使用分析策略之證明學習前後對比(前)

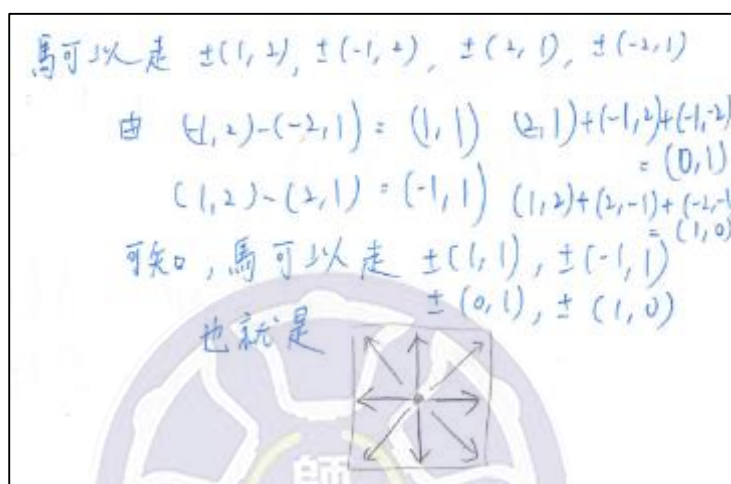


圖 4-2-32 使用分析策略之證明學習前後對比(後)

而學習後學生使用向量的坐標表徵將象棋馬的移動以及八個方位移動都表示出來，並利用反向量、向量加減法及其性質將兩者串聯，最後輔以畫圖說明從中間點出發能移到小棋盤上所有的位置。這位學生學習前後證明的想法幾乎是一樣的，但學習後利用向量概念的證明就無需讀者加以想像、猜測。

多數使用「經驗證明策略」的學生在「推理及論述」時是歸納推理，從目前觀察到的數個例子來推測整個棋盤上所有的狀況，因此得到的結論並不保證正確。多數此類學生在「溝通」數學力上的展現不佳，研究者推測可能是受到書寫上較不方便影響，如圖 4-2-34，學生僅敘述他嘗試後認為所有位置都能走到，但並未列出實例。此現象在學習前後狀況類似，顯示這與是否學習向量概念較無關係，更可能是學生書寫證明時習慣的問題。

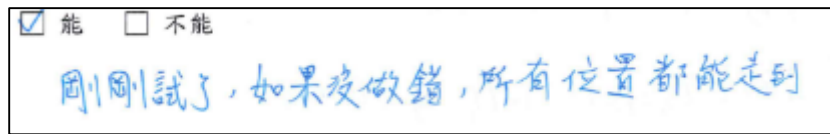


圖 4-2-34 使用經驗證明策略的學生在「溝通」數學力上展現不佳例一

使用「外部信念」證明策略的學生中，細項分類為「權威」者幾乎無法寫出自己的論述，所以其「推理及論述」的方式為找一個具說服力的人、事、物來佐證自己想說明的結論。細項分類為「儀式」者，研究者猜測他們原本可能是想用演繹推理的方式，但其中邏輯有誤，也就導致對讀者來說其論述只有表面格式像證明。而細項分類為「符號」者，因為他們並未寫清楚符號的意義，以及如何串聯起情境中的重要元素，故難以判斷其推理論述的方式。

數學力「使用符號、正式術語、和操作」在「運用數學解題」步驟中相當重要，不過已經在前面「學生於證明中使用向量語言之情形」單獨報導過，故不再此贅述。

三、詮釋結果

與「形成問題」的情形類似，多數學生不會特別解釋清楚他在「運用數學解題」得到的結果套回情境做詮釋，甚至有些學生的回答內容是寫到解題階段為止，就直接勾選答案。研究者發現只有部分使用「分析證明策略」的學生，會將其在「運用數學解題」得到的結果套回情境做詮釋，使用「經驗」、「外部信念」證明策略的學生幾乎沒有這個步驟。如圖 4-2-35，學生利用向量拼湊出了八個向量後，畫圖解釋在棋盤上這些向量所代表的意義。

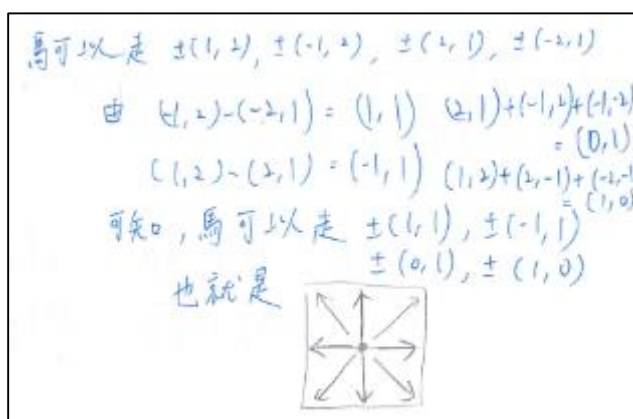


圖 4-2-35 於情境中詮釋運用數學步驟得到的結果例一

其他學生多半是如圖 4-2-36，在得到可用來說明馬走遍棋盤的關鍵幾個向量之後，便一句因此馬可走遍棋盤，不會套回情境中詮釋。研究者認為比起某個數學力的展現不足，這更可能是學生習慣使然，平常解出題目後便趕緊勾選答案，並將這個習慣帶到證明題中。

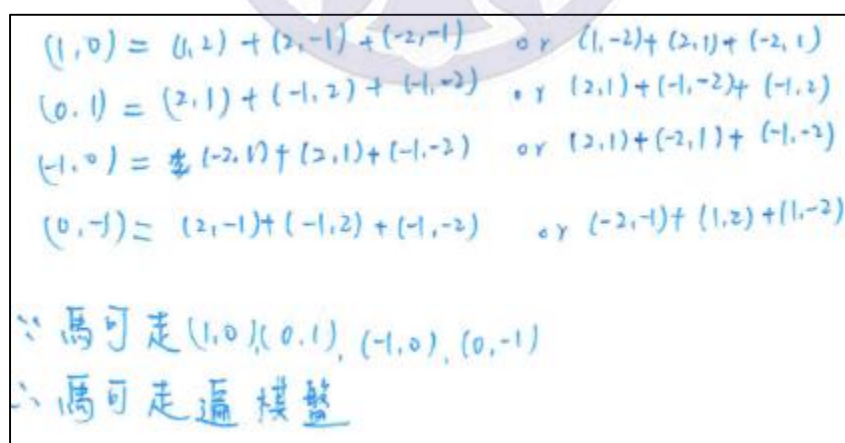


圖 4-2-36 沒有於情境中詮釋運用數學得到的結果例一

從另一個角度來分析「詮釋結果」，「學生寫出什麼樣的論述、得到什麼樣的結果就會認為象棋馬可以走遍棋盤？」，由於本研究的學習單沒有設計「哪些

證明能說服你象棋馬可以走遍棋盤？」這類的題目，無法與學生自己所寫證明對照，進而得知學生是因為寫不出更高認知層次的證明，或是學生真的認為原本所寫的證明就具說服力，因此研究者只能單從學生所填寫的回答內容當作其認定為具說服力的證明作分析。而這部分已經包含在前面「學生採用證明策略之情形」，故在此不再贅述。



