



第五章 結論

本研究約歷經八個月時間進行訪談施測、資料分析並撰寫報告，目的在於比較使用與不使用 GSP 之解題情境對於幾何解題時間、表徵方式、解題策略與反思行為之影響。研究結果顯示在這兩種情境下解題呈現不同的解題歷程，其產生許多後續問題值得數學教育工作者注意與研究。本章有兩節，第一節為研究總結，第二節為研究建議。

第一節 研究總結

本研究採質性研究取向，研究對象取自台北縣市三所學校之四名學生，具高數學學習成就與熟練操作 GSP，並非隨機取樣。主要的研究工具有二項，一為《幾何評量測驗》，內容為四道幾何問題，問題內容包括幾何變換、四點共圓、全等證明及平行線性質，其特色為難度高且圖形複雜，依本研究需要特別設計。研究工具由兩位具有豐富經驗的老師建立專家效度，所建立用以分析解題表徵、過程策略與反思行為之編碼原則的評分者間信度(inter-rater reliability)為 .82。另一工具為《GSP 操作檢定》，該工具之設計係根據本研究之幾何評量測驗中可能用到的 GSP 操作技能，進行檢測，主要目的為確認受測者具備相關幾何知識且熟練操作 GSP 的動作技能。內容為八道作圖題，其評分者間信度為 98%，重測信度為 .80。

本研究施測順序如下：先施測《GSP 操作檢定工具》，通過者進行放聲思考的訓練，進行《幾何評量測驗》並針對測驗內容進行訪談。熟悉 GSP 操作的甲生及乙生，先利用 GSP 為解題輔助工具，不會 GSP 的丙生及丁生將以紙筆進行解題；待丙生與丁生約經六星期後學會 GSP 操作之後，再輪流以 GSP 為解題工具，每一

個題目均安排兩個人使用 GSP 解題，其他兩人則不使用 GSP，每位受測者的方式與問題，如表 3-3-1 所示。

研究者彙整出六點主要的發現，其中第一點說明 GSP 組的平均解題時間較短的理由，第二點說明 GSP 環境的特性對幾何解題產生的影響，第三與第四點分別概述在 GSP 與非 GSP 環境中之解題歷程，第五點從繪圖的觀點理解圖形在兩種不同解題情境下所扮演的角色，第六點則說明在 GSP 環境中影響幾何解題成效的主要因素：

一、**使用 GSP 進行解題的平均解題時間較快**：在本研究中，解題時間的紀錄主要用來作為事件發生順序與密度的基準。解題耗費的時間並不全然反映解題者對於題目的理解深度；即使解題者最後沒有成功解決問題，其過程有時反而能顯示出該解題者幾何知識與解題技能的豐富。整體而言，GSP 組的解題者較非 GSP 組的解題者解題平均時間約快 12 分鐘，推論可能的原因有兩點：首先，GSP 能夠提供精確的圖形表徵與各種動態操弄圖形的功能，利用猜測與演繹並重的啓思策略，形成視覺發現，最後輔以演繹解釋，完成解題活動。這種透過視覺發現以刺激演繹解釋的過程，可能是促使解題時間縮短的主要原因之一。其次，在研究者所設計的幾何問題情境下，非 GSP 組的解題過程中，解題者花了許多時間在嘗試各種可能的表徵使得解題時間延遲，相對來說，透過 GSP 能提供精確的圖象繪製與操弄等功能，這些功能有助於關鍵表徵的形成，可能是促使解題時間縮短的另一個原因。

二、**GSP 環境有利於圖像表徵的形成與操弄，卻可能抑制代數符號的運算**：研究顯示使用 GSP 的解題者不論在形成表徵或解題策略上，主要採視覺和圖像操弄策略，較少符號策略。可能的原因係在 GSP 環境中，符號僅有命名的功能，而不參與運算，侷限代數符號的運用。然而，GSP 提供清晰、精確與可操作的圖象表徵。清晰的圖象表徵具有視覺簡約性，易於辨識與解譯；精確的圖象表徵貼近題意的真實情況，易於猜測及發現幾何性質；透過拖曳及 GSP 所提供的各種

功能，可調整視角與物件大小，進行視覺操弄，在 GSP 環境中易於調整解譯圖形的參考框架且新舊資訊不易相互干擾，能避免判讀錯誤，降低認知負荷，提供解題之協助。

三、紙筆解題的解題者對於問題的表徵方式以符號與圖象並重，進而影響其採用多元的解題策略與較多的反思行為：本研究中非 GSP 解題者對於問題的表徵以符號和圖象為主，輔以口語或數學定理；啓思策略則以演繹推理為主，猜測與逆推為輔；解釋方式多採定義、概念與定理作為論述依據。相對於使用 GSP 的解題者，紙筆解題者的問題表徵方式較多元，可能因此導致非 GSP 組使用較多的解題策略，特別是利用代數符號協助表徵與運算工作，且表徵與策略的多元性促使解題者必須對於表徵方式、解題工具與解題策略進行回顧與評估，尤其在符號運用上，需要監控演算過程與校正結果，在運用重新畫圖的策略時，需要進行各種評估，以增刪與重組解題資訊，同時需要檢查與校正，避免轉換產生錯誤，因此反思行為較多。另一方面，非 GSP 組在解題初期時以發散思考的方式尋找可能的表徵方式與解題策略，過程中醞釀與提取豐富的相關幾何知識，雖然可能耗費較多的時間才形成解題的關鍵表徵甚至於放棄解題，但在形成關鍵表徵後，多能在極短的時間內彙整相關推論完成解題。

