# 第二章 基礎理論介紹

本章將探討本論文的研究背景與動機目的，並大略的說明各個章節的主要內容及重要特性。

## 2.1 向量量化器基本架構

向量量化編碼法是由 Gray 所提出，可以將其視為一個多對一的映射過程，就是把向量空間分割成有限個子向量空間，每個子向量都會對映到一個特定的有限向量集合，這個特定的有限向量集合稱為這個向量量化器對映的碼簿（codebook）。我們定義一個向量量化器 $Q(\cdot)$ 為從 $K$ 維的歐幾里得空間 $R^K$ 映射至特定有限子空間 $Y$ 的過程，表示式如下：

$$Q(\cdot): R^K \rightarrow Y \text{，} \quad Y \subset R^K \qquad (2.1)$$

其中 $Y$ 即為向量量化器 $Q(\cdot)$ 的碼簿，它是由 $N$ 個碼字向量 $y^i$（codeword vector）所組成：

$$Y = \{y^i, i = 1,2,\cdots,N\} \text{，} \ y^i \subset R^K \qquad (2.2)$$

我們可以用圖 2-1 來表示這個向量量化器的映射過程：

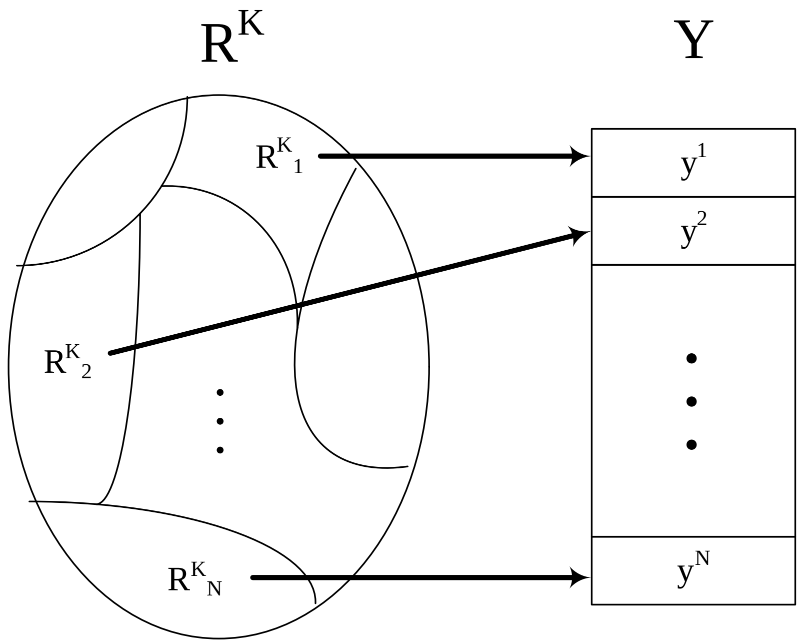


圖 2-1 向量量化器映射示意圖

基本的向量量化器包括編碼端與解碼端，圖 2-2 顯示一個向量量化器的基本架構流程圖。維度 $K$ 的編碼向量 $x$ 由編碼端輸入，透過編碼端的編碼函式 $\alpha(\ )$ 在碼簿 $\{y^1, y^2, \cdots, y^N\}$ 中尋找與輸入向量最接近的碼字 $y^j$，然後送出碼字指標 $j$ 於傳輸通道中傳送至解碼端。解端端存有與編碼端完全相同之碼簿資料，當解碼端從傳輸通道中接收到碼字指標 $j$ 後，即可找出相對應的碼字 $y^j$ 用以還原輸入向量。由於傳輸通道僅需傳送資料量極小的碼字指標，因此可大幅的節省傳輸頻寬與資料儲存的空間。