第三節 學生解數學題之情形

本研究學習單在最後佈置了兩題(共四小題)數學題由學生自行作答，題目選自南一版高中數學課本第三冊，第三章第一節平面向量的運算單元中的例題 2 及例題 5 的隨堂練習，並稍作修改。

如圖 4-3-1，第一題分成三個小題，解題所需的主要概念為向量分解，並以兩個給定的向量表示之。第一小題目標向量為兩個給定的向量相加，第二小題目標向量為兩個給定的向量相減，第三小題則需要較多步驟，解法之一為將給定向量做平移、放大適當倍數後組成向量加法的三角形。如圖 4-3-2，第二題給定一個平行四邊形，並給其中三個頂點的坐標，求另一頂點坐標。解題所需的主要概念為向量平移後仍相等。

一、如右圖， O 為正六邊形 $ABCDEF$ 的中心，請回答下列各題 a, b 之值。

(1) $\overrightarrow{AO} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{BF} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{EA} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$



圖 4-3-1 學習單數學題 1

二、如右圖， $A(3, -2), B(-1, 2), C(2, 3)$ 為平面上三點，若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，試求 D 點坐標。

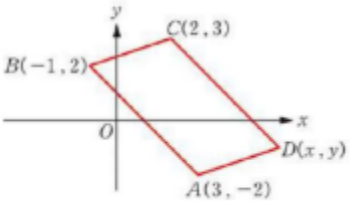


圖 4-3-2 學習單數學題 2

這兩題都不是難度高的題目，不過課程中都是在象棋情境中使用上述概念，並沒有任何例題示範在純數學情境中如何解題，因此研究者從學生在這兩題的答題情形分析學生學習遷移之情形。

壹、各數學題答對率之分析

一、四班學生數學題 1.1 之答對率

表 4-3-1 四班學生數學題 1.1 之答對率

班級(總人數)	A1(35)	A2(34)	B1(18)	B2(23)
答對人數	29	26	8	12
(百分比)	(83%)	(76%)	(44%)	(52%)

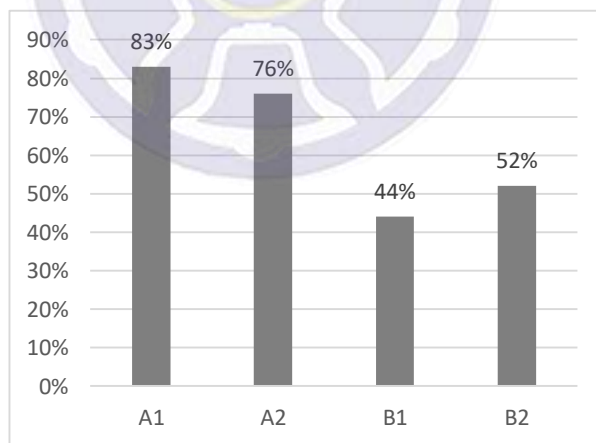


圖 4-3-3 四班學生數學題 1.1 之答對率

如表 4-3-1、圖 4-3-3，A1 班有超過八成學生能在學習後，不經例題示範答對數學題 1.1。而 B1 能答對數學題 1.1 的學生不到一半，答對率最低。

同校兩班比較起來答對率接近，而兩校之間答對率有差距。A 校兩班約有

八成學生能答對數學題 1.1，而 B 校兩班有近五成能答對數學題 1.1，兩校答對率差距約三成。

二、四班學生數學題 1.2 之答對率

表 4-3-2 四班學生數學題 1.2 之答對率

班級(總人數)	A1(35)	A2(34)	B1(18)	B2(23)
答對人數	22	23	7	7
(百分比)	(63%)	(68%)	(39%)	(30%)

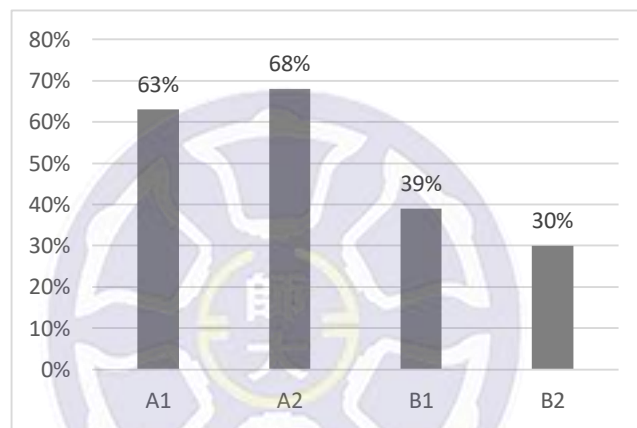


圖 4-3-4 四班學生數學題 1.2 之答對率

如表 4-3-2、圖 4-3-4，A2 班有近七成學生能不經例題示範答對數學題 1.2，在四班中答對率最高。而 B2 班有三成能答對數學題 1.2，答對率最低。

同校兩班比較起來答對率接近，而兩校之間答對率有差距。A 校兩班約有六成五學生能答對數學題 1.2，而 B 校兩班約三成多能答對數學題 1.2，兩校答對率差距約三成。

數學題 1.2 與數學題 1.1 解題所需觀念分別為向量分解中的向量加法和向量減法，雖然向量減法可以看成加上反向量，但數學題 1.2 答對率較 1.1 低了約一成五，顯示這仍然對一些學生造成的答題上的困難。

三、四班學生數學題 1.3 之答對率

表 4-3-3 四班學生數學題 1.3 之答對率

班級(總人數)	A1(35)	A2(34)	B1(18)	B2(23)
答對人數	16	17	5	4
(百分比)	(46%)	(50%)	(28%)	(17%)

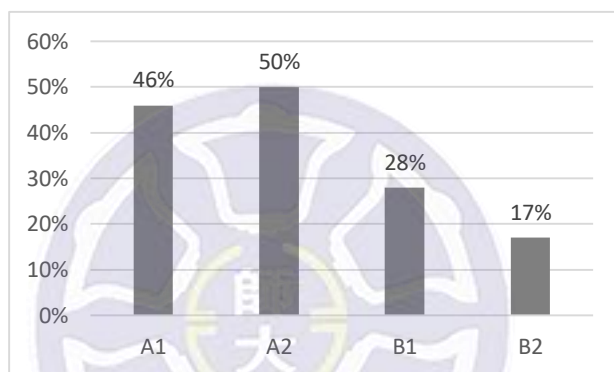


圖 4-3-5 四班學生數學題 1.3 之答對率

如表 4-3-3、圖 4-3-5，A2 班有五成學生能不經例題示範答對數學題 1.3，在四班中答對率最高。而 B2 班學生不到兩成能答對數學題 1.3，答對率最低。