四、使用 GSP 解題者對問題的表徵方式以圖形為主，解題策略受 GSP 圖形操弄功能之影響，反思行為中質疑多於預見：GSP 組的解題者多以圖形表徵題意，啓思策略則以演繹推理為主，猜測為輔，配合 GSP 所提供的測量、計算與拖曳工具等功能對驗證猜測，並對於圖形進行操弄，嘗試理解圖形各部分，考慮各種分解與組合的可能，直到新圖形對於表徵題意有幫助為止；但 GSP 環境侷限符號的使用，使得反思活動中不需要考慮是否要以符號思維代替幾何思考的問題，因此反思活動中較少出現策略預見與評估的行為，除非喪失操作的意願，解題者能夠持續對於圖形進行分解與組合直到其認知系統能夠辨認出它的意義為止，故反思行為化約成“有用”與“沒有”的判斷，而以「質疑」類型的反思行

為較為明顯。由於解題者能夠從 GSP 所提供的工具中預知答案或是視覺發現，因此解題過程中出現先提供答案，再提供演繹解釋的情況，在某些題目上更呈現演繹解釋集中在指出答案或發現關鍵表徵至證明完成之間的特殊現象(如第一題與第三題)，由於某些解題者受限於幾何思考的成熟度(maturity)，提供答案或視覺解釋之後，即認為證明完成，這是值得數學教育者注意的地方。

五、**視覺化與幾何知識系統相互交織**，但相對來說，非 GSP 解題者的繪圖反應解題者對於問題的整體理解，GSP 解題者則透過繪圖理解問題：不論在 GSP 環境中與非 GSP 的環境中解題，均需要透過圖形理解題意、觸發解題資訊與組織解題資訊。在非 GSP 的情境中，重視圖形的表徵功用而忽略圖形的精確性，透過本身的知識系統與各種啓思法，對於圖中的幾何性質展開探索(解題者可能在評估之後，採用非幾何方式解題)，解題者所繪製的圖形反應其對於問題情境的理解，為了視覺需要及減低認知負荷，探索過程中，將引入符號或輔助線段協助理解圖形中的訊息並進行推理，探索失敗之後，舊的輔助元素與資訊陳列在圖形上，將影響圖形的辨識與解讀，因此常需要重新畫圖，透過重新畫圖，解題者能夠重新理解問題，重新畫圖是解題過程中重要的反思時刻，一方面要進行各種評估，以增刪與重組解題資訊，另一方面需要檢查與校正，避免轉換產生錯誤，解題者經歷重新畫圖之後，相當於再一次重新展開解題循環，直到問題解決為止。而在 GSP 的情境中，GSP 能提供清晰、精確的圖象表徵且貼近題意所呈現的真實情況，再者，GSP 環境侷限代數符號的使用(僅有命名功能)，可免去監控演算過程與校正結果，螢幕上不會產生舊資訊干擾新資訊的情況，除了少數情況外(如：誤解題意)，GSP 的作圖結果僅需要進行局部的增刪與變化，不需要重新畫圖；在 GSP 環境下解題，解題者僅需要反覆利用本身的知識系統及啓思策略，對於圖形與各種子圖之間進行觀察與操弄，多能理解圖形中的幾何關係，並以演繹法解釋之。

六、幾何知識、GSP 操作技能、空間操弄能力以及與 GSP 的「對話」能力均為採 GSP 進行幾何解題成功與否的關鍵因素：在 GSP 環境中解題是工具導向的，GSP 提供精確的圖形表徵與操弄圖形表徵的環境，減低認知負荷，使得解題者在某種程度上能專心表徵問題與進行圖形操弄，然而圖形操弄的過程需要解題者投入時間與認知資源，如果沒有受到其他「誘惑」(如第二題乙生)，解題者多能整併豐富視覺資訊而理解題意，進而解題，因此相較本研究非 GSP 組 8 個例子中有 3 題在 60 分鐘以上且有 1 題放棄的情況下，GSP 組的 8 個例子，均在 50 分鐘以內完成解題(平均 33 分鐘)。除了操弄圖形與精確繪圖功能之外，GSP 提供許多視覺資訊可用以解題，惟端看解題者如何發掘、利用與 GSP 環境「對話」，例如：在拖曳過程中，GSP 已經「無聲地」透露出許多關於題目的訊息，透過螢幕顯示測量與計算的結果「回應」解題者的猜測，解題者必須能夠敏銳地解讀這些訊息，並加以組織與應用。因此，擁有連結性高的知識結構、熟練 GSP 的操作技能、具備操弄圖形的能力以及與 GSP 對話的能力則是 GSP 環境中影響幾何解題成效的主要因素。