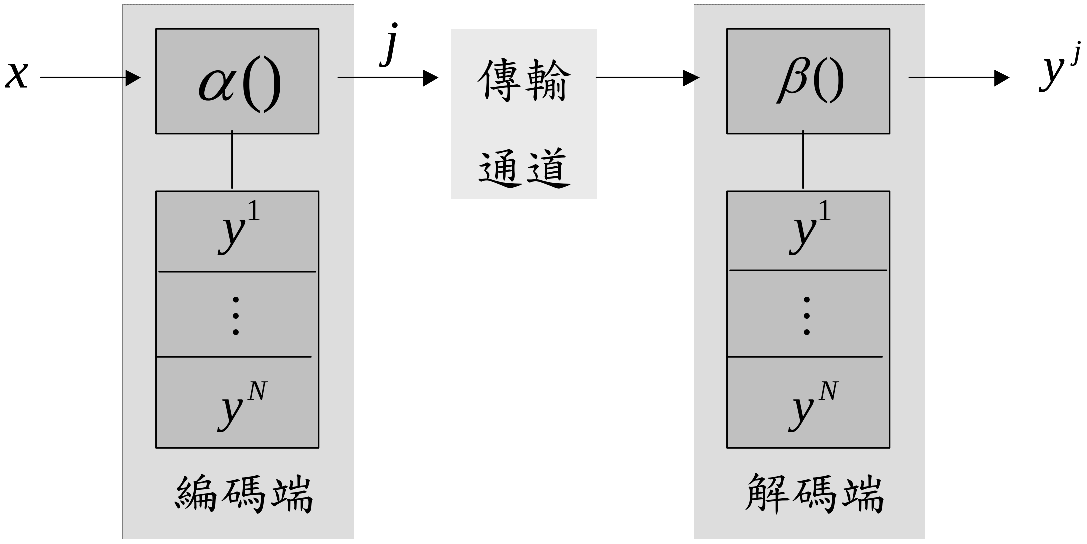


圖 2-2 向量量化器基本架構圖

向量量化器解碼端是以碼簿中的碼字向量代替輸入向量重建影像，因此必然會產生量化誤差，此輸入向量$x$與輸出碼字向量$y$的量化誤差定義為：

$$D(x,y)=\|x-y\|^2=\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2 \qquad (2.3)$$

編碼端的編碼函式$\alpha(\ )$目的是在碼簿中找出與輸入向量$x$量化誤差相對較小的碼字向量$y^j$。

$$D(x,y^j)<D(x,y^i)\text{，for all } i \qquad (2.4)$$

# 2.2 離散小波轉換

在這一小節我們將簡單的介紹小波轉換。在訊號轉換編碼的過程中，訊號被投影到一組基底函數上，相對應於基底函數的係數正是我們要編碼的部份。有效的編碼方式能將訊號藉由轉換過程使轉換後的訊號能量集中在少數的係數上，而小波轉換正符合此特性，使得我們可以捨棄不重要的高頻係數資訊而不會影響重建影像的視覺效果。

令 $X$ 是維度 $2^n \times 2^n$ 的向量 $x$ 做 $n$ 階離散小波轉換（n-stage DWT）之後的結果，如圖 2-3 所示，$X$ 亦為 $2^n \times 2^n$ 的區塊且由 $X_{L_O}$ 和 $X_{V_i}$、$X_{H_i}$、$X_{D_i}$ 所組成，其中 $i = 0,1,\cdots,n-1$。在離散小波轉換的過程當中，區塊 $X_{L(m-1)}$（低頻區塊，$m = 1,2,\cdots,n$）以及 $X_{V(m-1)}$、$X_{H(m-1)}$、$X_{D(m-1)}$（高頻區塊，$m = 1,2,\cdots,n$）是由 $X_{Lm}$ 遞迴獲得，而 $X_{Ln}$ 等於輸入向量 $x$。也就是說，區塊 $X_{L0}$ 和 $X_{V_i}$、$X_{H_i}$、$X_{D_i}$，其中 $i = 0,1,\cdots,m-1$，是由 $X_{Lm}$ 經過 $m$ 階的離散小波轉換後得來。而 $X_{Lm}$ 可經由一個簡單的鏡像濾波器（quadrature mirror filter，QMF）分解成 $X_{L(m-1)}$、$X_{V(m-1)}$、$X_{H(m-1)}$ 和 $X_{D(m-1)}$ 四個區塊[8]。