A 校兩班答對率接近，B 校兩班則約相差一成。A 校兩班約有接近一半的學生能答對數學題 1.3，而 B 校兩班約兩成多能答對數學題 1.2，兩校答對率差距約兩成多。

數學題 1.3 解題需利用向量加法及其性質、平移、反向量進行較多步驟的向量分解，佈題時即可猜測學生在這題會遇到最多困難，而實際上學生整體答對率也比單純利用向量加法、減法的數學題 1.1、1.2 分別低了約三成、一成五。

四、四班學生數學題 2 之答對率

表 4-3-4 四班學生數學題 2.1 之答對率

班級(總人數)	A1(35)	A2(34)	B1(18)	B2(23)
答對人數	30	31	13	10
(百分比)	(86%)	(91%)	(72%)	(43%)

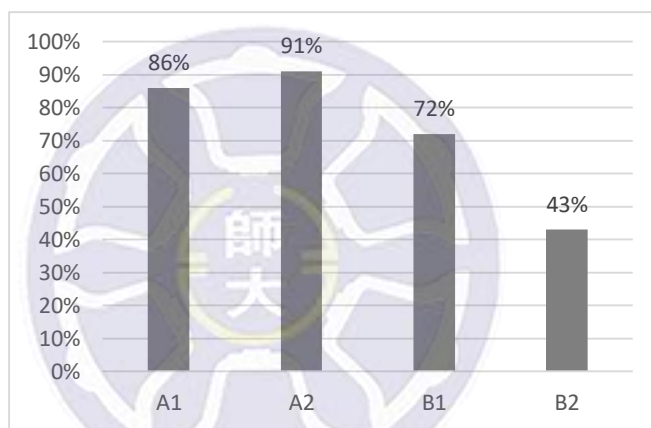


圖 4-3-6 四班學生數學題 2.1 之答對率

如表 4-3-4、圖 4-3-6，A2 班有九成學生能不經例題示範答對數學題 2.1，在四班中答對率最高。而 B2 班學生有四成多能答對數學題 2.1，答對率最低。

A 校兩班答對率接近，B 校兩班則約相差三成。A 校兩班約有接近九成的學生能答對數學題 2.1，而 B 校兩班有接近六成的學生能答對數學題 2.1，兩校答對率差距約三成多。

數學題 2.1 解題所需概念為向量經過平移不會改變長度及方向，所以仍然是同一個向量。此題整體答對率為四題中最高，顯示此概念相較於向量分解，學生更能將象棋情境中所學遷移至純數學情境。

研究者認為上述報導四題的答對率應該是低估的，因為實際上課時間比預期短，而數學題被安排在學習單最後一頁，學生有可能在前面情境證明題花太多時間導致最後幾題來不及寫。

貳、學生使用向量概念解數學題之情形

研究者欲從學習單上學生所寫過程，探討學生使用向量概念解數學題之情形。由於有些題目如數學題 1.1、1.2、2.1，學生可能直接看出答案就沒有填寫過程；有些學生填寫過程不易判定是使用哪一種方法或概念解題，如圖 4-3-7，從學生畫記痕跡來看，可能是利用向量加法的三角形法，但答案中卻出現 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，比較可能是坐標化時出現的數字；有些學生則是同一題中混用了多個方法，因此研究者不會對每一題的各個解法統計次數。

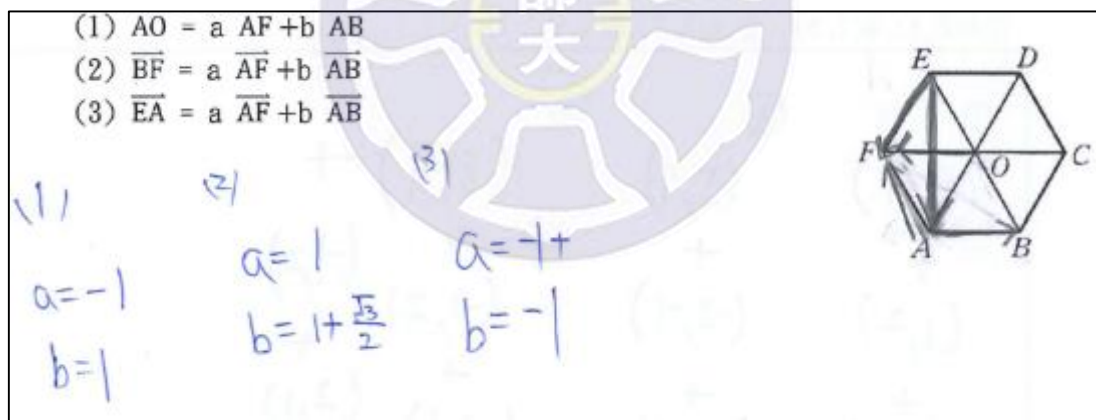


圖 4-3-7 難以判定學生使用的解題方法例一

一、學生使用向量概念解數學題一之情形

(一)將圖像表徵坐標化

數學題 1 給定一正六邊形，並將三組頂點通過中心連線後，分割成六個正三角形。看到題目給了圖像表徵，比較直接的想法應該是所需向量以幾何表示

法畫出，並進一步利用向量加法的三角形/平行四邊形解題。然而研究者觀察到部分學生先將所需向量坐標化，如圖 4-3-8，學生寫出所需線段之長度後，在題目中標示出向量的坐標表示法。