第二節 研究建議

根據研究結果，針對使用 GSP 為解題工具的解題者、幾何教學與未來研究方向，提出以下建議：

一、使用 GSP 為解題工具時的建議：

- (一) 研究過程中發現 GSP 誘使受測者耗費心力於觀察測量、計算與拖曳的結果，建議使用 GSP 為解題工具時，應深入解讀測量、計算與拖曳結果所呈現的資訊其代表的幾何意義，嘗試各種表徵問題的可能性，而非直接執行解題策略。
- (二) 研究過程中發現以 GSP 為解題輔助工具有部分限制，如：受限於操作 GSP 的熟悉程度、侷限符號的使用與推理，GSP 並非適用於每一個幾何問題或每一位解題者，建議使用 GSP 為解題工具時，必須先分析問題與理解工具的限制，才有事半功倍之效。
- (三) 研究指出擁有連結性高的知識結構、熟練 GSP 的操作技能、具備操弄圖形的能力以及與 GSP 對話的能力是影響 GSP 環境中幾何解題成效的主要因素，建議使用 GSP 為解題工具的解題者應注意上述要點，以增進解題效能。
- (四) 研究過程中發現四位學生在使用 GSP 與不使用 GSP 解題工具轉換的過程中均產生不適應的情況，建議未來在課程或是測驗使用 GSP 或不使用 GSP 時，必須將此因素列入考慮。

二、對於幾何教學的建議：

- (一) 研究過程中發現某些學生在使用 GSP 時為證明輔助工具時，因前提與結論錯置而造成思考混亂。建議教師能留意此問題，在幾何教學時，明確指出命題之間的邏輯關係與轉換關係。
- (二) 研究過程中發現某些學生試圖直接以 GSP 測量、計算與拖曳的結果做為證明時推論的依據，此問題涉及證明的意義與目的，建議在幾何教學時，能夠適度針對證明的功能、意義與目的以及證明在歐氏幾何中所扮演的角色等議題進行探討，以釐清實驗探索與演繹證明之間的差異，務必透過演繹證明將實驗層次的發現，提升至理論層次的證明。
- (三) GSP 重新引發數學教育界對於作圖與讀圖議題的興趣，亦引起部分爭議，如：GSP 所代表的幾何學和歐氏幾何之間差異所引發的爭議，亦值得注意，GSP 提供作圖工具，但歐氏幾何中尺規作圖與證明中並不允許使用 GSP 所提供之測量、計算與拖曳功能，GSP 環境中測量、計算與拖曳的結果能做為解題探索之用，卻無法成為證明的一部分；歐氏幾何強調演繹證明的推理過程，GSP 環境提供強而有力的圖象資訊，強調的是解題者透過視覺操弄而理解問題的推論與證明過程；建議在幾何教學時，能夠針對這兩種不同的幾何情境間相異與相同之處進行討論，以達到相輔相成之功效。
- (四) GSP 環境提供清晰、精確與可操作的圖象資訊，為了配合 GSP 的使用，幾何教學應加強讀圖的體驗，包括提供更多操弄圖形的經驗、注重圖象與概念之間的連結與轉換、注意圖形經過動態變化之後的不變性等議題，以填補實驗層次與論證層次之間的差距，使得觀察與操弄的結果得以應用推論與證明活動中。

三、對於未來研究的建議：

- (一) 本研究的樣本僅有四位且具有高數學成就，對於數學探究感到興趣，在解題過程中展現高度毅力，解題平均時間遠高於文獻中一般學生所堅持的解題時間，此特殊性是否影響本研究結果，值得注意，建議未來可以針對其他特殊族群使用 GSP 的解題歷程進行深入探討。
- (二) 本研究依據 GSP 之精確作圖與預知結果的特性設計研究工具，同時，四位解題者均能利用 GSP 進行視覺操弄與推理，亦能夠充分利用 GSP 所提供的各種功能展開解題的探索活動；相關文獻指出掌握拖曳變化過程中的不變性亦是使用 GSP 重要特性之一，本研究的解題者在此方面表現較不理想，推測可能原因是解題者沒有類似的經驗，亦可能是研究工具中缺乏針對該向度設計問題，建議未來可專門針對 GSP 之拖曳特質設計問題，進行更深入的探討。
- (三) 本研究發現使用 GSP 時解題者之反思行為類型以「質疑」類型的反思行為較為明顯，由於反思行為和個人特質有關且研究樣本僅有四位，建議未來可以針對使用 GSP 解題與反思行為類型之關係進行更深入的研究。
- (四) 本研究試圖比較 GSP 專家與生手之間的解題行為，限於研究設計的方式，僅收集到兩個資料(兩位解題者各一題)，表現差異並不顯著，無法對於此議題做出具體的結論，建議未來可以針對此議題進行更深入的研究。