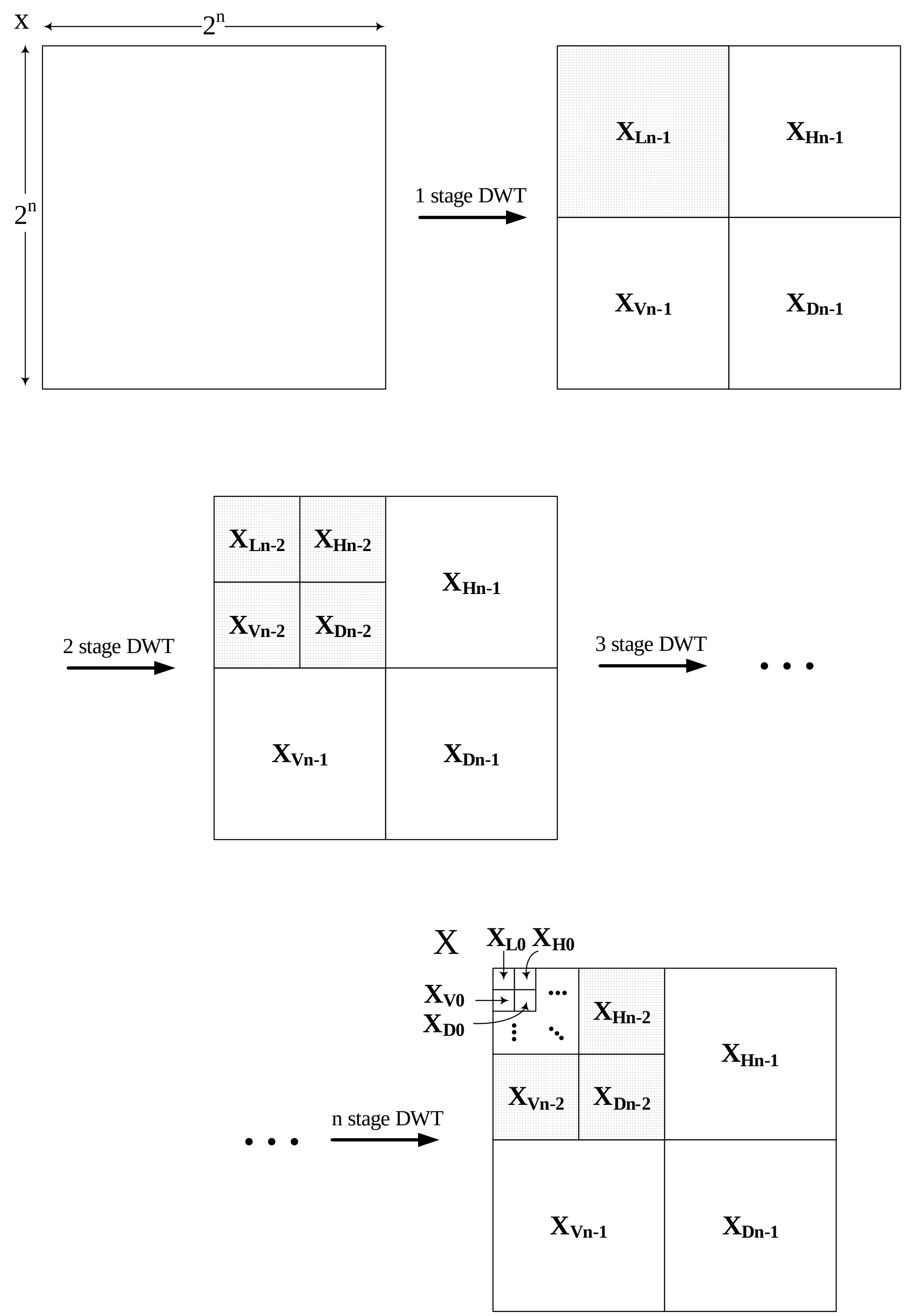


圖 2-3 n 階離散小波轉換示意圖

# 2.3 部分距離碼字搜尋演算法則

碼字的搜尋是計算輸入向量與碼字向量之間的量化誤差，也就是歐幾里得平方距離，找出最小量化誤差的碼字，搜尋的過程包含了加法、乘法以及邏輯判斷等運算，稱之為運算複雜度（computational complexity），運算複雜度可以說是評估向量量化器的一個重要指標。而搜尋最接近碼字的程序是向量量化器編碼端最費時的的一環，於是降低運算複雜度便成為增進向量量化器效能最重要的工作，在這一節裡，我們將介紹以小波轉換為基礎的部分距離搜尋演算法則（Partial Distance Search，PDS）來達到降低運算複雜度的目的。

假設向量量化器的碼簿中有 $N$ 個碼字：$y^1, y^2, \cdots, y^N$，每個碼字的維度是 $k = 2^n \times 2^n$。令 $x$ 是與這些碼字具有相同維度的輸入向量（input vector）。部分距離搜尋演算法則的目的是在減少搜尋與輸入向量平方距離最小的碼字的運算時間。一般來說部分距離搜尋演算法則包含兩個步驟，一開始我們會給定一個目前最近距離碼字（current nearest neighbor）並計算輸入向量與目前最近距離碼字的平方距離成為目前最近距離（current minimum distortion，$D_{\min}$）。第一個步驟我們會先計算輸入向量與目標碼字部分維度的平方距離，若部分維度的平方距離超過 $D_{\min}$，則目標碼字不需與輸入向量經過所有維度的平