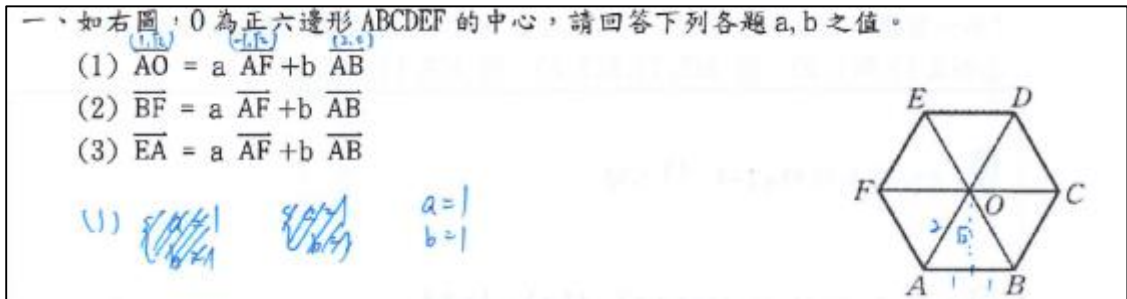


圖 4-3-8 學生將圖像表徵坐標化

研究者推測學生將圖像表徵轉為坐標表徵再解題有兩個可能性：前面填寫學習單時的習慣，或是不熟悉以幾何表徵操作向量加減法。由於學習單上大部分題是在象棋情境中，而學生紀錄其操作結果為求方便通常都是使用向量的坐標表示法，因此在解數學題時即使不需要也這麼做。若學生是「不熟悉以幾何表徵操作向量加減法」，則是教師後續教學上需要注意的現象，此題給定圖像是正多邊形，在其他的情形下可能不會那麼容易進行坐標化。

使用此方法代表學生具備將向量的幾何表徵轉為坐標表徵的能力，不過研究者發現其中部分學生在轉換上出現錯誤。如圖 4-3-9，雖然學生答案正確，但過程中誤把正三角形的高當成和邊長一樣，並沒有正確運用畢氏定理求出正確長度。

一、如右圖， O 為正六邊形 $ABCDEF$ 的中心，請回答下列各題 a, b 之值。

(1) $\overrightarrow{AO} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$ $(1, 2) = a(-1, 2) + b(2, 0)$ $A: 1, 1$
 (2) $\overrightarrow{BF} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$ $(3, 2) = a(-1, 2) + b(2, 0)$ $A: 1, -1$
 (3) $\overrightarrow{EA} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$ $(0, -4) = a(-1, 2) + b(2, 0)$ $A: -2, -1$

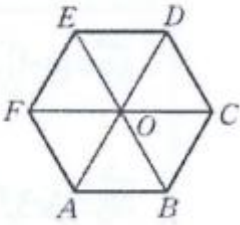


圖 4-3-9 幾何表徵坐標化時出錯

(二) 向量加法的三角形/平行四邊形法

研究者觀察發現，多數學生在解數學題 1 時會使用向量加法的三角形/平行四邊形法解題。如圖 4-3-10，學生解數學題 1.3 時，畫出包含 \overrightarrow{EA} 在內的三角形，且選用的第三個頂點並非題目給定的點，顯示這位學生對向量加法的三角形法此概念應該已進行過抽象化。

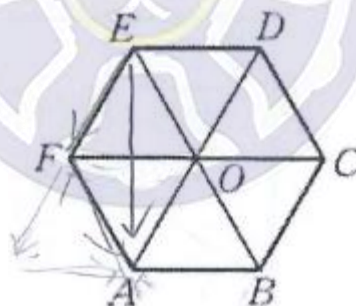
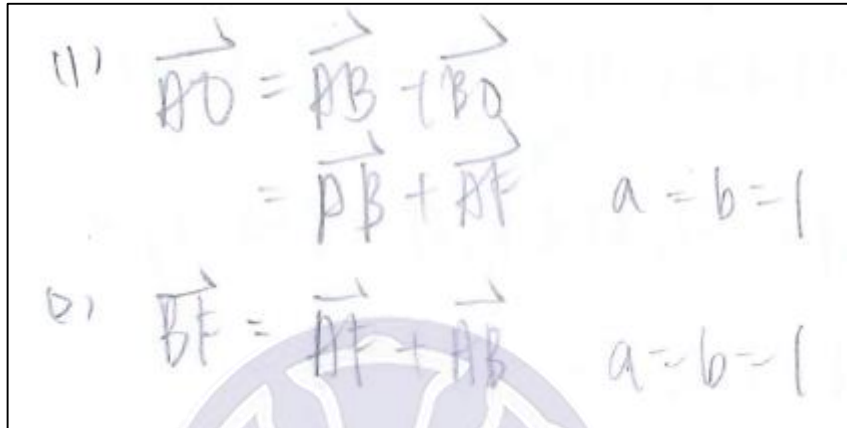


圖 4-3-10 學生使用向量加法的三角形法

(三)未注意向量的方向

有部分學生在進行向量加減法時，未注意箭頭方向而導致解題有誤。如圖 4-3-11，學生數學題 1.1、1.2 均回答 $a = b = 1$ ，研究者推測這些學生可能未注意向量加法的三角形法中箭頭方向，導致其產生「向量圍成三角形即加法關係」類似這樣的錯誤觀念。

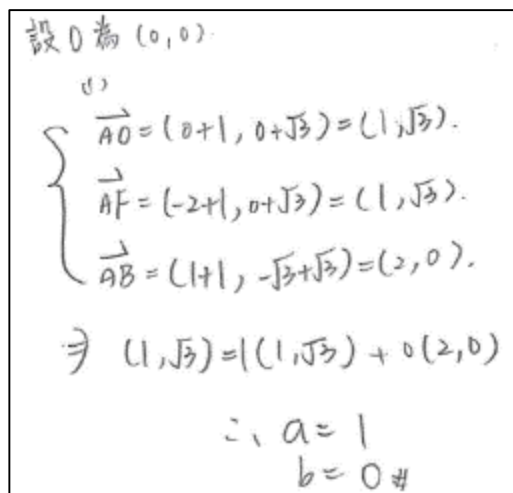


Handwritten student work showing two equations and a conclusion:

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad \vec{AO} &= \vec{AB} + \vec{BO} \\ &= \vec{AB} + \vec{AF} \quad a = b = 1 \\ \text{(2)} \quad \vec{BF} &= \vec{AF} + \vec{AB} \quad a = b = 1 \end{aligned}$$

圖 4-3-11 向量加減法未注意方向例一

將圖形表徵坐標化的學生中也有少數未注意方向而出錯，如圖 4-3-12， \vec{AO} 、 \vec{AF} 長度相同但方向不同，顯然是不一樣的向量，學生使用相同的坐標表示法即出錯，進而導致無法做出正確向量分解。



Handwritten student work showing vector components and a conclusion:

設 O 為 $(0, 0)$.

$$\begin{cases} \vec{AO} = (0+1, 0+\sqrt{3}) = (1, \sqrt{3}). \\ \vec{AF} = (-2+1, 0+\sqrt{3}) = (-1, \sqrt{3}). \\ \vec{AB} = (1+1, -\sqrt{3}+\sqrt{3}) = (2, 0). \end{cases}$$
$$\Rightarrow (1, \sqrt{3}) = 1(1, \sqrt{3}) + 0(2, 0)$$
$$\therefore a = 1 \\ b = 0 \neq$$

圖 4-3-12 向量加減法未注意方向例二

(四)加法時受向量的長度影響

研究者發現有部分學生在做向量加減法時，會受到向量的長度影響。

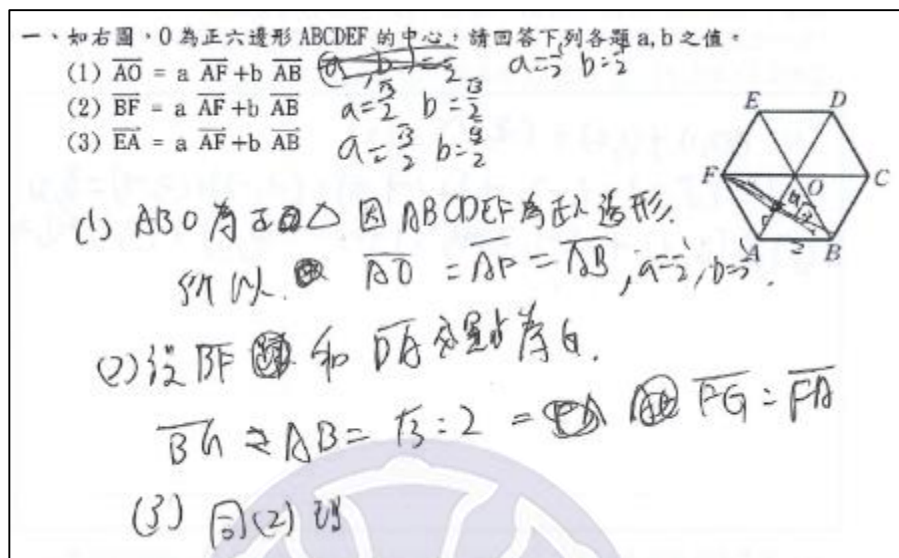


圖 4-3-13 向量加減法受到長度影響例一

如圖 4-3-13，學生解數學題 1.1 時，認為 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}$ ，所以將兩向量各取一半再相加成目標向量。解數學題 1.2 時書寫的過程也將重點放在計算長度上，再將其分為兩半當作係數。

研究者推測這些學生可能受到以坐標表示法進行加法時，數字要相加的影響，將其錯誤遷移到以幾何表示法進行加法時，也找出長度這樣的數字資訊進行相加。

(五)以有向線段的符號進行向量分解

有少數學生發展出不使用向量的坐標表示法或幾何表示法，直接以有向線段符號進行向量分解，此方法是前面教學沒有出現過的。如圖 4-3-14，學生分解 \overrightarrow{EA} 向量時，第一步是以幾何表示法及三角形法操作，但後續步驟均直接以有向線段符號操作。

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \vec{EA} &= \vec{EF} + \vec{FA} = (\vec{EO} + \vec{OF}) - \vec{AF} = (\vec{FA} + \vec{BA}) - \vec{AF} \\
 &= -2\vec{AF} - \vec{AB} \\
 a &= -2, b = -1
 \end{aligned}$$

圖 4-3-14 以有向線段符號進行向量分解例一

二、學生使用向量概念解數學題二之情形

(一)向量的相等

多數學生使用向量平移後，方向、長度不變因此仍相等的性質解數學題二。如圖 4-3-15，學生將平行四邊形的一組對邊視為向量，並以坐標表示法分別列出，再利用兩向量相等解出 D 點坐標。

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= (-1-3, 2+2) = (-4, 4) \\
 \vec{DC} &= (2-x, 3-y) = (-4, 4)
 \end{aligned}$$

圖 4-3-15 利用向量平移的性質解題例一

(二)利用斜率概念解題

有部分學生是利用以前學過的斜率概念解題，如圖 4-3-16，學生將直線的斜率分別列出，由於斜率為兩點的 x 坐標、 y 坐標差距之比例，以分數表達時會捨棄一些資訊，因此至少需要列出兩條式子才能解出 D 點坐標。

雖然斜率概念與向量概念有相似之處，但「長度」、「方向」兩個重要資訊都是無法從斜率得知的，因此研究者認為學生若一直以舊經驗解題會影響對後續向量單元的學習有負面影響。

$$m_{AB} = \frac{-4}{4} = -1.$$

$$m_{CD} = -1 = \frac{y-3}{x-2} \Rightarrow -x+2 = y-3.$$

$$m_{AD} = \frac{1}{3} = \frac{y+2}{x-3} \Rightarrow 3y+6 = x-3.$$

$$A: \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases}$$

圖 4-3-16 利用斜率概念解題例一

(三) 平行四邊形對角線平分性質

研究者發現有少數學生會以平行四邊形對角線平分的性質解題。如圖 4-3-17，學生利用 A 點和 C 點求中點坐標後，再推得 D 點坐標。此方法與前面教學無關，顯示有少數答對數學題二的學生並非產生向量概念從象棋情境到純數學情境的學習遷移。

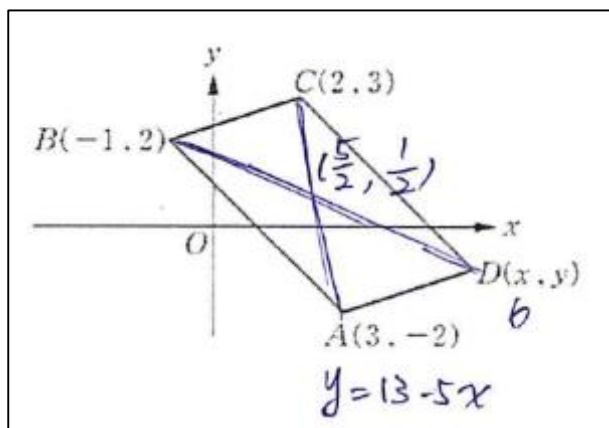


圖 4-3-17 利用對角線平分性質解題例一

第五章 結論與建議

第一節 結論

以下將針對三個研究問題，依據研究結果回答並作結論：

一、在學習平面向量單元之前，學生以自有表徵表達向量概念之情形為何？學習後的轉變情形為何？

1. 在學習平面向量單元前，有六成多的學生使用帶箭頭的擬動態圖像表徵表達象棋馬的移動，此類表徵與向量的幾何表示法相當接近，僅受情境的棋盤影響有些微差距；而四個班級中只有一位使用的是向量的坐標表示法，並以方程式輔助說明 x 分量與 y 分量的關係。這顯示後續教學使用的兩種向量表示法中，對學生來說幾何表示法與所傳達概念的關係較直接，因此教師在此部分的教學上可以更著重於向量的坐標表示法。

其他表徵方面，有一成多的學生使用無箭頭的擬動態圖像表徵，未清楚標示方向；接近一成的學生使用靜態圖像表徵和點的坐標表徵，傳達的資訊是結果而非移動過程；接近一成的學生使用文字表徵，此類表徵相對來說較不簡潔且較難進行操作。這顯示有三成左右的學生使用表徵尚不具簡潔且清楚的特性。