方距離運算即可排除成為最近距離碼字的可能性。否則才需進行第二個步驟，即算出輸入向量與目標碼字所有維度的平方距離來進行是否為最近距離碼字的判斷。

令 $X$ 與 $Y^j$ 分別代表 $x$ 與 $y^j$ 做 $n$ 階離散小波轉換後的結果，同時令 $D(u,v)=\sum_i (u_i - v_i)^2$ 表示向量 $u$ 和 $v$ 的平方距離。對於一個正交的離散小波轉換（orthogonal DWT），我們可以得到這樣的結果：

$$D(x, y^j) = D(X, Y^j) \quad (2.5)$$

令 $X_i$ 與 $Y_i^j$ 分別代表 $X$ 與 $Y^j$ 的第 $i$ 個小波係數，這些係數在小波領域是以 zig-zag 的順序來標記，如圖 2-4 所示：

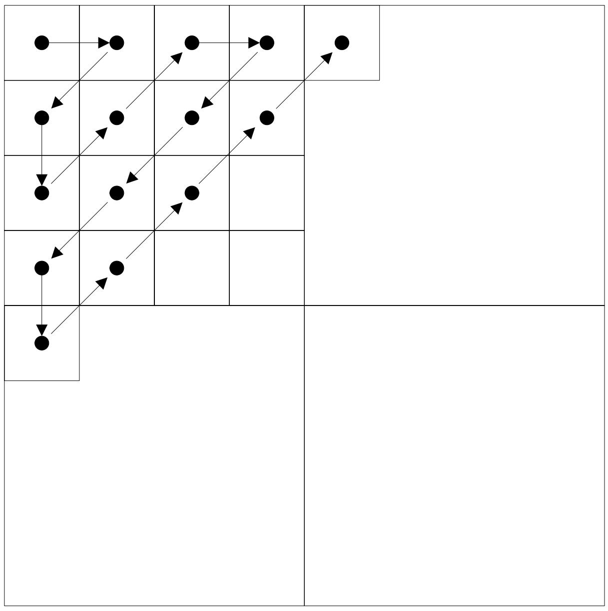

圖 2-4 zig-zag 排序方式

此外，令$D^q(X,Y^j)=\sum_{i=1}^{q}(X_i-Y_i^j)^2$代表$X$與$Y^j$之間的部分距離，當$D(X,Y^j)>D^q(X,Y^j)$，代表的是：

$$D(x,y^j)>D^q(X,Y^j) \tag{2.6}$$

令$y^p$代表的是目前最近距離碼字且$D_{\min}=D(x,y^p)$為目前最近距離。在參考文獻[3]提出的小波領域部分距離搜尋演算法中，$\sqrt{D_{\min}}$被當作部分距離用來判斷目標碼字是否為最近距離碼字，而不需進行真正的平方距離運算。對於每一個要進行搜尋比對的碼字$y^j$，我們會計算$|Y_1^j-X_1|$。假設

$$|Y_1^j-X_1|>\sqrt{D_{\min}} \tag{2.7}$$

根據（2.6）式，我們可以得到$\sqrt{D(x,y^j)}>\sqrt{D_{\min}}$，於是我們可以得知$y^j$不是最近距離碼字，然後進行下一個碼字的搜尋運算。假設（2.7）式不成立，則繼續進行接下來的 PDS 運算。我們從$q=2$開始，首先計算$D^q(X,Y^j)$，若是$D^q(X,Y^j)>D_{\min}$，根據（2.6）式得知$\sqrt{D(x,y^j)}>\sqrt{D_{\min}}$且剔除$y^j$為最近距離碼字的可能性；否則進行下一個$q$值重覆相同的處理程序直到$q=2^n\times 2^n$為止。其中，部分距離$D^q(X,Y^j)$可以展開如下：

$$D^q(X,Y^j)=D^{q-1}(X,Y^j)+(X_q-Y_q^j)^2 \tag{2.8}$$

因此，對於新值$q$的部分距離可以累加前一個$q$值的部分距離而僅須計算$\left(X_q - Y_q^j\right)^2$。

重複的 PDS 處理程序會持續到$y^j$被剔除為最近距離碼字的可能或是$q$值達到$2^n \times 2^n$為止。當$q = 2^n \times 2^n$時$D^q\left(X, Y^j\right)$會與$D_{\min}$進行比較，此時$D^q\left(X, Y^j\right) = D\left(X, Y^j\right)$，若是$D\left(X, Y^j\right) < D_{\min}$則目前最近距離$D_{\min}$被$D\left(X, Y^j\right)$取代，且目前最近距離碼字也被更改為$y^j$。當碼簿中的所有碼字都完成搜尋處理後，最後的目前最近距離碼字即為輸入向量$x$的確實最近距離碼字，而最後的$D_{\min}$為其相對應的平方距離。