2. 在學習平面向量單元前，關於使用表徵的正確性，頂尖程度的學生只有非常少數表徵使用錯誤；而高程度的學生有一成多表徵使用錯誤。這顯示即使尚未學習數學上的表徵，要正確表達向量概念對學生來說並不難。

3. 在學習平面向量的表示法之後，所有學生後續均轉為使用坐標表示法和幾何表示法，且在單純表示象棋馬的移動上均正確。這顯示經過學習，學生將自有表徵轉換為更簡潔清楚的表徵並不難。

二、素養導向課程中，學生解情境題之數學素養展現為何？

1. 本研究的情境題需要學生說明原因，多數學生可能受到平常解題習慣影響，並沒有將論述寫完整，也沒有意識到所填寫內容是在向他人解釋，在數學力「溝通」之展現不佳，進而影響到其他數學力的展現。

2. 七個數學力中，影響學生解本研究情境題最明顯的是「構思策略」，其明顯地影響了後續「推理及論述」，並可以按照學生選用的證明策略的層次將回答內容依序分成「空白或無意義」、「外部信念證明策略」、「經驗證明策略」、「分析證明策略」四類，每類回答除了證明策略外有相似特徵。例如「分析證明策略」中「形成數學問題」方式均為將棋盤看成分割後較小的單位，「經驗證明策略」以下層次均無邏輯演繹推理。

3. 頂尖程度的學生整體上學習前後選用的證明策略層次有上升(使用「分析證明策略」的學生約增加一成)，研究者認為可能是學生在學習過程中多次操作、紀錄、並在教師教學下抽象成性質，對整個情境更能掌握，並且使用向量的坐標表示法也可能讓學生聯想到使用基本的向量去拼湊出其他向量；而高程度的學生無論學習前後都有多數屬於「空白或無意義」、「外部信念證明策略」兩類，顯示時間不多的情況下此情境證明題難度太高。

4. 頂尖程度的學生有四成多並未於證明中使用前面學習的向量語言，正確且完整使用的約一成多，此現象有可能是學生「無法」或「無意圖」這麼做，而配合其他題作答情形來看，研究者認為多數學生屬於後者，他們不認為需要將論述寫的那麼清楚，這又牽涉到數學力「溝通」；高程度學生則受到他們證明策略的影響，在「空白或無意義」、「外部信念證明策略」兩類的回答是不太會使用到向量語言的。

三、素養導向課程後，學生平面向量概念之學習遷移情形為何？

1. 數學題 1.1、1.2、1.3 的學生整體答對率逐題下降、每兩題之間約相差一成多，這顯示對於向量分解的概念之學習遷移，「分解為兩向量相加」最佳、「分解為兩向量相減」次之、而「分解為多個向量」最差。而頂尖程度學生的學習遷移情形較高度學生佳，每題答對率約相差三成。

2. 在答對的學生中，多數學生使用向量加法的三角形法解題，並有部分學生此概念明顯經過抽象化，甚至直接以有向線段符號進行向量分解；少數學生可能受到課程編排影響，學習單前面的題目多半使用坐標表示法，因此他們解題時也先將圖像為主的題目坐標化。而答錯的學生中，有部分學生在解題過程中忽略了「方向」資訊，另外有些學生進行向量加法時受到向量的長度影響，認為兩個等長的向量相加後長度應為兩倍。

3. 數學題 2.1 的學生整體答對率比數學題 1.1 至 1.3 都高，顯示「向量相等」的概念之學習遷移情形比「向量分解」好，頂尖程度學生接近九成、高度學生約五成多。此現象符合數學內容的邏輯，因為向量幾何表示法的加法常常需要平移向量以組成三角形，若不清楚向量相等的概念則難以進行此動作。

第二節 建議

一、素養導向課程應該為所有程度的學生設計，而本研究因方便取樣的關係剛好選取到高程度以上之學生，若後續研究有興趣可以改變選取學生的程度或考慮區域差異。

二、影響學生學習的情形除了課程內容外理應還有教學層面，而教學層面並不在本研究範疇中，若能涵蓋到此層面會使對學生學習情形的分析更完整。

三、關於課程中情境題之設計，研究者原意為讓學生進行有效溝通以展現更全面的數學素養，因此設計了需要說明原因的題目，然而造成高程度學生在時間不多的情況下反應不良。若要設計須說明原因的題目，可能需要更謹慎考慮難度，或是將其分成數個小題。

四、因為借用課堂為兩堂，課程只能進行「平面向量的運算」單元的前半段，而本研究選用的情境其實可以延續使用到單元後半段，如此一來便可分攤引入情境的時間成本，或許還能使學生更能感受到此情境與數學的連結進而影響學習情形。

參考文獻

中文部分：

1. 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏.(2013). 教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計劃結案報告. 教育部提升國民素養專案辦公室 研究計劃成果報告.
2. 林福來等.(2011). 高中數學第三冊. 南一出版社.
3. 洪志璋.(2013). 高中生關於向量內積的概念心像之探究. 國立臺灣師範大學.
4. 國家教育研究院.(2018). 十二年國民基本教育課程綱要.
5. 單維彰.(2013). 向量在高中數學課程的份量. 科學月刊.
6. 劉柏宏.(2016). 從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵 —理論與案例分析. 臺灣數學教育期刊.

英文部分：

1. Cockcroft. (1982). Mathematics Counts. Her Majesty's Stationery Office 1982 .
2. Crowther,G. (1959). A report of the Central Advisory Council for Education. Her Majesty' s Stationary Office.
3. HarelG.&Sowder,L. (1998). Students' Proof Schemes : Results from exploratory studies. CBMS Issues in Mathematics Education.
4. Niss& Højgaard, TM.,. (2011). Competencies and mathematical learning – Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Roskilde University.
5. Niss,M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. The Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

6. PISA. (2012). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework. OECD. doi:
10.1787/19963777
7. Pugalee,D.K. (1999). Constructing a model of mathematical literacy. The Clearing
House. doi:10.1080/00098659909599632
8. Steen, L. A., Burrill, G., Ganter, S., Goroff, D. L., Greenleaf, F. P., Grubb, W. N., ...
Wallace, D. (2001). The case for quantitative literacy. National Council on
Education and the Disciplines.
9. UNESCO. (2003). Literacy : A UNESCO perspective. NY: Author.



附錄

象棋中的數學-⊙(馬)能不能走遍棋盤？

象棋是中國古代用來沙盤推演、模擬戰爭的方式，後來流傳於民間演變為一種遊戲。在所有的棋子中，⊙(車)和⊙(砲)的移動範圍明顯可以覆蓋整個棋盤；⊙(將)、⊙(士)、⊙(象)、⊙(卒)受限於規則不能走遍整個棋盤。而⊙(馬)的移動方式比較特別，是走「日」字，究竟棋盤上有沒有它的死角，只要待在那就能躲開⊙(馬)的攻擊呢？

換句話說，象棋中的⊙(馬)能不能走遍棋盤？

一、請用你的方法表達⊙(馬)所有可能的移動方式。

(文字、畫圖、符號都可以)



冷知識：猜猜看⊙(馬)為什麼設計成這樣移動？

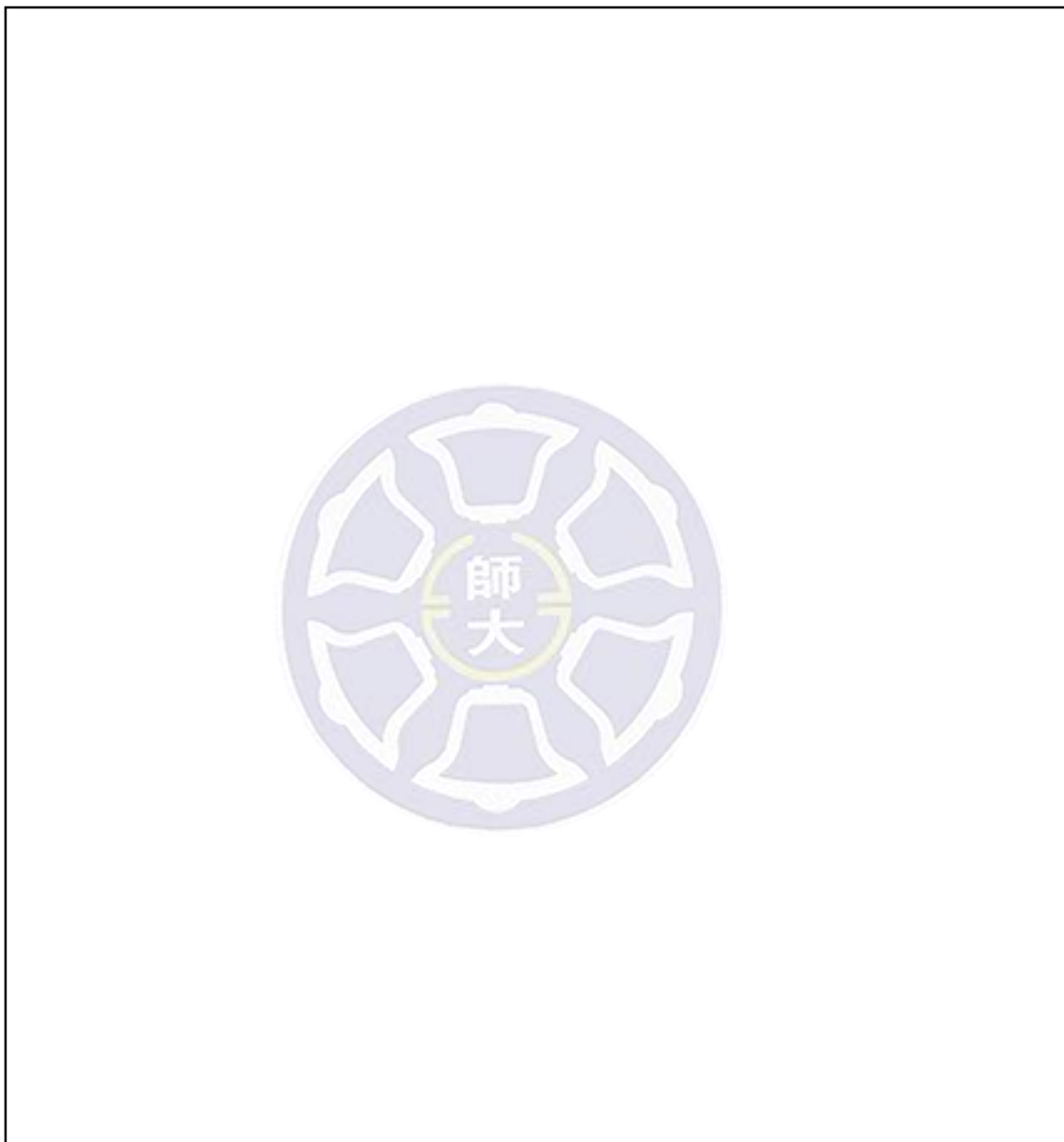
二、猜猜看，⊙(馬)能不能走遍棋盤？若你覺得能，請簡述你認為能夠走遍棋盤的原因；若你覺得不能，請提出你認為走不到的位置。

能 不能

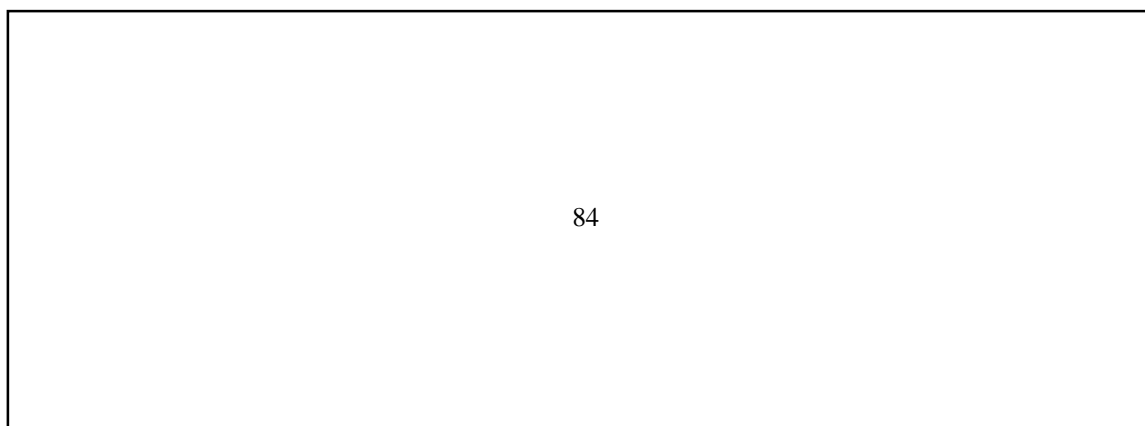
三、請記錄老師教的⊙(馬)移動的表示方式。

83

四、請試著將馬[⊗]從(3, 3)移動到指定位置。若可以移動的到，用老師教的方法把移動過程記錄下來。



五、已知馬[⊗]從 A(3, 3)走到 B(4, 4)的移動過程是 $(2, -1) + (-1, 2)$ ，那要怎麼從 B 走回 A 呢？



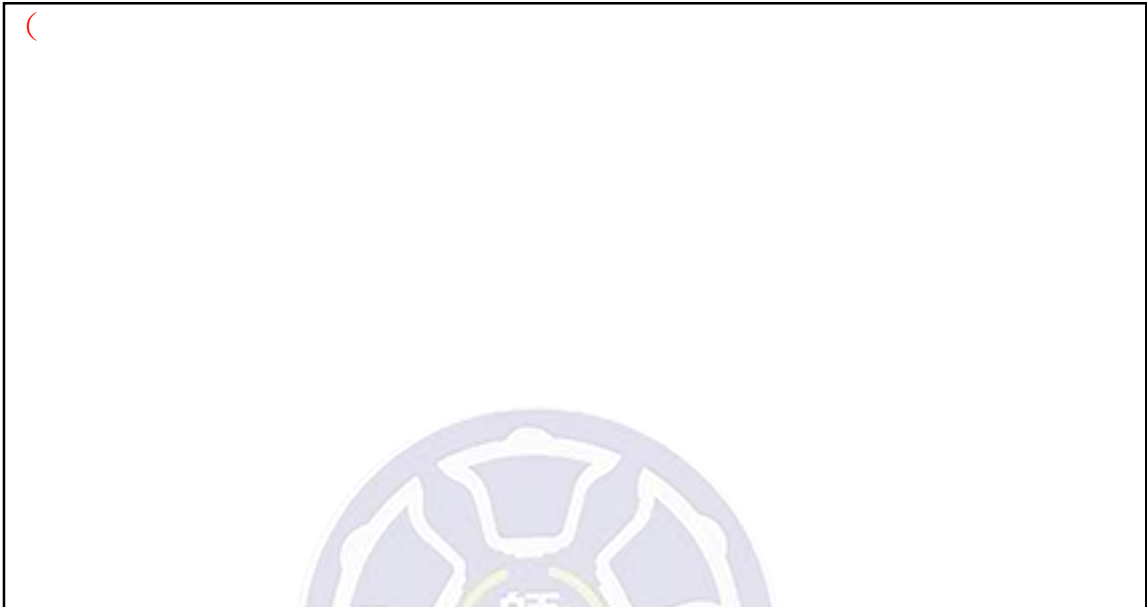
六、利用前面所學， $\textcircled{\text{馬}}$ 從A點到B點的移動過程可以用向量加法記錄。

請將下列 \overline{AB} 以 $(-1, 2)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(2, -1)$ 四個向量表示

(不一定要四個向量都用到，即係數可以為0。用坐標表示法回答即可。)

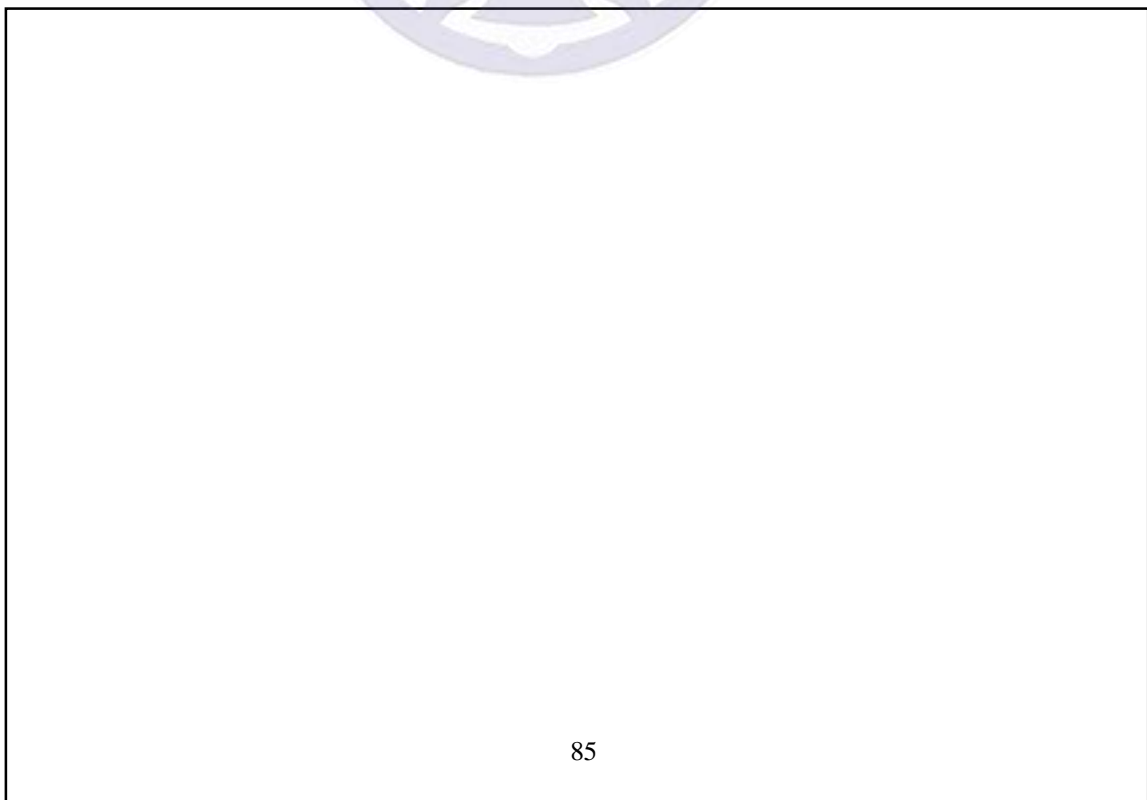
① $A(2, 1), B(1, 2)$ ② $A(5, 7), B(3, 5)$ ③ $A(8, 1), B(5, 10)$

(



七、究竟 $\textcircled{\text{馬}}$ 能不能走遍棋盤？前面已找到了好幾個位置的走法，但每個位置一一確認顯然沒有效率。有什麼方法能更好解決這個問題呢？

(提示：為什麼我們很確定 $\textcircled{\text{車}}$ 可以走遍棋盤？)



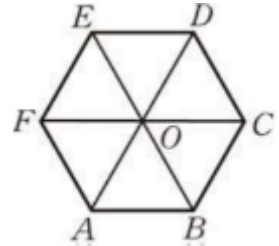
牛刀小試

一、如右圖， O 為正六邊形 $ABCDEF$ 的中心，請回答下列各題 a, b 之值。

(1) $\overrightarrow{AO} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{BF} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{EA} = a \overrightarrow{AF} + b \overrightarrow{AB}$



二、如右圖， $A(3, -2), B(-1, 2), C(2, 3)$ 為平面上三點，若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，試求 D 點坐標。

